ἀrchaí

AS ORIGENS DO PENSAMENTO OCIDENTAL

THE ORIGINS OF WESTERN THOUGHT

Sobre um modelo algébrico finito e discreto para a edução do espaço e do movimento a partir da matéria primeira

On a finite and discrete algebraic model for educing space and movement from prime matter

Rodolfo Petrônio da Costa

https://orcid.org/0000-0001-7208-8265

Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro (Brasil)

rodolfo.petronio@gmail.com

Resumo: Este artigo tem por objetivo apresentar um modelo algébrico finito e discreto para o conceito aristotélico de *substrato* ou *matéria prima* (*proté hylé*) com base no desenvolvimento posterior deste conceito em Tomás de Aquino. De forma oposta a considerá-lo como um conceito ultrapassado e obscuro, mostra-se a atualidade e

https://doi.org/10.14195/1984-249X_24_2

proficuidade desta intuição aristotélica sobre a realidade, ainda que não individualizada, de um substrato que permearia a totalidade da natureza física, sendo a matriz fundamental para a gênese e a corrupção corpóreas. Esta intuição básica ainda que objeto de controvérsia ao longo do tempo foi aceita por diversos autores de destaque, porém em nenhum caso foi explorada através de um modelo matemático. Ademais, é fundamental que o substrato esteja dotado de qualidades que tornem possível que dele se possa extrair tanto o espaço como o movimento corpóreo. Neste trabalho, apresentamos um modelo algébrico por hipótese isomorfo ao *substrato*, do qual extraímos consequências relevantes, como a extensão do espaço e o caráter dinâmico da matéria, além de uma relação básica entre operadores derivados de espaços vetoriais duais da álgebra que formalmente provê o caso discreto da relação de incerteza de Heisenberg.

Palavras-chave: metafísica, ontologia da matéria, filosofia da natureza, filosofia da física.

Abstract: In this paper we aim at presenting a finite and discrete algebraic model for the Aristotelian concept of *substratum* or *prime matter* (*proté hylé*), based upon further developments on this concept as carried out by Thomas Aquinas. Rather than considering it to be an outdated and obscure concept, it is shown how much profitable and current this Aristotelian insight is, both on the reality (yet not an individual) of a substratum that would pervade the whole of physical nature and on being the basic matrix for bodily genesis and corruption. This basic insight, despite of being a much controverted object over time, has been accepted by renowned authors, although in no way examined through any mathematical modeling. Additionally, it is essential that this substratum be endowed with qualities which allow the extraction of both space and bodily movement from itself. In this work, we present an algebraic model ex hypothesis isomorphic to the substratum, from which some relevant results like space extension and the dynamic character of matter are derived, and also a basic relation between operators which are obtained from dual vector spaces on the algebra and that provides the discrete case for Heisenberg's uncertainty relations.

Keywords: metaphysics, ontology of matter, philosophy of nature, philosophy of physics.

1. Fundamentos metafísicos da edução da geometria e do movimento no espaço-tempo

Em linha com o objetivo principal de prover um modelo algébrico para o substrato ou matéria primeira, nos concentraremos nesta seção inicial na análise conceitual provida por Aristóteles e Tomás de Aquino acerca do estatuto ontológico da matéria, convenientemente adequando a terminologia, bem como introduzindo alguma nova perspectiva consoante o importe epistemológico trazido especialmente pela mecânica quântica. Chamamos a atenção de início para dois aspectos de nossa abordagem: em primeiro lugar, segundo implicado por uma análise ontológica propriamente dita, ou seja, metafísica, a matéria sobre a qual nos debruçaremos é aquele componente radical último, metafísico, que está na composição de todos os entes da natureza; na terminologia de Tomás de Aquino, utilizada em diversas ocasiões por Aristóteles, *matéria prima*. A matéria sobre a qual se debruça a análise empírica provida pela ciência experimental é, com relação à matéria prima, uma parte da matéria assinalada por certas dimensões, tratando-se, pois, de uma matéria fenomênica, mensurável espaço-temporalmente. A matéria prima, também denominada protomatéria[1] a partir deste ponto, é o constitutivo ontológico último ou fundamento radical ou metafísico das manifestações quantitativas dos entes da natureza; em segundo lugar, dada a amplitude com o que Tomás tratou do tema em sua obra, desenvolvendo-o e burilando-o conforme as exigências do contexto assim o exigiam, bem como as elucidações provenientes do próprio Tomás de Aquino, muitas vezes tendo sido razão de equívocos conceituais justamente por terem sido

[1] Doravante simplesmente matéria; onde houver algum conflito com a noção comum, fenomênica, de matéria, então será convenientemente explicitada como matéria prima ou protomatéria.

menoscabadas em várias ocasiões por multíplices autores, nos valeremos de uma excelente compilação (Faitanin, 2001a) que serviu como roteiro básico para nossa exposição, com as devidas adequações tendo em vista nosso propósito principal.

Inicialmente, devemos afirmar que a matéria possui estatuto ontológico, pois "se é correto que a matéria não possui estatuto ontológico senão por causa da forma,[2] isso não justificaria atribuir-lhe carência absoluta de ser [...] porquanto a matéria é" (Faitanin, 2001b, p. 7). Tal estatuto ontológico implica que se busque estabelecer a origem e a natureza da matéria, a qual deve ser compreendida como "ser em potência", significando que a matéria possui o ser, ainda que sob um aspecto minimamente entitativo e com máxima potencialidade; esta última implica que a matéria seja primeiro sujeito subjacente de toda mudança, quer essencial quer acidental, que tenha dependência da matéria, segundo Faitainin (2001b, p. 8-9). Assim, Tomás de Aquino apresenta duas possíveis assimilações para a matéria:[3] (a) [Quando se diz "matéria"] se está referindo àquela matéria conceptualizada sem qualquer forma e privação, mas que é sujeito de forma e privação, denominada "matéria primeira", já que antes da mesma não há outra matéria, e à qual também se denomina "*hylé*"; (b) Ou se está referindo a algum gênero como, por exemplo, a água, que é a matéria primeira dos líquidos. Mas, neste caso, a água não é absolutamente primeira, porque é composta de matéria e forma, donde já possui previamente matéria (Aquino, 2009a, c. 2 n. 13-14), ou então se poderia afirmar que "a matéria primeira não existe por si mesma na natureza das coisas [...] ademais sua potência não se estende senão às formas naturais" (Aquino, 1980, Iª q. 7 a. 2 ad. 3). Para Aquino, portanto, o primeiro sujeito da geração (e corrupção) substancial é a matéria (matéria prima), na qual se fundamenta toda a produção dos corpos. Igualmente, a produção (origem) da matéria não pode se dar a partir da matéria, pois segundo Aquino (2009b, c. 1 n. 1), "da matéria não

[2] A saber, não há matéria sem forma na natureza.

[3] Tomada aqui no sentido comum do termo.

se extrai a matéria". Isso significa dizer que não há uma causalidade[4] específica da matéria, senão que ela é o primeiro sujeito desde o (a partir do) qual os corpos naturais foram extraídos. Ademais, a matéria, à medida que está em potência para receber qualquer forma específica, ou seja, as formas que especificam ou determinam os corpos no espaço e no tempo segundo certas quantidades determinadas, "não pode desaparecer enquanto tal, porém necessariamente deve ser isenta tanto de corrupção quanto de geração" (Arist. *Ph.* 192a26-35). Dito de outro modo, que a matéria é algo criado, no sentido de que ela mesma não pode ter seu início senão a partir do *não ser* (nada) e seu término senão no *não ser* (nada). A matéria, ademais, é o *ente em potência* e se difunde por (é comunicada a) todos os entes naturais, porquanto,

> O que chamo matéria é precisamente o sujeito último subjacente comum a todas as coisas da Natureza, pressuposto como seu constituinte substantivo, não acidental. E mais, a destruição de uma coisa significa o desaparecimento de tudo o que a constitui à exceção exatamente deste mesmo sujeito subjacente, cuja existência é pressuposta, e caso este fosse destruído, então a coisa que o pressupõe teria sido com ele destruído antecipadamente, antes mesmo que viesse a existir. (Arist. *loc. cit.*).

Por outro lado, Aquino sustentava que a matéria (protomatéria) foi criada[5] pela onipotência de Deus a partir do não ser (nada), não se

[4] Causalidade aqui se referindo a alguma das quatro causas que entram na composição dos corpos, a saber, as causas material e formal (intrínsecas aos entes naturais), e as causas eficiente e final (extrínsecas aos entes naturais). Conclusão: a matéria (protomatéria, relembrando) não é gerada (causada) por qualquer uma das quatro causas.

[5] Logo, a matéria prima não existe ab-eterno, isto é, a matéria não existe desde sempre. Vale observar que o problema de um mundo criado desde sempre, a saber, tendo existido desde o infinito passado na linha do tempo, não era problema para Tomás de Aquino: ele entendia que, de qualquer forma, o ser do mundo teria recebido desde o infinito passado seu influxo enquanto ser, ou seja, foi criado. Acrescentava Tomás (1977, c. 98-99) que uma refutação quer filosófica quer em bases experimentais acerca de um mundo que tenha existido desde o infinito passado não seria possível. Isso parece correto, pois ainda que o início do universo tenha ocorrido segundo o consensual modelo do Big-Bang, isto é, que o universo

tratando de um princípio potencial criador junto com Deus; que, por haver sido criada, Deus dela possuía um conceito, ou seja, a matéria teve na mente divina um modelo, portanto, uma essência; que, ademais, o tempo foi criado junto (simultaneamente) com a matéria[6]. Diversamente da interpretação comum da matéria como "pura potência", ou "pura indeterminação", ou ainda "ente absolutamente potencial", encontramos nos escritos de Tomás que a matéria (no caso, matéria prima ou protomatéria) é precisamente o *ente em* potência, pois, segundo Aquino, "o acidente, sendo forma, é um certo ato; porém a matéria [matéria prima], em si mesma, é ente em potência" (Aquino, 1980, Iª q. 46 ad. 3), ou, em outro lugar, ele diz "a matéria prima de algum modo é, porque é ente em potência" (1990, vol. 2 c. 16 n. 11) ou que,

> Se Deus produzisse um ente apenas em potência [absolutamente], Ele faria menos que a natureza, que produz entes em ato. Com efeito, a perfeição da ação depende mais do termo ao qual tende do que daquele do qual se origina; e o argumento [ao qual Aquino responde nesta objeção] implica uma *contradição* [grifo nosso], a saber, que algo possa ser produzido que seja pura potência, visto que o que é feito deve necessariamente ser desde que é como se prova no

---

não se prolongue na direção de um infinito passado, porém que tenha começado a existir há uns quatorze bilhões de anos, a singularidade inicial poderia muito bem ter permanecido "estável" indefinidamente, ou, como supõem alguns, tratar-se-ia de ciclos intermináveis (segundo uma direção que parece se realizaria numa espécie de 'meta-tempo') de expansão e contração, o que nos remeteria novamente ao argumento de Tomás. De qualquer forma, o universo teve um ser (*esse*) e este ser (*esse*) lhe foi dado desde fora (conceito de criação). Por outro lado, não lhe seria possível desse a si mesmo o princípio radical de sua razão de ser. Isto somente seria admissível num ser necessário (Deus), mas não nos seres que podem não ser ou ter sido.

[6] Para a simultaneidade a que nos referimos aqui: trata-se de um conceito filosófico (especificamente metafísico) e não um conceito atrelado e medições espaço-temporais, como advogado pela teoria da relatividade. Em princípio, dois eventos afastados entre si bilhões de anos-luz, por exemplo, podem ser simultâneos, ainda que jamais o sejam segundo medições efetuadas em diferentes sistemas de referência afastados entre si por intervalos do tipo do tipo espaço, ou seja, tecnicamente tipos de intervalo para os quais vale a desigualdade $ds^2 < 0$, em que ds^2 é o intervalo medido entre dois eventos no espaço-tempo, tratando-se, pois, do que se chama de invariante de Lorentz.

> livro VI da *Física*. E o que é puramente potencial não é pura e simplesmente (Aquino, 2014, q. 4 a. 2 sc. 3).

Em nosso ver, somente de um ponto de vista lógico haveria plausivelmente distinção entre um ente puramente (absolutamente) em potência e o não ser (nada). De um ponto de vista ontológico, não vemos como se possa distinguir uma matéria absolutamente potencial (*simpliciter*) do não ser. Desse modo, a protomatéria é o *ente em potência*, mas não absolutamente falando, ou seja, no sentido de uma pura potência (de um ente absolutamente potencial de um ponto de vista ontológico), pois então não se distinguiria do não ente, mas é pura potência relativamente ao recebimento de formas específicas ou determinantes, o que não implica ser desprovida absolutamente de toda forma, uma vez que o ente em potência tem ser, porquanto,

> Nas coisas que se relacionam entre si, sendo uma a causa do ser da outra, aquela que exerce a função de causa pode ter ser sem a outra, mas o contrário não vale. Ora, essa é a relação existente entre a matéria e a forma, pois a forma dá o ser à matéria. Por isso, é impossível à matéria ser sem alguma forma. (Aquino, 1981, c. 5 n. 48)

E, além disso, "a matéria, na produção primeira das coisas, existia sob as formas substanciais dos elementos" (Aquino, 1980, I[a] q. 74 a. 2 sol.), tendo sido concriado (o ente em potência) com o tempo, como afirma Tomás (I[a] q. 66 a. 4 sol.), o que por sua vez implica que a protomatéria tem essência, ainda que seja uma essência suigeneris, pois não é dada por formas especificadoras ou substanciais. Porque tem ser, porque é ente, a matéria opera (*operatio sequitur esse*) segundo sua natureza de ente em potência, pelo que tem aptidão indeterminada por formas especificadoras. Dado que a operação segue o ser, a protomatéria tem aptidão para o bem, isto é, para aquilo que lhe convém por natureza. E isso somente é possível se ela for dotada de caráter entitativo mínimo com o qual aspira a realizar o que lhe é próprio; afinal, como afirma Aquino (I[a] q. 5 a. 3 ad. 3), "a matéria prima, sendo ser potencial, também é bem potencial [pois] participa algo do bem, a saber, sua ordenação ou aptidão para o mesmo. E, por isso, não lhe convém o ser desejado, mas o desejar", uma vez que a operação segue o ser, e este tem forma, donde a protomatéria tem ser e forma. Ademais,

> [E] porque o ser segue a forma das coisas, elas existem quando possuem forma e deixam de existir quando privadas da forma. Deve, portanto, existir nelas algo que em um tempo possa receber a forma e, em outro tempo, possa ser privado dela: a esse algo denominamos matéria [protomatéria]. Por conseguinte, as coisas ínfimas entre as outras necessariamente se compõem de matéria e forma. (Aquino, 1977, c. 74)[7]

E tal potência é indeterminada, no sentido de que deve ser entendida como uma capacidade (potência) ou indiferença para receber quaisquer formas especificadoras. Ou seja, a protomatéria possuiu, então, em sua origem (ou em sua criação) o mínimo de caráter entitativo (ser em ato), pois foi informada por diversas formas elementares nas diversas partes de sua essência. As formas elementares emprestam à protomatéria seu caráter entitativo e compõem sua essência, pois é pela essência que a matéria recebe o *esse* (ato de ser, que é intensivo), bem como é pela essência ou forma que algo se assemelha a Deus (Cf. Fabro, 2015, p. 344-362). É pelo primado do ser que as criaturas participam de Deus. O ser é anterior a toda perfeição recebida. Desse modo, o ser entitativo (ser algo) é "o princípio de todos os princípios participados em todos os entes, ou como Aquino o expõe, o ser é a 'forma' participada por todas as coisas com respeito a sua subsistência e duração" (O'Rourke, 2005, p. 188ss). Dito de outro modo, temos uma *ratio* que define a

[7] Este trecho de Tomás nos sugere razoavelmente que, ao nos debruçarmos sobre os entes mais elementares tais como entidades subatômicas, por exemplo, fica aumentado o nível de indeterminação do ser, posto que nos aproximamos da indeterminação proveniente da matéria associada a formas cada vez mais elementares. Dito de outro modo: considerando a composição de matéria e forma (composição hilemórfica) dos entes elementares, a balança pende a favor da matéria; diversamente, quanto mais complexo o ser, é porque em sua composição hilemórfica há um grau imensamente maior de determinação do ente (número maior de propriedades espaço-temporais determinadas, de complexidade, auto-organização, etc.) em razão da intensidade do esse (ato de ser). Porém, disso trataremos em outro artigo futuro.

intensidade qualitativa com a qual o ato de ser (esse) é recebido nos entes, da maior à menor intensidade qualitativa: tanto o *esse* (ato de ser) como a forma ou natureza, e as operações ou atividades relativas. Veja-se que tais graus de participação implicam que a matéria possui caráter entitativo proporcional à sua forma, que não é única, mas disposta em diversas formas elementares, tal como o restante das criaturas naturais que dela recebem o caráter entitativo essencial de serem entes materiais. Pode-se mostrar a razão de proporcionalidade entre o primeiro e o segundo graus entitativos (respectivamente, *esse* e forma) num esquema que represente a proporção e a analogia dos entes:

$$\frac{\text{Esse (ato de ser) de X}}{\text{Essência de X}} = \frac{\text{Esse (ato de ser) de Y}}{\text{Essência de Y}}$$

Do mesmo modo como se mostra a proporção entre o segundo e o terceiro graus:

$$\frac{\text{Natureza de X}}{\text{Agir de X}} = \frac{\text{Natureza de Y}}{\text{Agir de Y}}$$

Raciocínios equivalentes se aplicariam a qualquer ente natural X em sua *ratio* entitativa com relação à matéria prima de que sua essência é constituída:

$$\frac{\text{Esse de X}}{\text{Essência de X}} = \frac{\text{Esse da matéria prima}}{\text{Essência da matéria prima}}$$

E, no caso mais dramático a que se refere Agostinho quando afirma que Deus criou algo (a matéria prima) tão distinto dele,

$$\frac{\text{Esse (ato puro) de Deus}}{\text{Essência (infinita) de Deus}} = \frac{\text{Esse (em potência) da matéria prima}}{\text{Essência (ínfima) da matéria prima}}$$

Como se pode observar, as razões de proporcionalidade acima nos mostram claramente a necessidade de imputarmos uma essência à protomatéria, sendo tal essência definida pelas formas elementares, que são formas imperfeitíssimas, visto que “as formas dos elementos são imperfeitíssimas, justamente por estarem, por natureza, mais próximas da matéria primeira" (Aquino, 2009c, n. 11). Igualmente afirma que

> com efeito, encontramos algumas formas ínfimas que não têm capacidade para operação alguma, senão para a qual se estendem as qualidades dispositivas da matéria, [...] como as formas elementares. Por isso, essas formas são absolutamente materiais e totalmente imersas na matéria (Aquino, 1990, vol. 2 c. 68 n. 5).

Há outros registros sobre tal imperfeição das formas elementares em (1980, Iª q. 76 a. 4 ad. 3), bem como que "as qualidades ativas e passivas dos elementos são contrárias entre si e susceptíveis de mais e de menos" (1990, vol.2 c.68 n.21), estando "presentes nos corpos mistos, mas não em ato, senão virtualmente" (1990, vol.2 c.68, n. 25). A virtude das formas elementares é dada participativamente pelo ato de ser (*esse*) intensivo, sendo qualitativamente deficientes quanto ao ser, porém capazes de tornarem minimamente inteligível o ser em potência da matéria, bem como torna-lo apto (apetecível) à extração (edução) das formas específicas dos entes corpóreos desde seu interior. Ademais, Tomás as denomina também de as "formas dos elementos", porquanto,

> Deve-se dizer, segundo Agostinho, [que] se denominam razões seminais todas as forças ativas e passivas estabelecidas em todas as criaturas por Deus, mediante as quais Ele coloca no ser os efeitos naturais; por isso, ele mesmo [Agostinho] afirma no Capítulo 9 Livro III do *De Trinitate* que "assim como as mães estão grávidas de seus fetos, assim também o mundo está grávido das causas de tudo que nasce", expondo o que antes havia dito com relação às razões seminais, as quais havia também denominado "forças e faculdades distribuídas às coisas"; e se chamavam razões seminais na medida em que nas causas ativas estão originalmente todos os efeitos como se fossem certas sementes. Não obstante se se entendem as razões seminais como incoações das formas, que estão na matéria primeira enquanto está em potência para todas as formas como pretendem alguns, se bem não concorda muito com as afirmações de Agostinho, pode sustentar-se que a sua simplicidade é devida à

> sua imperfeição, como também a matéria primeira é simples.[8]

Por conseguinte, as formas elementares ou elementos da corporeidade são estruturas que permitem a extensão espacial e a duração temporal, pois são as "razões seminais" de todas as coisas naturais. Por outro lado, a protomatéria teve seu início com o tempo, isto é, para Tomás, o tempo foi concriado com a protomatéria, ou dito de outro modo, sua criação foi simultânea à da protomatéria, assim como esta foi informada pelas diversas formas elementares em seu interior. Assim, uma tese central de Tomás de Aquino é que a protomatéria era desprovida de toda e qualquer forma especificadora, mas não absolutamente informe segundo sustentava Agostinho (1984, p. 363-366; 391-393), porém informada por diversas formas elementares em sua essência, visto que "a matéria não foi criada sob uma forma, mas sob diversas formas [elementares" (Aquino, 1980, Iª q. 66 a. 1 sol.). Não obstante a precedência da protomatéria à diversidade das formas corpóreas, isto não se deveu segundo uma sucessão temporal, pois o tempo, como duração, "é expresso pelas formas das coisas" (Agostinho, 1984, p. 393), tendo, portanto, início com a formação dos entes visto ele ser uma medida destes últimos; medida segundo a sucessão, ou segundo um antes e um depois no movimento, visto que

> é necessário concluir-se que, desde o princípio, imediatamente, houve algum movimento [...e] não se pode compreender o movimento sem o tempo, pois este não é senão a enumeração do anterior e do posterior no movimento (Aquino, 1980, Iª q. 66 a. 4 ad. 3).

Em suma, a protomatéria não foi criada absolutamente informe, porém informada (simultaneamente) por formas elementares:

> As diversas formas elementares estavam nas diversas partes da matéria que, todavia, foi dita ser informe porque ainda não havia recebido as formas dos corpos mistos, para as quais as formas dos elementos estavam

---

[8] Disponível em http://dhspriory.org/thomas/QDdeVer5.htm#9.

> em potência e porque os elementos ainda não estavam adequadamente situados para a produção de tais corpos, como já foi dito. [...] Se Deus produzisse um ser meramente potencial ele faria menos que a natureza a qual produz entes atuais. Ademais, envolve contradição seja produzido algo que é pura potencialidade, posto que o que foi produzido necessita ser, dado que é, e aquilo que é puramente potencial não é simplesmente. (Aquino, 2014, a. 1 ad. 13; ad. Agostinho n. 3).

Ou seja, o que é puramente potencial é não ser, o que parece contradizer expressamente o argumento de que a protomatéria seja algo puramente indeterminado entre o não-ser e o ser: a protomatéria tem ser, ainda que minimamente ser, este ultimo dado pelas formas elementares. Em Tomás de Aquino, a distinção numérica das formas ou dos indivíduos é dada pela matéria individuada,[9] e sua diversidade específica pela diversidade das formas, que não é causada pela matéria (1977, c. 71 n. 1). Em outros termos, a matéria individualiza as espécies, cada uma delas num sujeito. É justamente pela ausência de formas específicas que se caracteriza a protomatéria, e por isso pode encontrar-se difusa nos indivíduos, constituindo-se no sujeito (1980, Suplemento: Léxico, p. *111) comum de todas as mudanças, quer essenciais quer acidentais. No caso destas últimas, o sujeito da mudança é a matéria assinalada pelas dimensões ou matéria segunda.

Assim, com base em Aquino, podemos sustentar que as formas elementares que informaram a protomatéria no instante de sua criação não eram certas formas específicas possivelmente existentes. Ademais, nas formas elementares se encontravam as razões seminais de toda a diversidade e multiplicidade possível das formas corpóreas, segundo (Aquino, 2014, q. 4 a. 1 ad. 12), bem como na matéria

---

[9] Neste caso específico, retomamos a nomenclatura "matéria", pois esta é a matéria sobre a qual se debruça a ciência com vistas a elaborar conceitos como massa, energia, etc. Esta matéria que compõe cada ente individual, que se expande em configurações espaciais e se move em ritmos temporais, também se denomina "matéria segunda" por encontrar-se individuada em cada ente (em oposição à protomatéria, ou "matéria primeira" que se encontra difusa por todos os entes) segundo aquelas dimensões espaciais e obedecendo àqueles ritmos temporais.

> As qualidades ativas e passivas dos elementos são contrárias entre si e susceptíveis de mais e de menos [e por tais qualidades] se pode constituir uma qualidade intermediária [...] que é a qualidade própria do corpo misto [que possui uma forma substancial específica], conforme as diversas proporções da mescla; e esta qualidade [intermediária] é, na verdade, a própria disposição com relação à forma [específica] do corpo do misto. (Aquino, 2014, q. 4 a. 1 ad. 12)[10]

O que supõe que

> As qualidades ativas e passivas dos elementos são contrárias entre si e susceptíveis de mais e de menos [e por tais qualidades] se pode constituir uma qualidade intermediária [...] que é a qualidade própria do corpo misto [que possui uma forma substancial específica], conforme as diversas proporções da mescla; e esta qualidade [intermediária] é, na verdade, a própria disposição com relação à forma [específica] do corpo do misto. (Aquino, 2009c, n. 16).

Portanto, foi necessário existirem simultaneamente na protomatéria algumas formas (as elementares), mas não absolutamente todas, e que estas não poderiam ser formas específicas (porque eram formas elementares), ou como Tomás (2014, q. 4 a. 1 ad. 13) nos expõe, "a matéria [primeira] não careceu de toda forma, mas teve em suas diversas partes diversas formas elementares". Ora, tal diversidade de formas elementares no interior da protomatéria convinha à consecução das diversas formas específicas corpóreas, pois, segundo ele,

> As coisas, enquanto têm ser, têm também pluralidade e unidade, pois cada coisa enquanto é ser é também

---

[10] A mescla, ou misto, ou composto, em um sentido lato, pode tratar-se de átomos, como o Na (sódio) ou o Cl (cloro), por exemplo, como também de um misto de partículas; átomos, ou moléculas, como o NaCl (cloreto de sódio), tratando-se então, neste último caso, de uma mescla (composto) de átomos. Também se pode pensar no composto como uma mescla de partículas elementares, ou mesmo de uma única partícula elementar, uma vez que esta última é, por sua vez, um composto ou de outras partículas mais básicas do que ela, ou pura e simplesmente é um componente elementar do mundo, projetado no espaço-tempo após algum sequenciamento de mesclas de formas elementares, como veremos em seguida.

> una, mas não têm o ser da forma devido à matéria. Ao contrário, têm mais o ser da matéria devido às formas, pois o ato é melhor que a potência, porque aquilo pelo que uma coisa existe convém que seja melhor do que ela. Por isso, as formas não são diversas para que convenham a diversas matérias, mas as matérias são diversas para que convenham às diversas formas (1977, c. 71 n. 2).

Ademais, isso convinha à formação do mundo antes da sucessão temporal ela mesma, segundo Tomás, porquanto “foram impressas na matéria informe as formas elementares” (1980, Iª q. 69 a. 1 sol.). Daí que as formas que informaram a protomatéria ao início eram formas elementares e não específicas; além do mais, situavam-se mais proximamente à causa material do que propriamente à causa formal (1961, n. 1679). Assim, há razões para que Aquino supusesse que as formas que primeiramente informaram a protomatéria pertencessem ao grau ínfimo de perfeição das formas, na medida em que estariam mais próximas ao ser em potência da protomatéria (2009c, n. 9). Daí se poder propor que as formas elementares no interior da protomatéria tivessem dado origem às formas específicas mais elementares da estrutura do mundo: tanto o estado fundamental da geometria do mundo como os componentes estruturais que possibilitam nossa compreensão (epistemológica) acerca da matéria (“*matter*”): subpartículas, campos ou outras formas fundamentais que as podem descrever à medida que a ciência progride no rastreamento espaço-temporal das estruturas elementares da matéria pela via da experimentação.

Do exposto até aqui, há um aspecto conspícuo para nosso trabalho, a saber, que a protomatéria, enquanto ente em potência é fonte de edução (extração) de novas formas (específicas) a partir de interações que ocorrem entre as formas elementares no interior da protomatéria:

> Uma coisa ser eduzida de outra, significa que alguma coisa começa a existir, de tal modo que seja necessário um sujeito [a protomatéria, em nosso caso], no qual a referida coisa seja produzida e conservada; ou então, o que é a mesma coisa, edução é a ação que produz

> algo proveniente de um sujeito predisposto [a protomatéria]. [...] Ser eduzido da potência é tornar-se ato aquilo que antes estava em potência, o que depende da matéria, e se faz por um agente natural (Aquino, 1980, Suplemento: Léxico, p. *77).

Também não careceria haver um número infinito de formas elementares no interior da protomatéria, nem tampouco ser apenas uma única forma, uma vez que,

> Teríamos que admitir que esta única forma [forma elementar] informou de modo comum toda a matéria prima [protomatéria], enquanto que desta comunicabilidade sairia toda a diversidade e incomunicabilidade específicas [... desse modo] não foi apenas uma senão diversas formas elementares que informaram a matéria em diversas partes (Faitanin, 2001b, p. 47).

E, com respeito à informação da matéria primeira em suas diversas partes, argumenta Aquino:

> A matéria [primeira] tinha em diferentes partes diferentes formas elementares. [...] Todavia chamava-se matéria sem forma porque não tinha ainda advindo à matéria [prima] as formas dos corpos mistos [compostos], para as quais as formas elementares estão em potência, e a situação dos elementos não era ainda apta [não haviam ainda sido alterados em suas qualidades ativas e passivas] àquela geração (2014, q. 4 a. 1 ad. 13).

Um conceito relevante para a compreensão da presença da protomatéria na totalidade da natureza é o de comunicabilidade da essência. Não trataremos neste texto de desenvolver amiúde tal noção; basta indicar que ela significa aquilo na essência pelo qual um determinado ente, por exemplo uma partícula, mesmo que se constituindo num específico indivíduo (sujeito), que possui unidade, e que é distinto de todos os demais indivíduos, pode existir numa multiplicidade de sujeitos ou indivíduos. Há outras espécies que, uma vez individuadas, não são comunicáveis. Neste sentido, a protomatéria nem é princípio de individuação nem de incomunicabilidade da essência corpórea, ou seja, "por ser pura potência [não absolutamente, como vimos], é potencialmente comunicável, sendo sujeito de diversas formas" (Faitanin, 2001a, p. 227). Por outro lado, a comunicabilidade de uma essência significa que esta essência pode estar virtualmente numa outra como, por exemplo, a essência do elemento está virtualmente no ser do composto. Foi necessário Tomás propor que a protomatéria em sua origem fosse dotada de diversas partes com vistas a receber diversas formas específicas segundo essas diversas partes. Em nosso caso, como teremos oportunidade de expor, as diversas formas específicas são eduzidas a partir de movimentos e alterações das formas elementares nos diversos domínios (partes) da protomatéria.

Em nossa proposta, a localização das formas elementares no interior da matéria é potencial com relação ao ponto de projeção de uma forma específica que se origina pela mescla das primeiras. Cada combinação deve ser dinâmica e se estabelece numa sequência formal finita que dá origem à projeção da forma especificadora. O caráter potencial da protomatéria é precisamente representado por essa dinâmica de estados sequenciados prévios à projeção. O estado final projeta-se espaço-temporalmente – torna explícito, *unfolded*, para usar um termo de Bohm (1980, p.186-199) o que estava implícito (*enfolded*) no interior da protomatéria –, sendo essa projeção aquilo a que os escolásticos denominavam *edução*. Cada ente ou composto natural (trata-se de um composto de matéria e forma, como propõe Aristóteles) é, por conseguinte, uma projeção espaço-temporal do estado final de uma sequência finita de estados de formas elementares no interior da protomatéria. Mais adiante, proporemos um modelo algébrico que servirá para representar elementos dessa sequência. A representação do sequenciamento propriamente dito deverá seguir um processo de cadeias de Markov, porém esta etapa de representação do sequenciamento não será objeto deste trabalho, senão de um texto posterior. Por outro lado, a cada estado podemos associar uma localização no interior da protomatéria, de tal forma que,

> [É preciso esclarecer que] o estar potencial num lugar [localização] não significa que [as formas elementares] possuíram suas qualidades e propriedades em ato, porque este lugar [...] é potencial e se refere ao lugar onde se daria a geração dos compostos (Faitanin, 2001b, p. 51).

Além do mais,

> [As formas que informam a matéria prima não são iguais por natureza às dos compostos], pois se distinguem efetivamente segundo os graus de perfeição: as formas da matéria prima não são específicas porque as formas específicas são extraídas da essência da matéria prima e se diversificam especificamente umas das outras (Faitanin, 2001b, p. 51).

Ora, é necessário supor que as formas elementares mantêm suas qualidades ativas e passivas no interior da matéria primeira, e que as combinações que resultam de sua mescla[11] são potencialidades ativas para a edução das formas específicas dos compostos. No entanto, cada estado da sequência prepara a edução, que nada mais é do que uma operação de projeção no espaço-tempo de uma mescla de formas elementares. Por conseguinte, é fundamental a presença virtual dessa mescla no composto final eduzido, haja vista que tais mesclas significam uma espécie de memória dos vínculos ontológicos que os entes naturais armazenam no interior da protomatéria, vínculos que se encontram virtualmente presentes precisamente nos compostos, neles permanecendo de tal maneira a prover uma possível recombinação a partir de suas formas específicas.[12] Por outro lado,

[11] Uma mescla de elementos (formas elementares) no interior da protomatéria assemelha-se à mescla de formas específicas (por exemplo, partículas) que se combinam para formar os compostos (por exemplo, átomos). Obviamente, a mescla ou combinação no interior da protomatéria não envolve elementos que estejam em ato, mas sim em potência.

[12] Não obstante as formas elementares não possuírem caráter entitativo, como vimos, são dotadas de atividade por meio de suas qualidades ativas e passivas, que lhes asseguram estar em potência ativa no interior da protomatéria. Potência ativa é a capacidade de produzir efeito Um exemplo pode ser aduzido: cada subpartícula presente no átomo de sódio está associada a uma mescla específica no interior da

> O fato de que foram muitas as formas que informaram a matéria em sua origem não significa que foi um número infinito, senão um número de formas elementares em que se definisse potencialmente o número total das possíveis formas corpóreas que pudessem ser extraídas a partir de seus princípios elementares [...]. Tampouco poderia ser apenas uma única forma [que informou a protomatéria... nem] determinado o número de formas, que dela se pudessem eduzir. Neste sentido sua potência [da protomatéria] não poderia ser estritamente falando absolutamente finita, porque dela se eduz, efetivamente, uma diversidade ignorada de formas [...] E nossa ignorância do número de formas, que dela se podem extrair, tem a ver com a potencialidade da matéria [protomatéria] e não simplesmente com nosso conhecimento imperfeito. Se desconhecemos quão potencial é a matéria primeira em sua natureza[13], então não podemos determinar com exatidão o número de formas que dela se podem eduzir ou extrair (Faitanin, 2001a, p. 281-282).

É uma consequência natural do que foi visto até agora tratar a estrutura geométrica do espaço-tempo com seus aspectos topológico e métrico, quer em macro escala quer em microescala[14] como sendo ela mesma uma edução da protomatéria, edução fundamental como se poderia afirmar, dado que a edução das formas corpóreas específicas, mesmo as mais simples, subentenderia a presença de uma

---

protomatéria; do mesmo modo, isto se aplica a cada subpartícula no átomo de cloro. Por sua vez, a recombinação das subpartículas de ambos os átomos a partir de suas mesclas originais em uma nova mescla específica permite a edução do composto de cloreto de sódio.

[13] Eventualmente uma formulação estocástica para a edução de formas com base no sequenciamento das mesclas modelado por cadeias de Markov venha a ser investigada futuramente. Aqui nos propomos tão-somente, para fins deste trabalho, a sugerir uma formulação algébrica que poderá vir a ser estendida numa investigação posterior, de modo a permitir um tratamento de natureza estocástica para certos processos dinâmicos no interior da matéria.

[14] Refere-se à sua conformação topológica e métrica em comprimentos inferiores ao comprimento de Planck, a saber, a distâncias inferiores a 10^{-35} m.

topologia do espaço-tempo[15] que lhes está estreitamente unida; e ainda mais: sem essa topologia, que se constitui num estado fundamental do substrato, sequer seria possível a edução das formas específicas da corporeidade. Por conseguinte, pode-se afirmar que a toda edução de uma forma específica desde o interior do substrato está subentendida a presença simultânea de uma estrutura topológica e métrica espaço-temporal. Essa formulação resulta da tese tomista da concriação do tempo[16] com a protomatéria, que estabelece a condição prévia do sequenciamento dinâmico das formas elementares, bem como a existência deste sequenciamento como consequência do movimento e das várias mudanças e alterações das formas elementares no interior do substrato. Esta tese permite, por sua vez, que se possa sustentar que a mescla de formas elementares que se encontra em condição de ser projetada no espaço-tempo como uma forma específica tenha sido gerada previamente por sucessivas alterações dinâmicas daquelas formas no interior da protomatéria a partir de suas qualidades ativas e passivas.

Concluímos da exposição acima, com base na análise realizada até aqui sobre o estatuto ontológico do substrato ou protomatéria que:

a) O substrato (protomatéria) não é absolutamente informe, porém é ente em potência.

b) Simultâneo ao substrato com as formas elementares encontra-se o tempo.

c) O substrato é apto a receber uma quantidade indeterminada, mas não infinita, de formas específicas e diversas, de modo posterior e sucessivo.

d) Todas as formas naturais simples que são identificadas como estruturas fundamentais da matéria *qua* fenômeno (“*matter*”) foram eduzidas da potência da protomatéria.

---

[15] Que permite caracterizar a matéria distendida no espaço-tempo como sendo uma materia signata quantitate (matéria assinalada espaço-temporalmente, ou segundo certas dimensões quantitativas).

[16] Ontologicamente considerado, isto é, como medida da sucessão segundo o antes e depois, como vimos acima.

e) A edução de formas específicas da potência da protomatéria consiste numa sequência de estados (ou mesclas) de formas elementares na essência da protomatéria, estados que se estabelecem por meio das sucessivas alterações de qualidades no interior do substrato.

f) A protomatéria é o ente mais comunicável entre todos os entes naturais por sua essência encontrar-se, como ente em potência na essência de cada um. Portanto, as formas elementares que dão o mínimo *esse* à protomatéria são comunicáveis a todos os entes naturais. A razão da comunicabilidade da protomatéria e das formas elementares reside em que o grau mínimo de *esse* seja o de *ente em potência*. Se as formas elementares possuíssem alguma perfeição realizada em ato, ou seja, alguma perfeição especificada ou projetada em dimensões quantificadas no espaço-tempo, então elas seriam em si mesmas incomunicáveis.[17]

Os seis pontos perfilados acima se fundamentam em quatro razões pelas quais se justifica que o substrato (protomatéria) foi informado em sua essência por diversas (em número finito) formas elementares, segundo Aquino (1961, n. 795-798):[18]

1ª As formas elementares são, em razão de sua natureza elementar, *causa ex quo*, ou seja, causalidade material de todos os corpos.

2ª Além de causalidade material, as formas elementares são o princípio constitutivo primeiro de todos os corpos materiais.

---

[17] A incomunicabilidade de algo decorre do fato de este algo possuir alguma perfeição atual, p. ex., ao momento magnético dos férmions está associado seu spin, que é um número fracionário; ora, sendo algo já quantificado espaço-temporalmente, designa uma perfeição específica dos indivíduos fermiônicos. Na medida em que expressa, *sub rationis quantitate*, uma perfeição desses indivíduos, não está designada pelo mesmo valor a outro grupo de indivíduos, os bósons; estes últimos possuem momentos magnéticos associados a spins inteiros.

[18] Pequenas diferenças na exposição dessas razões entre nosso texto e o de Tomás no comentário à Metafísica de Aristóteles residem mais na terminologia: forma elementar por elementum, e protomatéria (ou substrato) por materia prima.

3ª As formas elementares são intrínsecas às essências das coisas corpóreas, visto que devem permanecer presentes intrinsecamente nas essências das coisas das quais são elementos constitutivos.

4ª Cada forma elementar possui uma determinação que lhe é própria, isto é, possui um dado caráter elementar, com perfeição própria, pelo qual difere de outra forma na essência da protomatéria.

Devemos aduzir algumas considerações necessárias acerca da natureza[19] da protomatéria. Em primeiro lugar, a protomatéria não é um ente de razão, pois se ela possui caráter entitativo, então se trata de ente real, ainda que *ente em potência*, e que tem o *esse* pelas formas elementares em seu interior. Poder-se-ia pensar então que, dado o caráter entitativo sui generis da protomatéria, o conceito que dela temos seria dado tão-somente por um universal ou mesmo um nome que a ela se referisse, não obstante ser destituída de toda e qualquer forma. Ora, é pela forma que vem a inteligibilidade. Se, neste caso, não houver absolutamente qualquer forma, então não há qualquer inteligibilidade intrínseca ao ente em potência, acarretando uma espécie de nominalismo epistemológico, pois o universal não se referiria a nenhuma fonte real de inteligibilidade, porém designaria pelo nome "matéria prima" algo pelo qual apenas formalmente denotamos uma modalidade da realidade que nem é nem não é.[20] Muitos parecem pensar dessa forma, como Gill (1992). No entanto, não se trata de um conceito puramente formal a ser predicado de muitos ou de um. A protomatéria é sujeito comum (substrato), como visto, de todos os entes naturais, pois está em potência para receber as diversas formas específicas das coisas corpóreas; daí que as formas

[19] Conquanto se tome usualmente essência e natureza por sinônimos, cabe fazer uma distinção relevante aqui: natureza é aquilo pelo qual um certo ente natural é ativo, opera, interage; essência é aquilo pelo qual um certo ente é estável, possui consistência, é o que é e não outra coisa. Trata-se de uma questão de perspectiva: se determinadas propriedades operativas são importantes de se considerar, então se trata da natureza da coisa; se determinadas propriedades definidoras são importantes de se considerar, então se trata da essência da coisa.

[20] A saber, se se tratasse de apenas formalmente denotar uma realidade de cujo esse nada se pudesse afirmar ou negar, seria equivalente a supor o mundo formaliter como inexplicável nos termos da ontologia védica.

elementares que informam a protomatéria não lhe atribuem qualquer caráter entitativo específico, não a determinam como um ente particular, pois de outra forma não poderia ser sujeito de todas as formas específicas corpóreas, e mesmo da forma do espaço-tempo, na medida em que este é extraído da protomatéria em simultâneo com as formas específicas, que se encontram "distendidas" no mesmo espaço-tempo. Os escolásticos propuseram uma terminologia adequada para designar a diferença essencial entre a protomatéria, ente real, concreto, mas não específico, e a matéria comum, ou inteligível, universal, ente teórico[21] que nos permite reconstruir racionalmente a estrutura física do real, rastreada pela ciência experimental. A protomatéria é *materia ex-qua*, a saber, sujeito comum (substrato) *a partir do qual* são projetadas no espaço-tempo (conceito que reconstrói racionalmente o estado fundamental da matéria primeira que torna possível a existência corpórea num lugar e num tempo) as formas específicas. Por outro lado, a matéria inteligida pela ciência nos entes naturais é *materia in-qua*, a saber, um universal que especifica aquilo que já se encontra projetado no espaço-tempo em determinadas dimensões quantitativas (Faitanin, 2001b, p. 82-85).

Por outro lado, deve-se ter em conta que a protomatéria, sujeito comum da geração e da corrupção, nunca se apresenta sem estar associada a alguma forma (Aquino, 2009b, c.1 n.14). Portanto, a protomatéria, por estar despojada de formas específicas, não é em si mesma cognoscível,[22] a não ser por meio de uma forma especificadora; daí que Tomás afirma ser "necessário conhecer primeiro a forma e por meio dela investigar a natureza da matéria" (Aquino, 2009b, c. 2 n. 9). Por isso, na proposta de uma álgebra que possa representar os aspectos ontológicos da protomatéria deverá haver recurso frequente à inteligibilidade das formas (elementares) que são co-princípio, junto com a protomatéria, da natureza dos entes reais. Decorre que para a formulação de um modelo algébrico com

[21] Como o são as supercordas, ou o campo gravitacional, ou os *worm holes* da gravitação quântica.

[22] Ou seja, não é cognoscível absolutamente, *simpliciter*, mas o é relativamente.

essa finalidade é fundamental explicar as estruturas mais elementares do mundo[23] como possuindo uma composição hilemórfica, pois elas são o resultado da composição de protomatéria e de uma forma substancial específica que lhes permite possuírem dimensões espaço-temporais e "existirem aqui e agora, na medida em que são demonstráveis aos sentidos [ou a nossos dispositivos de medição]" (Aquino, 2009b, c.3 n. 12). Porque, segundo Tomás, "é impossível que a forma seja recebida na matéria sem que se constitua o corpo [...] cuja marca são as dimensões elas mesmas" (Aquino, 2009b, c.3 n. 12). Como entende então Aquino que os entes naturais venham a ser gerados fisicamente, segundo uma linha de causalidade material, a partir da protomatéria? Uma primeira observação que nos faz o autor é a de que qualquer transformação que ocorre na natureza não altera a essência da protomatéria, pois quando se considera que esta última é o sujeito comum de todas as mudanças substanciais, este sujeito comum, isto é, a protomatéria, permanece em si mesma (em sua essência) inalterada, e por isso é possível mudanças na natureza, epistemologicamente abordadas por meio de mecanismos explicativos que são formulados através de padrões e de leis naturais. O fato de haver esses padrões e leis naturais permite a abordagem epistemológica dos fenômenos naturais e o estabelecimento de relações de causa e efeito, porque há um sujeito que não se altera nas interações que ocorrem na natureza, e que funciona como um tipo de princípio de conservação metafísico, subjacente às interações.

Além disso, Aquino entende que o ente natural (ou composto) é "o resultado da mutação da matéria para a forma que ela possuía em potência" (Aquino, 2009b, c. 5 n. 6), e que tal mutação ocorre segundo uma direcionalidade presente na natureza, isto é, que há aspectos teleológicos, segundo uma perspectiva de causalidade

[23] Não obstante este raciocínio aplicar-se *mutatis mutandi* aos demais entes presentes na natureza, não importa o quão complexos eles sejam do ponto de vista de sua composição, enfocaremos, em nosso estudo, os entes "mínimos", a saber, aqueles que se constituem, sob o ponto de vista da ciência experimental, como a estrutura fundamental da matéria.

final, [24] mediante os quais todos os entes criados, incluindo a protomatéria, atuam na direção de seu auto aperfeiçoamento, a saber, na direção de buscar realizar uma perfeição que ainda não possuem atualmente. A protomatéria possui igualmente uma potência, e uma potência extraordinária, máxima, justamente por ser ente em potência, que "se refere à sua perfeição própria [atingida] por meio da forma [substancial] e da diversidade das partes que constituem o composto [o ente natural]" (Aquino, 2009b, c. 5 n. 15-16). Por conseguinte, a protomatéria está dotada de uma amplitude potencial máxima, abarcando simultaneamente todas as formas, quer as elementares, quer as especificadoras, que são as formas substanciais dos entes naturais a serem eduzidas por algum agente suficiente.[25] Ademais, a protomatéria não é dotada de qualquer tipo de diversidade que se estabeleça por meio de dimensões como, por exemplo, alguma "distância" mensurável entre quaisquer das formas elementares em seu interior, ou algum tipo de disposição e configuração espacial das mesmas, etc. Isso decorre de nossa proposta de a estrutura espaço-temporal do mundo ser, ela mesma, um estado fundamental eduzido da protomatéria, pela qual as mesclas de formas elementares já estão dotadas de propriedades mensuráveis quando projetadas no estado fundamental. Entendemos que isto é, ademais, corroborado pelos seguintes textos:

> O fato de que diversas formas podem ser recebidas, simultaneamente na matéria, como são as quatro formas elementares [26] e as diversas formas dos compostos, ocorre a partir da amplitude proporcional

[24] Que não será abordada especificamente neste trabalho por não contribuir de forma relevante para os objetivos que temos em vista.

[25] Novamente: com vistas aos objetivos deste trabalho, não cabe investigar a natureza desses agentes suficientes que eduzem da potência da protomatéria as formas específicas, mas tão-somente propor um mecanismo suficiente para sua edução.

[26] Tomás segue Aristóteles no que se refere à existência de quatro elementos que compõem a causalidade material dos entes naturais: ar, terra, fogo e água; no entanto, o Aquinate nos chama a atenção para o fato de que não é enquanto entes específicos, substâncias, como pensavam os antigos físicos pré-socráticos, que estes elementos estão na essência da protomatéria, mas enquanto formas elementares, ou seja, não específicas.

> da própria matéria com respeito a suas formas e não por causa de alguma diversidade que preexistisse na matéria em razão de alguma quantidade. Donde se pode concluir que para a recepção das diversas formas não é necessário que preexista na matéria alguma diversidade de partes, porém é necessário que lhe suceda [à recepção das formas], e isso porque a introdução de diversas formas é a geração de diversos compostos, possuidores de diversas partes, tal como já dito (Aquino, 2009b, c. 5 n. 15-16).

> [Os antigos físicos] ensinavam ser a matéria prima algum corpo em ato, como o fogo, o ar, a água ou um corpo médio. Donde resultaria que o vir-a-ser não seria senão o alterar-se. Porque essa forma precedente, dando o ser atual, no gênero da substância, e tornando o ser tal e não tal outro resultaria que a forma superveniente [específica] não causaria simplesmente o ser atual, mas um ser atual, o que é próprio à forma acidental; e portanto as formas seguintes seriam acidentes, em relação aos quais não há geração, mas alteração. Portanto, deve-se dizer que a matéria prima nem foi criada completamente sem forma, nem com forma comum, senão com formas distintas [as formas elementares] (Aquino, 1980, Iª q. 66 a. 1 sol.).

A saber, na edução já há composição simultânea[27] de matéria e forma específica de que resultam os diversos entes naturais. A partir de então, com a forma natural projetada no espaço-tempo, temos partes quantificadas, ou seja, os entes elementares que constituem a estrutura epistemológica fundamental da matéria assinalada[28] já possuem existência quantificada espaço-temporalmente, situando-se

---

[27] A simultaneidade a que nos estamos referindo não está sujeita à relatividade de referenciais; trata-se de uma simultaneidade “metafísica” e não “física”; esta última, sim, está sujeita aos postulados relativistas e sujeita à localidade espaço-temporal.

[28] Não estamos particularmente preocupados se a tratativa presente ou futura fornecida pela física penderá numa direção (partículas) ou noutra (campos), ou noutras ainda em desenvolvimento (cordas, membranas, etc.), ou ainda como uma composição delas. Em quaisquer dos casos, a análise empírica da realidade, conquanto qualquer teoria bem-sucedida experimentalmente aceita pela comunidade científica implica algum tipo de composição da qual emerja a corporeidade, e esta corporeidade se nos apresenta como um fenômeno espaço-temporal.

em algum "lugar" segundo a topologia local do espaço-tempo, além de lhes estarem associadas propriedades mensuráveis tais como massa, momento magnético, carga, energia cinética etc. Por outro lado, as formas naturais não são inseridas desde o exterior, ou seja, desde fora da protomatéria, mas são eduzidas de sua potencialidade, como vimos, pois,

> As formas não são dadas a partir de fora, senão extraídas da potência da matéria, por meio de uma transmutação própria [...] e é impossível pôr na matéria qualquer divisão prévia à forma substancial, pois a introdução da forma substancial é a geração do próprio composto [mescla das forma elementares], o único que essencialmente possui partes (Aquino, 2009b, c. 5 n. 14-18).

Por fim, uma última consideração se faz necessária. Existem há séculos outras propostas quanto à presença de um substrato material universal, desde a antiguidade até a modernidade; desde o *ápeiron* de Anaximandro até a *res extensa* cartesiana. Por várias razões, que não pretendemos expor detalhadamente aqui, porque seria objeto demasiado longo e merecedor de um texto mais abrangente, tais propostas ficam deslocadas com respeito ao nosso objetivo. O *ápeiron*, por exemplo, demandaria eventualmente uma álgebra com infinitos geradores em razão do ilimitado qualitativo expresso por este substrato, além de outras dificuldades inerentes que não discutiremos aqui. Alguns autores como Solmsen (1960, p. 328) entendem por sua vez, com respeito ao pensamento de Anaximandro sobre o *ápeiron*, "ser duvidoso se ele [Anaximandro] ou algum de seus antecessores realmente precisassem do Infinito [sic] como uma fonte inesgotável de suprimento [material]". Porém, em contrário a Solmsen, Kahn afirma ser o *ápeiron*,

> Primariamente uma massa imensa e inexaurível que se estende sem fim em todas as direções. Possui o epíteto (e a majestade) que possuem a terra e o mar para Homero. Vemos de roldão porque se requer tal fonte para a manutenção do mundo, 'de modo a não cessar a geração das coisas' (Arist. *Ph.* 207a19-20) [...] O Ilimitado [sic] é de fato o que chamamos de espaço

> infinito, o antecedente do vazio atomista, bem como do Receptáculo ou Nutriz da geração no *Timeu* de Platão (Kahn, 1985, p. 233).

Dada a extensa argumentação fornecida por Kahn (1985, p. 231-239) em favor do caráter infinito ou ilimitado expresso pelo *ápeiron*, a despeito da observação de Solmsen (1960, p. 328), que parece fundamentar-se em outro autor (Cherniss, 1935, p.21), preferimos ficar com a tradição interpretativa representada por Kahn e tomar o *ápeiron* como o Infinito ou Ilimitado, requerendo, pois, um tipo de abordagem algébrica distinta daquela que estamos presentemente a propor neste trabalho.

Por sua vez, com respeito à *res extensa* de Descartes, trata-se de uma massa ou matéria já projetada no espaço e no tempo, dotada de distância e quantidade de movimento, os quais não caracterizam um pré-espaço, mas sim um espaço propriamente dito, dotado de métrica e de outras características geométricas. Ademais, entes componentes da extensão cartesiana como os vórtices já possuem determinações quantitativas tais como velocidade e direção, por exemplo, podendo ser modelados por vetores geométricos. A matéria cartesiana já é ela mesma um espaço vetorial dotado de propriedades métricas. Ora, o que caracterizará o substrato aristotélico (ou a protomatéria de Tomás) é precisamente sua anterioridade a qualquer determinação métrica ou geométrica. Vejamos em seguida como se pode representa-lo por meio de um dispositivo algébrico apropriado.

2. Fundamentos algébricos da edução da geometria e do movimento no espaço-tempo

Existe literatura bastante detalhada sobre a relevância da geometria para a física, incluindo o apanhado de propostas de pré-geometrias (Meschini, 2006). Uma pré-geometria é uma tentativa de se fundar a geometria do espaço-tempo em entidades ontologicamente anteriores a este último, constituindo-se em algo essencialmente distinto e novo (Meschini, 2006). No entanto, gostaríamos de marcar uma evidente diferença entre o que, em nosso caso, poderia parecer mais uma proposta de pré-geometria e demais propostas existentes. Trata-se da distinção entre o metafísico e o empiriológico. Novamente, entendemos haver certo emaranhamento conceitual, a saber, que o significado que se tem emprestado ao termo "ontologia" não é o mesmo que sustentamos no presente trabalho, pois, em nossa exposição, "ontológico" possui o mesmo significado que "metafísico", ou seja, descreve certa estrutura do real sem apoio a algum intermediário fictício livremente criado pelo espírito humano, mas por meio do qual essa estrutura seja atingida em sua própria compleição interior. Não é o caso de se proporem objetos que *representem* a realidade, ou objetos que a ela *se refiram*, o que desde já chamamos de perspectiva empiriológica ou perspectiva que mescla elementos criados pelo espírito humano (certos entes teóricos que subsistem nas teorias) com a base empírica (singulares e fatos empíricos). Ao contrário, uma perspectiva metafísica deve conter os princípios últimos da realidade natural e, por conseguinte, qualquer estrutura teórica que a *represente* está, desde o início, mais capacitada e investida de alcance (lógico-)ontológico do que propostas baseadas em análises puramente empiriológicas, a saber, por abordagens existentes com o concurso exclusivo da matemática e da experimentação. Devemos acrescentar que tal distinção aplica-se igualmente ao conceito de espaço-tempo. Ou seja, espaço-tempo é um conceito de natureza empiriológica, não possuindo alcance ontológico, a não ser de forma *indireta*, ou *oblíqua*, na medida em que se refere a certas dimensões quantitativas (extensão e mutabilidade) da materialidade, cuja existência é simultânea à extensão e à duração. Consideramos como hipótese bastante plausível que a *duração* e a *extensão* são elementos ontológicos da matéria, em especial do *substrato* ou *proté hylé*,

> Precisamente o ultimo sujeito subjacente, comum a todas as coisas da Natureza, e pressuposto como seu constituinte substantivo, não acidental. E ainda, a destruição de uma coisa significa o desaparecimento de tudo o que a constitui, exceto aquele mesmo sujeito subjacente cuja existência ela pressupõe, e que, se desaparecesse, então a coisa mesmo que o pressupõe

> teria desaparecido com ele antecipadamente, antes mesmo de existir (Arist. *Ph.* 192a26-35).

Foram apresentadas algumas análises contemporâneas relevantes sobre o conceito de substrato ou matéria prima em diversas ocasiões, por exemplo em Solmsen (1960), Sokolowski (1970), Graham (1987), Byrne (1995) e Bostock (2006), e a tendência geral é a tese que sustém que a matéria prima desempenha um papel decisivo enquanto se pode considerá-la como o constituinte último do mundo físico. Embora tenham sido expostas diversas perspectivas quanto ao tipo de *coisa* que a matéria é, quer seja algo físico ou metafísico, há pouca diferença quanto a ambas no que se refere ao papel desempenhado pela matéria na geração e no desaparecimento dos entes. Segundo Aristóteles, a matéria prima é o sujeito último subjacente, comum a todas os entes naturais. O propósito deste artigo não é empreender uma discussão filosófica acerca dos aspectos multíplices do conceito que Aristóteles tem da matéria prima, porém o de mostrar que seus *insights* podem ser desenvolvidos a partir de elementos algébricos que foram introduzidos no final do século XIX e desenvolvidos em meados do século passado. A associação desses conceitos algébricos com uma compreensão ulterior da proposta aristotélica deverá possibilitar a apresentação de uma estrutura algébrica candidata a representar essa mesma proposta, muitas vezes objeto de controvérsia e em outras tantas tida por obscura. No entanto, se pode concluir que, não obstante a extrema dificuldade de conceptualização, o substrato compõe-se de certos elementos ontológicos que perfazem as dimensões metafísicas da quantidade, bem como são o fundamento ontológico da apreensão empiriológica assimilada ao conceito de espaço-tempo. Graças às dimensões metafísicas da extensão e da mutação (ou duração), se pode representar uma dinâmica própria associada a esses elementos no interior do substrato, dinâmica que viabilizaria a *edução* dos tipos ou espécies naturais.

Assim, o espaço-tempo não é *algo* com estatuto autônomo, algum tipo *específico* de entidade, segundo uma perspectiva ontológica, mas, sim, algo objectualizado por um conceito de origem empiriológica, sendo este objeto fundamental para a descrição das leis da física, especialmente da teoria da relatividade, tanto a restrita como a geral (gravitação). Em certo sentido, o espaço-tempo é um conceito *absoluto*, ou seja, é um *invariante empiriológico* que subjaz às demais entidades e que permite a descrição das leis da física, desempenhando um papel dinâmico na descrição de nosso universo em evolução. [29] Diz-se dinâmico porque na antiga perspectiva newtoniana e na vigente perspectiva da teoria restrita da relatividade, o espaço, na primeira, e o espaço-tempo, na segunda, são elementos imutáveis, servindo como referencial absoluto para o movimento, tanto uniforme como acelerado. Contudo, na teoria geral da relatividade, o espaço-tempo não é imutável, pois responde à presença de massa-energia, dobrando-se e curvando-se num campo gravitacional. Quer se proponha uma perspectiva ou a outra, estática ou dinâmica, a geometria do espaço-tempo é o pano de fundo da abordagem empiriológica oferecida pela física. Assim, cabe-nos prover, a partir de uma proposta algébrica apropriada, um mecanismo[30] de extração de elementos geométricos a partir de outros não geométricos, sendo os primeiros fundamentais para o empreendimento científico, e os segundos fundamentais para a compreensão da totalidade da natureza.

---

[29] O termo "evolução" está contemporaneamente dotado de reverberações darwinistas, aliado a certa perspectiva ensejada pela teoria biológica correspondente. No entanto, neste trabalho, o termo pretende denotar tão-somente um desenvolvimento temporal das coisas, um desabrochar de entidades, processos e eventos espaço-temporalmente situados, com gênese em estruturas prévias não necessariamente transmutadas ou transformadas a partir de espécies que *evoluem* em contrapartes de um tipo específico distinto delas mesmas através de um mecanismo não dirigido ou aleatório, como se deseje chamar. Este assunto é muito abrangente e de grande complexidade por envolver multi ou trans-disciplinaridade, não estando no escopo do presente texto. Quisemos apenas situar a questão com o intuito de se evitarem interpretações de algum tipo específico.

[30] É fato que o termo "mecanismo" não se apresenta com bons antecedentes em razão de sua possível associação com a filosofia do mecanicismo. No entanto, em nosso caso, o termo significa apenas um procedimento sistemático e consistente aplicável numa determinada instância. Ou seja, trata-se de um procedimento recorrente que aplicamos na álgebra por meio de operadores, os quais permitem *extrair* (que preferimos neste trabalho substituir por um termo mais técnico, *eduzir*) consistentemente os componentes usuais da descrição geométrica dos fenômenos.

Devemos a formulação que se segue ao trabalho extraordinário de Philip Davies (1981), que em sua tese de doutorado pela Universidade de Londres propôs um modelo algébrico para a mecânica quântica, baseado num caso específico de álgebras de Clifford (Vaz e Rocha Jr., 2012): a álgebra de Weyl (1949). Seguimos de modo geral a proposta algébrica de Davies, simplificando e readaptando-a, bem como reinterpretando os elementos e as operações da álgebra de modo a fazê-los isomorfos, *ex hypothesi*, à estrutura metafísica do substrato ou matéria prima.

2.1. Conceitos algébricos, álgebras de Clifford e de Weyl, e conexão entre álgebra e protomatéria.

Nesta seção, suporemos conhecidas as noções e operações elementares de conjuntos, relações e aplicações (funções). Seja uma aplicação $\varphi: S\times S \to S$. A partir de um par de elementos $s_1, s_2 \in S$, formamos um novo elemento $\varphi(s_1, s_2) = s_1 \cdot s_2 = s_1 s_2 \in S$ chamado de *produto de* s_1 e s_2; então, estabelecemos uma ou mais leis de composição, inclusive aquelas entre membros de diferentes conjuntos, por exemplo, $\varphi: S\times T \to S$. Uma composição é chamada *comutativa* se $s_1 s_2 = s_2 s_1$. A composição é chamada *associativa* se, dados $s_1, s_2, s_3 \in S$, então $s_1(s_2 s_3) = (s_1 s_2) s_3$.

Um *grupo* é um conjunto *S* de elementos, dotado de uma operação que funciona como uma lei de composição que associa cada par de elementos s_1, s_2 de *S* a um elemento $s_1 s_2$ de *S* chamado de *produto* de s_1 e s_2, que satisfaz às seguintes condições:

(i) vale a *lei associativa* $s_1\left(s_2 s_3\right) = \left(s_1 s_2\right) s_3$

(ii) $\exists\, e$ (unidade), pertencente ao conjunto *S*, tal que $e s_i = s_i e,\ \ \forall s_i \in S$

(iii) todo elemento $s_i \in S$ possui um inverso $s_i^{-1} \in S$ tal que $s_i^{-1} s_i = s_i s_i^{-1} = e$

Por sua vez, um *corpo* é um conjunto K de elementos, dotado de duas operações, uma usualmente chamada de *adição*, que associa a cada par de elementos a,b de K um elemento $a+b$ de K, e a outra, uma operação que funciona como uma lei de composição, chamada usualmente de *multiplicação*, que associa a cada par de elementos a,b de K um elemento ab de K chamado de *produto* de a e b, as quais satisfazem às seguintes condições:

(i) a adição é comutativa: $a+b=b+a$ para $\forall a,b \in K$

(ii) a adição é associativa: $a+(b+c)=(a+b)+c$ para $\forall a,b,c \in K$

(iii) Há um único elemento chamado *zero*, 0, pertencente ao conjunto K tal que $a + 0 = a \quad \forall a \in K$

(iv) $\exists(-a)$, único, pertencente ao conjunto K tal que $a+(-a)=0, \quad \forall a \in K$

(v) a multiplicação é comutativa: $ab=ba \quad \forall a,b \in K$

(vi) a multiplicação é associativa: $a(bc)=(ab)c \quad \forall a,b,c \in K$

(vii) Há um único elemento chamado *unidade*, 1, pertencente ao conjunto K tal que $a1 = a \quad \forall a \in K$

(viii) $\forall a \in K, a \neq 0, \ \exists a^{-1}$,único, pertencente ao conjunto K tal que $aa^{-1}=1$

(ix) a multiplicação distribui-se relativamente à adição, ou seja, $a(b+c)=ab+ac \quad \forall a,b,c \in K$

L é um espaço vetorial (ou linear), isto é, um conjunto de objetos que chamamos de vetores, associado a outro conjunto de elementos K que chamamos de corpo escalar, se em L pudermos definir duas operações, chamadas respectivamente de *soma* de vetores e de *multiplicação* por escalar, de tal forma que

(i) $u+v=v+u \quad \forall u,v \in L$

(ii) $u+(v+w)=(u+v)+w \quad \forall u,v,w \in L$

(iii) $(au+v)b=((ab)u+bv) \quad \forall u,v\in L \quad \forall a,b\in K$

Se V e W são dois espaços vetoriais sobre um mesmo corpo K de escalares, então se diz que uma aplicação A é linear ou um *homomorfismo* de V em W se

$$A(au+bv)=aAu+bAv=au'+bv' \quad \forall a,b\in K \quad \forall u,v\in V \quad \forall u',v'\in W$$

Se a aplicação A é um-a-um e sobrejetora, então se diz que A é um *isomorfismo* de V em W; e se o isomorfismo for uma aplicação do espaço sobre si próprio, então temos um *automorfismo*.

Uma álgebra associativa A é um espaço vetorial linear sobre um corpo K de escalares, que apresenta uma lei de composição de seus elementos ou *produto*, de tal forma que, para certo conjunto de índices Λ, e $i, j \in \Lambda$,

(i) $\alpha_i\alpha_j \in A, \quad \alpha_i,\alpha_j \in A,$ (fechamento do produto)

(ii) $(a\alpha_i+b\alpha_j)\alpha_k = a(\alpha_i\alpha_k)+b(\alpha_j\alpha_k), \quad \alpha_i,\alpha_j,\alpha_k \in A, \quad a,b\in K$
(distributividade à esquerda e multiplicação por escalar)

(iii) $\alpha_i(a\alpha_j+b\alpha_k) = a(\alpha_i\alpha_j)+b(\alpha_i\alpha_k), \quad \alpha_i,\alpha_j,\alpha_k \in A, \quad a,b\in K$
(distributividade à direita e multiplicação por escalar)

(iv) $\alpha_i(\alpha_j\alpha_k) = (\alpha_i\alpha_j)\alpha_k, \quad \alpha_i,\alpha_j,\alpha_k \in A,$ (associatividade do produto)

Um isomorfismo da álgebra A sobre si mesma chama-se um *automorfismo* de A.

2.1.1. Idempotentes

Álgebras que se apresentam com relativa complexidade contêm um conjunto completo de elementos capazes de gerar todos os demais elementos da álgebra, denominados *idempotentes primitivos* α_j, tais que

$$\alpha_j\alpha_j = \alpha_j^2 = \alpha_j$$

Há vários modos de se entender o significado de tais elementos:

1) Eles refletiriam a tradicional dualidade do *verdadeiro* e do *falso*, pois se associarmos certos α_i ao valor V e certos α_j com o valor F, então o valor da operação de conjunção nos conduz à tradicional tabela de valores-verdade, para cuja contrapartida aritmética *1* representa o valor V (verdadeiro) e *0* o valor F (falso), então temos que, para qualquer α_i, designado por A, que pode ser verdadeiro ou falso, isto é, *1* ou *0*, e nenhum outro valor intermediário, ou seja, vale a *lei do terceiro excluído*, então significa dizer que esta lei pode ser representada pela solução da equação

$$A(A-1)=0$$

Em que A pode somente assumir valores *1* ou *0*. Ora, $A(A-1)=0$ pode ser representada por

$$A^2 - A = 0, \quad \text{ou} \;\; A^2 = A$$

Sendo esta última forma a da relação que define essencialmente um idempotente da álgebra.

2) eles significariam algum tipo de filtro que serviria para separar naturalmente conjuntos específicos de elementos. Weyl (1949, p. 255) exemplifica isso da seguinte maneira: Seja o conjunto dos animais num zoológico. Por meio de um determinado operador M, separamos (ou filtramos) os mamíferos dos outros animais, e por um outro operador P separamos os peixes. Claro, a repetição do operador M será equivalente a M, do mesmo modo que a repetição de P será equivalente a P, donde,

$$M.M = M$$
$$P.P = P$$

Visto que as classes são mutuamente excludentes, então,

$$M.P = P.M = 0$$

Ou seja, um conjunto total de operadores deste tipo pode ser utilizado para distinguir um número maximal de conjuntos de elementos mutuamente excludentes, de tal modo que não possa haver elementos comuns a dois conjuntos distintos.

3) haveria ainda, adicionalmente, outro modo de considerarmos tais quantidades: elas funcionariam como operadores de projeção sobre um espaço vetorial linear *n*-dimensional. Isto é, tomando-se o operador α_1 como sendo um operador de projeção do espaço vetorial base, qualquer elemento (vetor) *x* neste espaço vetorial pode ser projetado no espaço euclidiano tridimensional $\mathbb{R}^3$, do seguinte modo: Seja a projeção de algum elemento *x* qualquer do espaço vetorial tal que α_1 o projetaria no plano $\mathbb{R}^2$ e α_2 no espaço ortogonal ao plano, isto é, no eixo ortogonal $\mathbb{R}$. Então,

$$\alpha_1\alpha_1 = \alpha_1$$

$$\alpha_2\alpha_2 = \alpha_2$$

$$\alpha_1\alpha_2 = \alpha_2\alpha_1 = 0$$

Assim, o espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$ é a soma direta (soma de espaços que não possuem elementos comuns, exceto o subespaço nulo {0}) dos subespaços $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}$, representada por

$$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{R}$$

Em geral, os idempotentes têm o papel de separar um "espaço" original *n*-dimensional em subespaços euclidianos mutuamente ortogonais. Um elemento qualquer *x* do espaço original pode ser projetado da maneira mais reduzida (em termos dos graus das dimensões de projeção) possível em subespaços euclidianos unidimensionais, mutuamente ortogonais, do seguinte modo:

$$\alpha_1 x + \alpha_2 x + \ldots + \alpha_n x$$

Todavia, designando a operação acima por Ω, tem-se que

$$\Omega x = \alpha_1 x + \alpha_2 x + \ldots + \alpha_n x = \vec{x}$$

Em que $\vec{x}$ é a projeção de x no espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$. Também temos que

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = 1, \quad 1 \in \mathbb{R}^n$$

O que equivale à projeção da totalidade (do espaço original) sobre o espaço vetorial. Enfim, os idempotentes da álgebra desempenham um papel de máxima importância na análise de qualquer espaço vetorial linear associado. Particularmente, em mecânica quântica, espaços vetoriais lineares desempenham esse papel essencial na medida em que seus componentes básicos são utilizados para representar os diversos estados dinâmicos de um determinado sistema físico.

2.1.2. Ideais

Vimos acima que aos idempotentes se podem associar projeções num espaço vetorial linear. Bem, todas as álgebras possuem estruturas associadas de espaços vetoriais. Os espaços particularmente interessantes para nosso estudo são aqueles que são subespaços invariantes. Um subespaço $U \subseteq V$ é invariante sob um operador $S : V \to V$ se $SU = \{S\alpha; \alpha \in U\} \subseteq U$. Os idempotentes da álgebra geram subespaços invariantes a que se denominam *ideais*. Os ideais gerados pelos idempotentes primitivos da álgebra, ou *ideais minimais*, são os que possuem relevância para nossa proposta algébrica em razão de sua conexão com o formalismo da mecânica quântica, como se terá oportunidade de verificar em seguida. Costuma-se separar os ideais minimais em dois grupos, respectivamente, o dos ideais minimais *à esquerda* e o dos ideais minimais *à direita*, ou L e R. Esses ideais são gerados pela multiplicação à esquerda e à direita, respectivamente, de todos os elementos de uma álgebra A pelos idempotentes primitivos. Tais multiplicações geram cada uma, para cada tipo de ideal minimal, respectivamente, uma base à esquerda e uma base à direita. Ou seja,

$$L_j = A\alpha_j$$

$$R_j = \alpha_j A$$

Como há n idempotentes primitivos, isto implica que há n componentes nas bases dos ideais minimais. A interpretação geométrica usual dada à estrutura algébrica do ideal é que se trata de um espaço vetorial linear em que cada componente da base, L_j ou R_j, significa uma direção espacial independente. Uma conexão interessante seria investigar os ideais como espaços de multivetores, nos quais a cada direção estaria associado um *r*-vetor, em que *r* é a dimensão associada ao componente da base do ideal. Na verdade, a idéia aqui é vincular naturalmente a álgebra de Clifford à álgebra geométrica de David Hestenes (1987). Em conclusão, o ideal, em sua interpretação geométrica, fornece um modelo matemático para os *n* eixos cartesianos ortogonais de $\mathbb{R}^n$, definindo um espaço multidimensional.

Outra interpretação possível nos é oferecida por Davies (1981, p. 63) de que o ideal de uma álgebra é uma representação matemática de um espaço discreto de dimensão um, no qual cada um dos *n* componentes da base do ideal representa um holon distinto do espaço. Ora, esta é uma interpretação radicalmente diferente daquelas usualmente adotadas para as estruturas de espaços vetoriais. Neste caso, os idempotentes não mais são interpretados como operadores de projeção, mas como certos operadores-filtros ou operadores-seletores, em que cada idempotente separa um holon distinto que compõe o espaço discreto. Davies argumenta que, em termos práticos, a obtenção de um espaço de aspecto contínuo implica em dividir o espaço discreto em um número *n* suficientemente grande de holons, de tal forma que, no limite, $n \to \infty$, e o espaço discreto (ou descontínuo) com holons de dimensão *1* torna-se contínuo; neste caso, trata-se de um contínuo unidimensional, ou $\mathbb{R}$. Também se poderia associar a cada holon α_j uma intensidade escalar *p*, por exemplo, descrevendo um campo escalar discreto, o que redundaria numa assimilação material. É interessante observar que, independente da interpretação em questão, cada uma delas estaria prevista pela álgebra e poderia ser vinculada quer a estruturas metafísicas da realidade natural, quer a consequências epistemológicas relevantes para a descrição da realidade física.

2.1.3. Estrutura das álgebras de Clifford e de Weyl

Uma álgebra de Clifford generalizada pode ser obtida ao considerarmos o problema clássico da linearização de uma equação de grau *n*, isto é,

$$\sum_{i=1}^{m} x_i^n = \left(\sum_{i=1}^{m} x_i q_i \right)^n$$

Em que buscamos os elementos q_i que resolvem a equação acima. É certo que os elementos devem satisfazer às relações abaixo:

$$q_i^n = 1, \quad \forall i = 0,1,2,\ldots,m$$
$$q_i q_j = \phi q_j q_i, \quad i<j, \ \forall i, j = 0,1,2,\ldots,m$$

Em que ϕ é a *n*-ésima raiz primitiva da unidade, isto é, $\phi^n = 1$. Ora, para o caso em que *n*=2,

$$\sum_{i=1}^{m} x_i^2 = \left(\sum_{i=1}^{m} x_i q_i \right)^2$$

Assim, sugere-se pensar nas álgebras de Clifford (não generalizadas) como estando associadas ao processo de linearização da equação homogênea de segundo grau a *m* variáveis; portanto,

$$q_i^2 = 1, \quad \forall i$$
$$q_i q_j + q_j q_i = 0, \quad i \neq j, \quad \forall i, j = 0,1,2,\ldots,m$$

E os elementos q_i são os elementos *geradores* da álgebra de Clifford de ordem *m*, denotada por C_m^2. A ordem *m* permite-nos classificar as álgebras de Clifford segundo modelos algébricos tradicionalmente utilizados na mecânica quântica:

- Se *m* = 4, então C_4^2 é a *álgebra de Dirac*
- Se *m* = 2, então C_2^2 é a *álgebra dos quatérnions de Hamilton*
- Se *m* = 3, então C_3^2 é a *álgebra de Pauli*
- Se *m* = 6, então C_6^2 é a *álgebra conforme de Clifford*

Voltando ao nosso caso generalizado (de grau *n* qualquer), ao se fazer *m* = 2, ou seja, C_2^n, obtém-se uma álgebra de Clifford com dois geradores independentes, que pode ser tratada como sendo isomorfa ao grupo abeliano (comutativo) de rotações a *n* dimensões.[31] Esta álgebra é definida como uma álgebra de Weyl (Davies, 1981, p. 74-75) de dimensão *n*. Assim, a álgebra de Weyl pode ser pensada como sendo a estrutura algébrica que surge a partir da linearização da equação $x_1^n + x_2^n$; isto é, trata-se da álgebra associada à solução da expressão de grau *n*

$$x_1^n + x_2^n = \left(x_1 q_1 + x_2 q_2\right)^n$$

Portanto, os geradores q_1 e q_2 devem satisfazer às seguintes relações:

$$q_i^n = q_2^2 = 1$$
$$q_1 q_2 = \phi q_2 q_1$$

Em que ϕ é a *n*-ésima raiz primitiva da unidade, isto é, $\phi^n = 1$. Fica clara, então, a conexão entre a álgebra finita (e não-generalizada) de Clifford com dois geradores e a álgebra de Weyl. A saber, a álgebra de Clifford supõe a linearização de uma equação de grau dois com *m* geradores, e a álgebra de Weyl supõe a linearização de uma equação de grau *n* com dois geradores; isto é,

- C_m^2 é uma álgebra de Clifford bidimensional com *m* geradores
- C_2^n é uma álgebra de Clifford *n*-dimensional com 2 geradores (álgebra de Weyl).

A álgebra de Clifford C_m^2 permite uma interpretação geométrica para os geradores $q_1, q_2, ..., q_m$: estes formam uma base do espaço vetorial linear *m*-dimensional no qual cada vetor *x* pode ser obtido de modo único a partir da base $\{q_1, q_2, ..., q_m\}$:

[31] *n* dimensões por estar associada a um espaço com *n* variáveis ou posições.

$$x = q_1 x_1 + q_2 x_2 + \ldots + q_m x_m$$

Pode-se, então, definir dois produtos de ampla utilização na álgebra geométrica (e na geometria algébrica, também!): o produto escalar g e o produto exterior ("cunha") $\wedge$ entre dois vetores quaisquer *x e y* do espaço vetorial associado à álgebra de Clifford:

$$x\text{g}y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n$$

Tal que $x\text{g}y$ é um escalar e

$$x \wedge y = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{m} x_i y_j \left(q_i \wedge q_j \right)$$

De tal forma que $q_i \wedge q_j = 0$ para *i* = *j*, e $q_i \wedge q_j = -q_j \wedge q_i$ para $i \neq j$.

Além desses, pode-se definir um produto chamado *produto geométrico* entre dois vetores quaisquer *x* e *y* num espaço $\mathfrak{I}$ de *multivetores* como sendo

$$xy = x\text{g}y + x \wedge y$$

Visto que, por definição, $x\text{g}y = y\text{g}x$ e $x \wedge y = -y \wedge x$, então se segue que

$$x\text{g}y = \frac{1}{2}\left(xy + yx \right)$$

$$x \wedge y = \frac{1}{2}\left(xy - yx \right)$$

Pode-se, então, a partir das expressões acima e de mais algumas definições operacionais, definir certas entidades como *multivetores, multiformas* etc., e prover todo um cálculo que compõe a chamada *álgebra geométrica de Clifford*, ou seja, a aplicação da álgebra de Clifford à geometria. A rigor, Clifford (1878), ao propor sua álgebra, tinha por objetivo formular na linguagem geométrica os processos dinâmicos que se davam na natureza. A riqueza de aplicações e uma proposta de compreensão unificada da física-matemática, isto é, do conhecimento empiriológico do real sensível por meio de uma linguagem algébrica unificada são apresentadas pela álgebra do espaço-tempo de Hestenes (1987). Em nossa exposição não trataremos diretamente das consequências relativas a essa proposta de unificação. Basta dizer que há uma conexão natural entre os elementos algébricos, que representam, em nosso caso, a estrutura quantitativa do interior da matéria prima e as manifestações elementares de tais estruturas segundo certas dimensões e certas operações específicas no espaço-tempo, isto é, segundo uma geometria que descreve a dinâmica do mundo. Tal conexão deverá ser objeto de uma investigação futura, em complemento à proposta algébrica apresentada neste trabalho.

Notação. Seguiremos a notação proposta por Davies (1981), que supõe implicitamente uma ordem para os dois idempotentes geradores da álgebra C_2^n. Ambos, como vimos, por formarem uma base para a álgebra, são independentes e, assim, pode-se utilizar uma notação com duplo índice, subscrito e sobrescrito, para cada idempotente da seguinte forma:

$$q^a = (q_1)^a$$
$$q^0 = q_0 = 1$$

Assim, as potências dos geradores podem ser escritas de forma não-ambígua,

$$q^a = q_0^a = \left(q_0^1\right)^a$$
$$q_b = q_b^0 = \left(q_1^0\right)^b$$

Ora, tem-se que $q_0^{a+b} = q_0^a q_0^b$ e $q_{c+d}^0 = q_c^0 q_d^0$ e que, em geral,

$$q_b^a = q_0^a q_0^b = \phi^{ab} q_b^0 a_0^a \quad (1)$$

Portanto, visto haver um número finito de geradores, então suas propriedades cíclicas dão-nos imediatamente que

$$q_0^n = \left(q_0^1\right)^n = 1$$
$$q_n^0 = \left(q_1^0\right)^n = 1$$

Todos os somatórios são realizados com índices latinos de *0* a *n*, de modo que se pode simplificar a notação da seguinte forma: em vez de $\sum_{i=0}^{n}$ escreveremos $\sum_{i}$, e em vez de $\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}$ escreveremos $\sum_{i,j}$ etc.

Por fim, será feito uso do *delta de Kronecker*: $\delta_{ij}=0$ se $i \neq j$; e $\delta_{ij}=1$ se $i = j$.

Algumas definições: A álgebra de Weyl W_n é a álgebra polinomial gerada sobre o corpo £ dos números complexos a partir do conjunto gerador $\left\{q_0^1, q_1^0\right\}$, cujos elementos estão sujeitos às seguintes relações:

$$\left(q_0^1\right)^n = q_0^n = 1 \qquad (2)$$

$$\left(q_1^0\right)^n = q_n^0 = 1 \qquad (3)$$

$$q_0^1 q_1^0 = \phi q_1^0 q_0^1, \quad \phi = \exp\left(\tfrac{-2\pi i}{n}\right) \qquad (4)$$

A regra geral de multiplicação da expressão (4) acima é obtida em duas etapas:

Etapa 1: Tome-se a relação (4) acima e multipliquemo-la à esquerda por q_0^1,

$$\begin{aligned} q_0^1 q_0^1 q_1^0 &= q_0^1 \phi q_1^0 q_0^1 \\ q_0^2 q_1^0 &= \phi q_0^1 q_1^0 q_0^1 \\ q_0^2 q_1^0 &= \phi \phi q_1^0 q_0^1 q_0^1 \\ q_0^2 q_1^0 &= \phi^2 q_1^0 q_0^2 \end{aligned}$$

Etapa 2: Tome-se novamente (4) acima e multipliquemo-la à direita por q_1^0,

$$q_0^1 q_1^0 q_1^0 = \phi q_1^0 q_0^1 q_1^0$$
$$q_0^1 q_2^0 = \phi q_1^0 \phi q_1^0 q_0^1$$
$$q_0^1 q_2^0 = \phi^2 q_1^0 q_1^0 q_0^1$$
$$q_0^1 q_2^0 = \phi^2 q_2^0 q_0^1$$

Reaplicando a etapa 1 (a-1) vezes e a etapa 2 (b-1) vezes, obtemos a regra geral de multiplicação, indicada pela expressão (1), o que nos obtém a seguinte regra fundamental para multiplicação na álgebra:

$$q_0^a q_b^0 = \phi^{ab} q_b^0 q_0^a \quad \left(ou \quad q_b^0 q_0^a = \phi^{-ab} q_0^a q_b^0 \right) \qquad (5)$$

Por outro lado,

$$q_b^a q_d^c = q_0^a q_b^0 q_0^c q_d^0$$

$$q_b^a q_d^c = q_0^a (\phi^{-bc} q_0^c q_b^0) q_d^0 \qquad \text{[aplicando a equação (5)]}$$

$$q_b^a q_d^c = \phi^{-bc} q_0^a q_0^c q_b^0 q_d^0$$

$$q_b^a q_d^c = \phi^{-bc} q_0^{a+c} q_{b+d}^0 \qquad \text{[aplicando a equação (4)]}$$

$$q_b^a q_d^c = \phi^{-bc} q_{b+d}^{a+c} \qquad \text{[idem]}$$

Sendo esta última expressão uma regra de grande valor para os cálculos algébricos e, por isso, será replicada abaixo, com uma numeração de referência específica, para posterior utilização:

$$q_b^a q_d^c = \phi^{-bc} q_{b+d}^{a+c} \qquad (6)$$

Ademais, há um teorema da álgebra, que não será demonstrado neste trabalho; a demonstração completa encontra-se em Davies (p. 81-83) que afirma que os componentes q_a^b, que podem ser representados como sendo elementos de uma matriz M_{ab}, formam uma base da álgebra W_n (ou C_2^n) com n^2 componentes ordenados. Apenas se deve observar que esses componentes são obtidos como os produtos sequenciados, em que $q_b^a = \underbrace{q_0^1 q_0^1 \cdots q_0^1}_{a} \underbrace{q_1^0 q_1^0 \cdots q_1^0}_{b}$, e

$a,b=\{0,1,2,...(n-1)\}$. Visto que afirmamos que a cada componente da base se pode associar um elemento de uma matriz com índices *a* e *b*, então há *a.b* ($n.n = n^2$) componente na base de W_n.

Qualquer elemento ou combinação linear de elementos da álgebra W_n é denominado *número de Weyl*. Ora, visto que W_n possui uma base, então um número de Weyl pode ser expandido em termos dessa base. Assim, um número *M* qualquer pode ser dado pela combinação linear dos componentes da base, ou seja,

$$M=\sum_{i,j}a_{ij}q_j^i$$

Da mesma forma, podemos ter outro número *N* qualquer, que pode ser dado pela combinação linear dos componentes da base, ou seja,

$$N=\sum_{k,l}b_{kl}q_l^k$$

Donde se pode mostrar que

$$MN=\sum_{i,j}a_{ij}q_j^i\sum_{k,l}b_{kl}q_l^k=\sum_{i,j,k,l}a_{ij}b_{kl}q_j^iq_l^k$$

Porém, da expressão (6) vem que $q_j^iq_l^k=\phi^{-jk}q_{j+l}^{i+k}$, e, portanto, obtém-se que

$$MN=\sum_{i,j,k,l}a_{ij}b_{kl}\phi^{-jk}q_{j+l}^{i+k} \qquad (7)$$

A expressão acima pode ser utilizada a partir dos coeficientes complexos a_{ij} e b_{kl} para se obter o produto (ordenado) de dois elementos quaisquer da álgebra.

2.1.4. Obtenção de certos idempotentes relevantes

Não obstante havermos obtido uma expressão para o produto de dois elementos, ou "números" quaisquer da álgebra; interessa-nos, sobretudo, aqueles elementos que podem ser utilizados para a análise lógico-metafísica da teoria hilemórfica que está associada ao conceito de substrato ou matéria prima, a saber, os candidatos a representarem aspectos reais, porém metafísicos, das entidades naturais. Seguindo a sugestão de Davies (p. 87), concentrar-nos-emos naquelas quantidades algébricas que podem ser associadas às estruturas que denominamos *ideais*. No entanto, os ideais são gerados a partir dos componentes que anteriormente havíamos chamado de *idempotentes*. Portanto, vejamos então como abordar este último tópico segundo o formalismo da álgebra W_n.

Vimos pela expressão (7) que as quantidades que nos interessam particularmente obter a partir dos componentes da base estão associadas a um par de índices, o que significa que se trata de idempotentes combinados dois a dois. Tem-se, por conseguinte, o seguinte teorema:

<u>Teorema</u>: Um conjunto completo de pares de idempotentes primitivos ortogonais da álgebra W_n é dado por:

$$\alpha_{ii} = \alpha_i = \alpha_i \alpha_i = \tfrac{1}{n} \sum_k \phi^{-ik} q_k^0 \qquad (8)$$

Demonstração: Seja a multiplicação de dois quaisquer desses elementos α_i e α_j:

$$\alpha_i \alpha_j = \tfrac{1}{n} \sum_k \phi^{-ik} q_k^0 \tfrac{1}{n} \sum_l \phi^{-jl} q_l^0$$

$$\alpha_i \alpha_j = \tfrac{1}{n^2} \sum_{k,l} \phi^{-ik-jl} q_{k+l}^0$$

Porém, substituindo-se o índice *k* por (*k*-*l*) (isto pode ser feito visto que a soma é cíclica):

$$\alpha_i \alpha_j = \tfrac{1}{n^2} \sum_{k=-l}^{(n-1)-l\_} \sum_l \phi^{-i(k-l)-jl} q_k^0$$

No entanto, dado o caráter cíclico de q_1^0 e de ϕ, ambos de grau *n*, pode-se retomar a soma original em *k*, e ainda percorrer o ciclo completo da mesma; de onde vem que

$$\sum_l \phi^{\pm l(i-j)} = n, \text{ se } i = j$$
$$\sum_l \phi^{\pm l(i-j)} = 0, \text{ se } i \neq j$$

Logo,

$$\alpha_i \alpha_j = \tfrac{1}{n^2} \sum_{k=-l}^{(n-1)-l\_} \sum_l \phi^{-i(k-l)-jl} q_k^0$$

$$\alpha_i \alpha_j = \tfrac{1}{n^2} \sum_k n\delta_{ij} \phi^{-ik} q_k^0$$

Comparando esta última expressão com aquela que aparece no enunciado do teorema para $i = j$

$$\alpha_{ii} = \alpha_i \alpha_i = \tfrac{1}{n} \sum_k \phi^{-ik} q_k^0 \qquad (9)$$

$$\alpha_i \alpha_j = \delta_{ij} \alpha_{ii}$$

Em que fazemos $\alpha_{ij} = \alpha_i \alpha_j = \delta_{ij} \alpha_{ii}$. Explicitando, temos também que

$$\alpha_{ij} \alpha_{jm} = \delta_{ij} \alpha_{ii} \delta_{jm} \alpha_{jj} = (\alpha_i \alpha_j)(\alpha_j \alpha_m)$$

Ao se tomar o idempotente $\alpha_{ii} = \tfrac{1}{n} \sum_k \phi^{-ik} q_k^0$ e realizar a soma total em i obtém-se

$$\sum_i \alpha_{ii} = \sum_i \alpha_i = \sum_i \sum_k \phi^{-ik} q_k^0 = 1$$

Também é possível mostrar que para qualquer elemento ε da álgebra, a expressão acima é, de fato, o elemento unitário da mesma, isto é, $\varepsilon.1 = 1.\varepsilon = \varepsilon$. Da mesma forma, ao se demonstrar a existência do elemento unitário dado acima, pode-se também mostrar que os idempotentes $\left\{\alpha_{00}, \alpha_{11}, ..., \alpha_{(n-1)(n-1)}\right\}$ formam um conjunto completo de n pares ortogonais que geram a álgebra W_n associando-lhe n subespaços vetoriais ortogonais gerados pelos idempotentes e pelos ideais que lhes estão vinculados.

2.1.5. Aproximações entre a álgebra de Weyl e os fundamentos ontológicos da matéria primeira apresentados até aqui

Do que expusemos até agora, não apenas com relação à proposta de Tomás de Aquino com respeito à matéria, mas também da álgebra de Weyl, podemos buscar investigar certas propriedades ontológicas da matéria desde o ponto de vista de sua representação algébrica, e para isso proporemos a seguir como as formas elementares e suas operações podem ser representadas adequadamente por meio da álgebra proposta.

1) Vimos que há dois princípios fundamentais e duais para a gênese da realidade natural, atividade e passividade, pois permitem a dinâmica inerente à matéria primeira. Por serem fundamentais, estes dois princípios devem servir como base fundamental para a dinâmica da matéria e, por isso, nós os associamos à base fundamental da álgebra, dada por $\left\{q_0^1, q_1^0\right\}$.

2) Por outro lado, como visto anteriormente, Tomás de Aquino nos afirma que se dá uma mescla dos elementos por meio de suas propriedades ativas e passivas, que são aquilo que fundamentalmente caracteriza cada elemento; ou seja, cada forma elementar constitui-se de um conjunto de qualidades ativas e passivas, mediante as quais é possível a mescla dos elementos. Com efeito, a atividade e passividade presente nas qualidades permitem a dinâmica de estados na essência da matéria e sua mútua combinação. Ora, sendo assim, as qualidades associadas a cada elemento se combinam para gerar as formas elementares e se constituem, portanto, uma base para a álgebra W_n. Assim, cada componente q_b^a, que denominaremos holoquarks, representa, na álgebra, uma qualidade composta por uma específica *a*-atividade (índice superior *a*) e por uma específica *b*-passividade (índice inferior *b*), de tal modo que uma combinação de *a*-atividade e de *b*-passividade constitua um elemento da álgebra, e, portanto, há n^2 qualidades ou elementos geradores. Recordemos que Aristóteles havia identificado como qualidades do substrato o par ativo quente-frio e o par passivo seco-úmido, responsáveis pela

caracterização da corporeidade ou aspectos sensíveis presentes no mundo sublunar.

3) Afirma também Tomás que um específico elemento ou forma elementar é dado por uma soma de qualidades ativas e passivas segundo o mais e o menos. A posição de Aquino é perfeitamente justificável: se a matéria prima está dotada das qualidades que comporão a corporeidade, é razoável supor que tais qualidades inerem a formas que as recebam, uma vez que se trata de acidentes, e os acidentes não têm estatuto autônomo, senão que têm seu ser na substância. Ora, a substancialidade do substrato consiste precisamente em sua natureza ou ser potencial, o qual é dado pelas formas elementares, visto que o ser vem pela essência ou natureza. Uma vez que as qualidades não têm seu ser em si, porém em outro, há que tê-lo nas formas elementares que dão o ser à protomatéria. No opúsculo *A mescla dos elementos* (2009c) Tomás nos indica que se deve considerar que as qualidades ativas e passivas dos elementos sejam suscetíveis de mais e de menos, e que elas são capazes de gerar uma qualidade intermediária através da mescla. Ora, uma mescla dessa ordem somente é possível pela efetivação de uma soma ponderada das intensidades das qualidades (Aquino, 2009c, n.21). Tal soma pode ser expressa por uma ponderação adequada das qualidades ativas e passivas, isto é, obtém-se um dado elemento α_{jk} (o duplo índice refere-se justamente à composição de atividade e de passividade, e está relacionado ao caráter matricial dos elementos da álgebra), denominado idempotente, que resulta de uma soma ponderada dos holoquarks que representam as qualidades ativas e passivas presentes no substrato. Ou seja, $\alpha_{jk} = \frac{1}{n}\sum_r \phi(r, j, k) q_r^{k-j}$, em que $\phi(r, j, k)$ é o fator de ponderação.

A razão de a soma ser tomada sobre o índice mudo *r* significa que, como há dois elementos geradores fundamentais, ora tomamos um deles ora o outro para a soma, fato que insere a dualidade fundamental na dinâmica da matéria, além de estabelecer certas relações duais, de cuja interpretação e aplicação cuidaremos adiante.

Na medida em que no interior da matéria primeira se dá composição e transmutação dos elementos, como nós vimos nos diversos textos perfilados do Aquinate, então podemos realizar o produto algébrico entre elementos quaisquer da álgebra. Alguns desses produtos são dotados de significação especial por representarem especificamente as operações de composição e transmutação das formas.

4) Ademais, Aquino (2009c) se refere a uma certa miscibilidade ou não das formas, em função de sua composição a partir das qualidades ativas e passivas. Ora, a álgebra fornece-nos um mecanismo apropriado por meio dos idempotentes para expressar a miscibilidade como possível ou impossível, a saber, uma determinada forma elementar α_{jj} é ou não miscível com outra forma α_{kk} se $\alpha_{jj}\alpha_{kk} = 0$ ou $\alpha_{jj}\alpha_{kk} \neq 0$, respectivamente. O caráter de idempotência permite representar convenientemente que a mescla de um elemento consigo próprio resulta no próprio elemento, a saber, $\alpha_{jj}\alpha_{jj} = \alpha_{jj}^2 = \alpha_{jj}$.

Outra operação fundamental a que se refere Aquino (2009b, c. 5 n. 12-24) é a transmutação das formas na essência da matéria primeira, operação fundamental para a edução das formas dos compostos. A transmutação, por ser uma metamorfose própria da matéria, é representada por uma transformação de similaridade, seguindo as sugestões de Bohm (1980, p. 202) e de Hiley (*apud* Saunders e Brown, 1991, p. 243) para expressar reconfigurações de elementos no interior da álgebra. Assim, uma transmutação é representada por $\varepsilon\alpha_{jk}\varepsilon^{-1}$, em que ε é um componente qualquer da álgebra. As transmutações interessantes dão-se em torno dos reatores primitivos, q_0^a e q_b^0 , fato que naturalmente decorre da formulação proposta para a matéria, dado que justamente estes elementos representam, na álgebra, graus arbitrários de atividade e passividade das qualidades. Assim, é razoável esperar que a ação das qualidades por meio de sua atividade, ativa e passiva, cause uma transmutação própria cujo resultado é a edução de uma forma específica. Não obstante as consequências interessantes vinculadas à análise do mecanismo de edução de formas específicas, não é objetivo de este trabalho fazê-la. Retomemos, agora, a apresentação dos componentes algébricos relevantes para nosso propósito.

2.1.6. Obtenção dos ideais minimais da álgebra

O objetivo deste tópico é obter expressões que nos forneçam os ideais à esquerda e à direita de W_n. Igualmente, mostraremos a íntima conexão destes ideais com os colchetes de Dirac; a propósito destes últimos, faremos uma breve exposição, dado o seu uso extensivo na mecânica quântica.

O ideal à esquerda $\mathfrak{I}$ de uma álgebra *A* é uma sub-álgebra de *A* tal que $A\mathfrak{I} \subseteq \mathfrak{I}$. Da mesma forma, define-se o ideal à direita $\mathfrak{R}$ de uma álgebra *A* como uma sub-álgebra de *A* tal que $\mathfrak{R}A \subseteq \mathfrak{R}$.

Há um teorema, em especial para álgebras lineares associativas como é nosso caso, que nos assegura que dado que α_{kk} representa um par de idempotentes ortogonais de *A* tal que $\sum_k \alpha_{kk} = 1$, como já vimos acima, então a sub-álgebra *A* pode ser obtida a partir dos ideais à esquerda $\mathfrak{I}_k$ e à direita $\mathfrak{R}_k$ da seguinte forma:

$$A = \sum_k \mathfrak{I}_k = \sum_k \left(A\alpha_{kk} \right)$$

E à direita,

$$A = \sum_k \mathfrak{R}_k = \sum_k \left(\alpha_{kk} A \right)$$

A saber, os *n* idempotentes α_{kk} geram, cada um, um ideal à esquerda $\mathfrak{I}_k$ (ou à direita $\mathfrak{R}_k$) da álgebra *A*. Visto que em nosso caso $A = W_n$, obtém-se o seguinte:

$$\mathfrak{I}_k = W_n \alpha_{kk}$$

$$\mathfrak{R}_k = \alpha_{kk} W_n$$

Tendo-se em mente que, segundo a expressão (8), cada idempotente α_{kk} é dado por $\alpha_{kk} = \frac{1}{n}\sum_{l}\phi^{-lk}q_l^0$. Ora, vimos também que os elementos da base de W_n são dados por $q_j^i,\ i,j=0,1,2,...,(n-1)$. Portanto, para o *i*-ésimo gerador (com *j* componentes) do ideal à esquerda $\Im_k$ da álgebra W_n obtém-se

$$\Im_k(i) = q_j^i\alpha_{kk} = \frac{1}{n}\sum_{l}\phi^{-kl}q_l^o q_j^i,\quad \forall i,j$$

$$\Im_k(i) = \frac{1}{n}\sum_{l}\phi^{-kl}q_{l+j}^i,\quad \forall i,j$$

Porém, reescrevendo a expressão acima com *l-j* em vez de *l* (podemos fazer isso dado o caráter cíclico da soma), tem-se que

$$\Im_k(i) = \frac{1}{n}\sum_{l}\phi^{-k(l-j)}q_l^i,\quad \forall i,j$$

E os ideais $\Im_k$ à esquerda de W_n podem ser obtidos a partir dos geradores de W_n. Um raciocínio análogo aplica-se aos ideais $\Re_k$ à direita de W_n, novamente tomando-se o caráter cíclico da soma e reescrevendo apropriadamente a soma ao longo dos índices:

$$\Re_k(i) = \frac{1}{n}\sum_{l}\phi^{-(l-j)(k+i)}q_l^i$$

Desse modo, se cada q_l^i é gerado pela base primitiva $\{q_0^1, q_1^0\}$ com $q_l^i = \underbrace{q_0^1 q_0^1 .. q_0^1}_{i}\underbrace{q_1^0 q_1^0 ... q_1^0}_{l}$, então os ideais à esquerda e à direita são obtidos a partir dos geradores primitivos da álgebra. Cada ideal (há 2*n* ideais: *n* à esquerda e *n* à direita) forma uma sub-álgebra de W_n, sendo todos eles mutuamente independentes. Também é possível demonstrar que os *n* componentes do ideal à esquerda $\Im_k$, bem como os *n* componentes do ideal à direita $\Re_k$ formam uma base para seus respectivos subespaços vetoriais associados. Aos ideais à esquerda e à direita correspondem os colchetes *ket* e *bra* de Dirac, largamente utilizados no formalismo quântico, podendo-se associá-los consistentemente aos colchetes *ke*t e *bra*, respectivamente, da seguinte forma:

$$\Im_k(i) = \left|i\right\rangle_k = \tfrac{1}{n}\sum_l \phi^{-kl} q_l^{-i}$$

$$\Re_k(i) = \left\langle i\right|_k = \tfrac{1}{n}\sum_l \phi^{il} q_{-l}^{i-k}$$

Os índices i determinam as n bases distintas de cada ideal individualmente; no entanto, é suficiente tomar apenas um específico índice k, por exemplo, $k = 0$, para a representação metafísica (e física) que estamos buscando. Assim, tomando-se $k = 0$ nas expressões acima, obtemos como expressões suficientes para os ideais procurados,

$$\Im_0(i) = \left|i\right\rangle_0 = \tfrac{1}{n}\sum_l q_l^{-i} \qquad (10)$$

$$\Re_0(i) = \left\langle i\right|_0 = \tfrac{1}{n}\sum_l \phi^{il} q_{-l}^{i} \qquad (11)$$

Para simplificar a notação escreveremos $\left|i\right\rangle$ em lugar de $\left|i\right\rangle_0$, e $\left\langle i\right|$ em lugar de $\left\langle i\right|_0$. Por outro lado, uma vez que os ideais à esquerda e à direita podem ser compreendidos como espaços vetoriais, aos quais denominamos *duais* um do outro, seus componentes são, em princípio, ortogonais. Com efeito, isso é verdadeiro, pois, pelo menos para a classe dos ideais que vimos considerando. Assim, de forma geral, o produto *bra*-*ket* de $\left\langle i\right|$ e $\left|j\right\rangle$ é dado por:

$$\left\langle i\middle|j\right\rangle = \tfrac{1}{n}\sum_l \phi^{il} q_{-l}^{i}\, \tfrac{1}{n}\sum_m q_m^{-j} = \tfrac{1}{n^2}\sum_{l,m} \phi^{il} q_{-l}^{i} q_m^{-j}$$

Contudo, sabemos pela equação (6) que $q_{-l}^{i} q_m^{-j} = \phi^{-jl} q_{m-l}^{i-j}$; logo, aplicando esta regra à expressão acima, obtém-se

$$\left\langle i\middle|j\right\rangle = \tfrac{1}{n^2}\sum_{l,m} \phi^{(i-j)l} q_{m-l}^{i-j}$$

Pode-se reindexar com $m+l$ em vez de m, de onde vem que

$$\langle i | j \rangle = \tfrac{1}{n^2} \sum_{l,m} \phi^{(i-j)l} q_m^{i-j}$$

Ora, somando em *l* obtém-se o seguinte resultado:

$$\langle i | j \rangle = \tfrac{1}{n^2} \sum_{m} n \delta_{ij} q_m^{i-j}$$

Porém, a expressão imediatamente acima é igual a 0 para $i \neq j$, e para $i = j$ ela é dada por

$$\langle i | i \rangle = \tfrac{1}{n^2} \sum_{m} n q_m^0 = \tfrac{1}{n} \sum_{m} q_m^0$$

E, por outro lado, a segunda soma na expressão imediatamente acima é, pela equação (9),

$$\langle i | i \rangle = \alpha_{00}$$

Consideraremos α_{00} como sendo nosso idempotente fundamental, visto que ele aparecerá em várias expressões fundamentais para a formulação algébrica do substrato. De forma geral, portanto, pode-se escrever que

$$\langle i | j \rangle = \delta_{ij} \alpha_{00}$$

Observa-se, então, que as componentes dos ideais à esquerda e à direita da álgebra são, de fato, mutuamente ortogonais. Deve-se notar o papel fundamental a ser desempenhado pelo idempotente α_{00}, que se mostra como um elemento "difuso" no corpo algébrico, além de se tratar de um elemento comum aos subespaços vetoriais compreendidos pela álgebra. Por sua vez, a multiplicação invertida *ket-bra* nos permite obter os idempotentes α_{ii}, como se mostra a partir do produto de $|i\rangle$ e $\langle i|$:

$$
\begin{aligned}
|i\rangle\langle i| &= \tfrac{1}{n} \sum_{l} q_l^{-i} \tfrac{1}{n} \sum_{m} \phi^{-im} q_m^{i} \\
&= \tfrac{1}{n^2} \sum_{l,m} \phi^{-im} q_l^{-i} q_m^{i} \\
&= \tfrac{1}{n^2} \sum_{l,m} \phi^{-im} \phi^{-il} q_{l+m}^{0}
\end{aligned}
$$

$$= \tfrac{1}{n^2} \sum_{l,m} \phi^{-il} \phi^{-im} q_l^0 q_m^0$$

$$= \tfrac{1}{n} \sum_{l} \phi^{-il} q_l^0 \, \tfrac{1}{n} \sum_{m} \phi^{-im} q_m^0$$

$$= \alpha_{ii} \alpha_{ii} = \alpha_{ii}^2 = \alpha_{ii}$$

Ou seja, $|i\rangle\langle i| = \alpha_{ii}$. Dessa forma, a expressão $|i\rangle\langle i|$ define uma expressão geral para operadores que nos fornecem o conjunto completo dos idempotentes geradores da álgebra de Weyl. O idempotente "difuso" α_{00} também pode ser obtido a partir do operador $|0\rangle\langle 0|$. Dessa forma, pode-se eventualmente também considerar-se que este operador desempenha um papel fundamental na aproximação entre elementos da álgebra que representam, por hipótese, a dinâmica própria do interior da matéria prima, e elementos algébricos que igualmente podem representar a dinâmica do vácuo, a qual, por sua vez, provê uma descrição para a dinâmica da energia do "vazio". [32] Ademais, visto que, como exposto anteriormente, $\sum_i \alpha_{ii} = 1$, então se tem que $\sum_i |i\rangle\langle i| = 1$, haja vista que os geradores devem cobrir todo o espaço.

3. Edução (ou extração) de um espaço de configurações[33] discreto

Devemos investigar agora como, a partir da álgebra proposta, se podem derivar propriedades métricas que são atributos da realidade

[32] Trata-se, obviamente, de uma conjectura. No entanto, esse modo de interpretar o operador $|0\rangle\langle 0|$ conduz a resultados empiriológicos interessantes que podem estar associados à questão da não localidade em microfísica. Não trataremos amiúde disso neste trabalho. A intenção aqui é tão-somente chamar a atenção para uma interpretação possível, a ser mais bem explorada em outra oportunidade.

[33] Espaço que associamos às coordenadas de posição ou de localização. Trata-se de um conceito de natureza empiriológica (físico-matemática) a respeito da natureza essencial (metafísica ou ontológica) da realidade material, que é em si mesma extensa.

material. A saber, precisamos estabelecer de que forma a geometria pode ser derivada da álgebra, uma vez que, para todos os efeitos, esta última representa uma totalidade que é o substrato ou matéria prima, mas que, para efeitos de observação e de medição, requer elementos geométricos ou métricos. Deve-se chamar a atenção para o fato de que a representação algébrica do substrato se constitui como um pré-espaço com respeito a espaços geométricos quaisquer, sejam eles euclidianos ou não euclidianos.

Ademais, gostaríamos de estabelecer uma terminologia própria para se lidar com elementos da álgebra em sua associação com aspectos metafísicos da matéria. A razão para isto é dupla: de um lado, buscar uma *intuição* adequada para os elementos que permita associá-los à dinâmica da realidade natural, objetivo que motivara originalmente Clifford em sua pesquisa geométrica; e, por outro lado, estabelecer certas diferenciações entre os elementos. Por isso, em geral, aos elementos q_j^i, a partir de uma sugestão inicial de Davies (p. 131) para a geração de quantidades que representarão o *continuo*, como se verá a seguir, chamaremos de *holons*, e em especial aos elementos geradores q_1^0 e q_0^1 chamaremos de *holoreatores*, em razão de seu papel de geração dos demais holons. A partir dos holoreatores se pode obter certas operações de projeção dos elementos do pré-espaço num espaço geométrico cuja representação adequada é dada por uma álgebra geométrica, em especial a de Hestenes (1987); ou seja, os holoreatores são operadores da álgebra e articulam a conexão entre a álgebra (que representa elementos metafísicos) e a geometria (que descreve elementos físico-matemáticos).

Observe-se que o ideal à esquerda $\Im$ estabelece uma sequência ordenada de elementos, visto que $\Im_0(j) = |\, j\rangle$, como nos mostra a expressão (10). Defina-se, portanto, a seguinte aplicação injetora:

$$\lambda : \ \{0,1,2,...(n-1)\} \rightarrow ¡$$

$$j \rightarrow x_j$$

Tem-se então que

$$\lambda\left(\Im_0\left(j\right)\right)=\Im_0\left(\lambda\left(j\right)\right)=\Im_0\left(x_j\right)$$

De onde se seque que

$$\Im_0\left(x_j\right)=\left|x_j\right\rangle \qquad (12)$$

Ou seja, o dual à esquerda introduz naturalmente um sistema de coordenadas para o espaço vetorial associado ao dual. Veremos agora o importante papel desempenhado na geração do espaço coordenado pelo holoreator q_0^1. Tomemos a expressão geral para o ket $\left|x_j\right\rangle$, que representa o espaço vetorial coordenado associado ao dual $\Im_0$:

$$\left|x_j\right\rangle=\tfrac{1}{n}\sum_k q_k^{-j} \qquad (13)$$

Agora vamos tomar o produto à esquerda do holoreator q_0^1 pelo dual:

$$q_0^1\left|x_j\right\rangle=q_0^1\,\tfrac{1}{n}\sum_k q_k^{-j}=\tfrac{1}{n}\sum_k q_0^1 q_k^{-j}=\tfrac{1}{n}\sum_k q_k^{1-j}$$

Ora, combinando-se as expressões (10) e (12) acima se obtém que

$$q_0^1\left|x_j\right\rangle=\left|x_{j-1}\right\rangle$$

Desse modo, aplicando o holoreator q_0^1 *a* vezes à esquerda, sendo $a\in ¥$, chega-se à expressão geral:

$$q_0^a\left|x_j\right\rangle=\left|x_{j-a}\right\rangle \qquad (14)$$

A qual, comparada à expressão (12), nos mostra então que

$$q_0^a\Im_0\left(x_j\right)=q_0^a\left|x_j\right\rangle=\left|x_{j-a}\right\rangle$$

Logo, a partir da expressão (14) acima, podemos interpretar o seguinte: de um ponto de vista empiriológico, o holoreator q_0^1, ao ser aplicado à esquerda do espaço dual, executa uma operação de *translação* no sentido *negativo* das coordenadas em x, tendo-se em conta que o dual funciona como um espaço discreto unidimensional no qual cada x_j representa um holon desse espaço.

Dito de outro modo, a multiplicação à esquerda do ideal pelo *operador* q_0^1 tem o efeito de estender um holon a partir do holon atual (e local) x_j no sentido *negativo*[34] *de* x, ao passo que a multiplicação do ideal à esquerda pelo operador q_0^a faz estender *a* holons de distância a partir holon atual no sentido negativo de x. Visto que as operações apresentam natureza cíclica porquanto $\left(q_0^1\right)^n = q_0^n = 1$, então se tem que

$$q_0^n \Im_0\left(x_j\right) = q_0^n \left| x_j \right\rangle = \left| x_j \right\rangle$$

Isso equivale a uma operação de translação completa pelo espaço, isto é, por *n* holons. Evidentemente, há uma diferença entre *permanecer em* x_j e *estender-se por n holons a partir de* x_j: o efeito obtido pela operação do holoreator equivale a obter a extensão total (linear) do espaço dual no sentido estipulado (no caso em tela, o negativo).

Seja o operador conjugado hermitiano[35] (ou auto-adjunto) de q_0^1, $\hat{X}_0$, que se define assim:

$$\hat{X}_0 q_0^1 = q_0^1 \hat{X}_0 = q_0^n = 1$$

Porém, multiplicando-se à direita o primeiro e o terceiro membros da sequência acima por q_0^{-1} tem-se o seguinte:

$$\hat{X}_0 q_0^1 q_0^{-1} = q_0^n q_0^{-1}$$

De onde se segue que o conjugado hermitiano de q_0^1 é dado por

[34] Trata-se somente de se estipular um sentido como negativo e outro como positivo a partir das operações conhecidas da álgebra usual para os números inteiros.

[35] Ficará claro com o decorrer da exposição a relevância de se ter um operador hermitiano associado a q_0^1.

$$\hat{X}_0 = \left(q_0^1\right)^\dagger = q_0^{n-1}$$

Porém, fazendo-se o produto do conjugado hermitiano $\hat{A}$ pelo ideal à esquerda obtém-se que:

$$\begin{aligned}\hat{X}_0 \Im_0\left(x_j\right) = \left(q_0^1\right)^\dagger \left|x_j\right\rangle &= q_0^{n-1}\left|x_j\right\rangle \\ &= q_0^{n-1}\tfrac{1}{n}\sum_k q_k^{-j} \\ &= \tfrac{1}{n}\sum q_0^{n-1} q_k^{-j} \\ &= \tfrac{1}{n}\sum_k q_k^{n-(j+1)}\end{aligned}$$

Visto que q_0^1 é cíclico *módulo n*, então $q_0^{n-(j+1)} = q_0^{-(j+1)}$. Logo, se segue que

$$\tfrac{1}{n}\sum_k q_k^{n-(j+1)} = \tfrac{1}{n}\sum_k q_k^{-(j+1)} = \left|x_{j+1}\right\rangle$$

De onde se obtém que

$$\hat{X}_0 \Im_0\left(x_j\right) = \left(q_0^1\right)^\dagger \left|x_j\right\rangle = \left|x_{j+1}\right\rangle$$

Em outras palavras, a multiplicação à esquerda do ideal pelo *operador hermitiano de* q_0^1 tem o efeito de se estender um holon, do atual holon ou *holon local* x_j, a seu vizinho mais próximo no sentido positivo de x. Analogamente, o efeito da multiplicação pelo operador $\left(q_0^a\right)^\dagger$, ou $\hat{X}_a$, é o seguinte:

$$\hat{X}_a \Im_0\left(x_j\right) = \left(q_0^a\right)^\dagger \left|x_j\right\rangle = \left|x_{j+a}\right\rangle \qquad (15)$$

Assim, podemos concluir que, do ponto de vista empiriológico, o holoreator $\left(q_0^1\right)^\dagger$ tem o efeito de estender (através de uma translação) o atual holon no sentido *positivo* de x, bem como a multiplicação do ideal à esquerda pelo operador $\left(q_0^a\right)^\dagger$ estende o atual holon (ou holon local) por *a* holons no sentido positivo de x .

Portanto, segundo a interpretação acima, o ideal à esquerda provê um conjunto ordenado de holons, a partir dos quais pode ser construído um espaço discreto. Ora, trata-se, portanto, de uma interpretação geométrica do ideal e da atuação sucessiva do holoreator q_0^1 e de seu conjugado hermitiano $\left(q_0^1\right)^\dagger$, que são capazes de gerar uma ordem geométrica para o dual ou espaço de configurações.

Com base no exposto acima, deve-se em seguida procurar um operador, chamemo-lo de $\hat{X}$, ao qual se possa associar autovalores que representem a *ordem* do holon e, por conseguinte, a *extensão* ou *distância* ao longo dos x . Dito de outro modo trata-se de apresentar um operador que forneça uma solução à equação de autovalor

$$\hat{X}\left|x_j\right\rangle = j\left|x_j\right\rangle \qquad (16)$$

Examinemos melhor a expressão acima. Vimos anteriormente, segundo a expressão (9), que cada α_{jj} é dado por

$$\alpha_{jj} = \tfrac{1}{n}\sum_k \phi^{-jk} q_k^0$$

Ora, multipliquemos a expressão acima por *j*; obtém-se o seguinte:

$$j\alpha_{jj} = \tfrac{1}{n}\sum_k j\phi^{-jk} q_k^0$$

Segundo a expressão (13), o *ket* $\left|x_j\right\rangle$ é dado por

$$\left|x_j\right\rangle = \tfrac{1}{n}\sum_k q_k^{-j} \qquad (17)$$

Recordando que, pela expressão (6), tem-se que $q_k^{-j} = \phi^{-jk} q_k^0 q_0^{-j}$, então

$$\left|x_j\right\rangle = \tfrac{1}{n}\sum_k \phi^{-jk} q_k^0 q_0^{-j} = \alpha_{jj} q_0^{-j}$$

Multiplicando ambos os lados da expressão acima à direita por q_0^j tem-se que

$$\left|x_j\right\rangle q_0^j = \alpha_{jj} q_0^{-j} q_0^j = \alpha_{jj}$$

Rearranjando a expressão acima, multiplicando-a por j e substituindo o ket $\left|x_j\right\rangle$ pela soma dada em (17),

$$\tfrac{1}{n}\sum_{j,k} j\phi^{-jk} q_k^0 = \sum_j j\alpha_{jj}$$

Porém, o lado esquerdo da expressão acima é precisamente o operador $\hat{X}$, isto é,

$$\hat{X} = \tfrac{1}{n}\sum_{j,k} j\phi^{-jk} q_k^0 = \sum_j j\alpha_{jj} \qquad (18)$$

Resta verificar, portanto, se ele atende à expressão de autovalor acima. Usando a expressão dada acima para o operador, substituindo-a na expressão do autovalor (16), com o cuidado de generalizar o índice *j*, a ser substituído por um índice qualquer *r*, tem-se que:

$$\hat{X}\left|x_j\right\rangle = \tfrac{1}{n}\sum_{r,k} r\phi^{-rk} q_k^0 \,\tfrac{1}{n}\sum_l q_l^{-j}$$

$$= \tfrac{1}{n^2}\sum_{r,k,l} r\phi^{-rk} q_k^0 q_l^{-j}$$

$$= \tfrac{1}{n^2}\sum_{r,k,l} r\phi^{-rk} \phi^{jk} q_{l+k}^{-j}$$

Contudo, trocando-se o índice de soma *l* por *l*-*k* em razão de a soma ser cíclica, tem-se que

$$\hat{X}\left|x_j\right\rangle = \tfrac{1}{n^2}\sum_{r,k,l} r^{k(j-r)} q_l^{-j}$$

E em seguida somando-se ao longo de *k*, bem como considerando que, ao longo desta soma, dado que o fator em ϕ é uma soma cujos expoentes r e j são também índices cíclicos, então tem-se para a soma ao longo de k para o fator ϕ o seguinte:

$$\begin{cases} i \neq j, \quad \sum_k \phi^{k(j-r)} = \dfrac{\left(\phi^{n(r-j)} - 1\right)}{\left(\phi - 1\right)} = 0, \quad \text{pois } \phi^n = 1 \\ i = j, \quad \sum_k \phi^{k(j-r)} = 1 \end{cases}$$

Logo, a soma ao longo de k resulta em que

$$\hat{X}\left|x_j\right\rangle = \tfrac{1}{n^2}\sum_{r,l} rn\delta_{rj} q_l^{-j}$$

Portanto, somando-se a seguir ao longo de r tem-se finalmente que

$$\begin{aligned} \hat{X}\left|x_j\right\rangle &= \tfrac{1}{n}\sum_{l} r\delta_{rj} q_l^{-j} \\ &= \tfrac{1}{n}\sum_{l} jq_l^{-j} \\ &= j\,\tfrac{1}{n}\sum_{l} q_l^{-j} \\ &= j\left|x_j\right\rangle \end{aligned}$$

Que era o que intencionávamos mostrar. Desse modo, evidencia-se que o operador $\hat{X}$ é capaz de gerar a estrutura extensional ou geométrica da realidade material, a partir da representação algébrica da matéria prima por meio da álgebra de Weyl. A consequência imediata é a geração dos holons do espaço de configurações, aos quais podemos associar coordenadas discretas x_j e distâncias quaisquer a, tanto no sentido negativo como no sentido positivo, através dos operadores conjugados q_0^a e $\left(q_0^a\right)^\dagger$, respectivamente. As coordenadas discretas x_j devem ser tratadas como *vetores*.

4. Edução (ou extração) de um espaço de fases[36] discreto

No que se segue, estenderemos a aplicação da álgebra ao espaço de fases de modo análogo ao que foi feito para o espaço de configurações. De forma geral, trata-se agora de interpretar os elementos da álgebra à luz do caráter simétrico dos idempotentes para suas contrapartes relacionadas ao holoreator q_1^0. Com efeito, tal interpretação busca o conjugado da extensão, que é o movimento ou mutabilidade. Sabemos, por experiência, que a outra face evidente da realidade material, além de sua extensão, é o seu caráter mutável. O conceito de mutabilidade inclui, necessariamente, o de movimento local,[37] de modo que se interpretará os efeitos associados ao idempotente primitivo q_1^0 aos do movimento corpóreo; assim, a contraparte do espaço de configurações será o espaço de fases.

Em suma, por um raciocínio inteiramente análogo ao da extração do espaço de configurações com base nos idempotentes primitivos, deve-se em seguida considerar, por razões de simetria, a existência de um espaço dual ao espaço de configurações, que será o *espaço de fases*. Vimos que os vetores x_j ficaram associados aos autovetores correspondentes ao holoreator q_0^1. Somos instados, graças ao caráter simétrico intrínseco da álgebra, a buscar estabelecer o espaço definido por um conjunto de autovetores que denotaremos estrategicamente por $\left| p_j \right\rangle$, associados ao holoreator q_1^0. Também estabeleceremos o significado dinâmico da atuação do holoreator q_1^0 sobre o espaço dos $\left| p \right\rangle$. Para se evitar uma longa (desnecessária, para efeito de nosso objetivo neste artigo) e trabalhosa dedução, nos

[36] Trata-se do espaço associado às coordenadas de velocidade ou de movimento. Apreensão empiriológica (ordem física) da mutabilidade material (ordem metafísica).

[37] Tal como igualmente argumentava Aristóteles acerca da necessidade de se associar qualquer mudança de natureza material, mesmo as qualitativas, a algum movimento local.

contentaremos em apresentar a expressão geral para os vetores $\left| p_j \right\rangle$ do espaço dual gerado por q_1^0, que se pode mostrar ser dada por

$$\left| p_j \right\rangle = \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k,l} \phi^{jk} q_l^{-k} \qquad (19)$$

Por conseguinte, do mesmo modo que fizemos para os vetores $\left| x_j \right\rangle$, pode-se investigar a ação do holoreator q_1^0 sobre os vetores do espaço de fases. Tome-se, por exemplo, a ação desse holoreator sobre os vetores $\left| p_j \right\rangle$ por meio do produto à esquerda do espaço dual, como o fizemos acima para o espaço dual de configurações:

$$\begin{aligned} q_1^0 \left| p_j \right\rangle &= q_1^0 \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k,l} \phi^{jk} q_l^{-k} \\ &= \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k,l} \phi^{jk} q_1^0 q_l^{-k} \\ &= \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k,l} \phi^{jk} \phi^{k} q_{l+1}^{-k} \end{aligned}$$

Porém, rearranjando-se a expressão acima, e trocando-se o índice *l* por (*l*-1) (devido ao caráter cíclico da soma), obtém-se que

$$q_1^0 \left| p_j \right\rangle = \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k,l} \phi^{(j+1)k} q_l^{-k}$$

Contudo, o lado direito da igualdade acima é, comparando-o à expressão (19), $\left| p_{j+1} \right\rangle$; logo,

$$q_1^0 \left| p_j \right\rangle = \left| p_{j+1} \right\rangle$$

Por outro lado, aplicando-se o operador q_1^0 um número *b* de vezes, obtém-se a expressão geral,

$$q_b^0 \left| p_j \right\rangle = \left| p_{j+b} \right\rangle \qquad (20)$$

Assim, com base na expressão (20) acima, pode-se concluir que, do ponto de vista empiriológico, o produto pelo holoreator q_1^0 tem o efeito de realizar uma *translação* no sentido *positivo*[38] de p. Observe-se que a multiplicação pelo operador q_b^0 faz mover *b* holons de fase distantes do holon local no sentido positivo de *p*. Mais uma vez, considerando-se que as operações apresentam uma natureza cíclica, uma vez que $\left(q_1^0\right)^n = q_n^0 = 1$, então se tem que,

$$q_n^0 \left| p_j \right\rangle = \left| p_j \right\rangle$$

Que equivale a uma translação completa pelo espaço de fases, isto é, por *n* holons de fase.

Em seguida, de forma análoga ao que foi feito para o idempotente q_0^1, definamos o conjugado hermitiano de q_1^0, que denotaremos por $\hat{P}_0$:

$$\hat{P}_0 q_1^0 = q_1^0 \hat{P}_0 = q_n^0 = 1$$

Contudo, multiplicando-se à direita o primeiro e o terceiro membros da expressão acima por q_{-1}^0, tem-se o seguinte:

$$\hat{P}_0 q_1^0 q_{-1}^0 = q_n^0 q_{-1}^0$$

De onde se segue que o conjugado hermitiano de q_1^0 é dado por

$$\hat{P}_0 = \left(q_1^0\right)^\dagger = q_{n-1}^0 = q_{-1}^0$$

Aplicando o conjugado hermitiano q_{-1}^0 do holoreator q_1^0 tem-se que

[38] Vale observar que, no caso do espaço de fases, dá-se o sentido inverso do deslocamento holonômico que obtivemos para o espaço de configurações.

$$\left(q_1^0\right)^\dagger \left| p_j \right\rangle = q_{-1}^0 \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k,l} \phi^{jk} q_l^{-k}$$
$$= \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k,l} \phi^{jk} q_{-1}^0 q_l^{-k}$$
$$= \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k,l} \phi^{jk} \phi^{-k} q_{l-1}^{-k}$$

Porém, trocando o índice cíclico *l*-1 para *l* tem-se que,

$$\left(q_1^0\right)^\dagger \left| p_j \right\rangle = \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k,l} \phi^{(j-1)k} q_l^{-k}$$
$$= \left| p_{j-1} \right\rangle$$

De onde se segue que a multiplicação pelo operador conjugado hermitiano tem o efeito de mover por um holon de fase o atual *holon local de fase* p_j ao holon mais próximo no sentido negativo dos *p*. Analogamente, o efeito da multiplicação pelo operador $\left(q_b^0\right)^\dagger$ nos mostra que

$$\left(q_b^0\right)^\dagger \left| p_j \right\rangle = \left| p_{j-b} \right\rangle$$

De onde se pode concluir que, do ponto de vista empiriológico, o idempotente $\left(q_1^0\right)^\dagger$ efetua uma *translação* no sentido *negativo* dos *p*, bem como a multiplicação pelo operador $\left(q_b^0\right)^\dagger$ faz mover *b* holons de fase do holon local no sentido negativo dos *p*.

De acordo com a interpretação que vimos propondo, o vetor $\left| p_j \right\rangle$, que representa um ideal à esquerda para o espaço de fases, provê um *conjunto ordenado* de holons a partir dos quais se pode construir um espaço de fases discreto. Ora, trata-se, portanto, de uma interpretação dinâmica para a atuação dos ideais, tanto à esquerda como à direita, que representam o espaço de fases, bem como para a atuação do holoreator q_1^0 e de seu conjugado hermitiano. Assim, a interpretação permite identificar que existe uma *ordem dinâmica* intrínseca associada ao espaço de fases, a qual é gerada pelo holoreator primitivo q_1^0 e seu conjugado $\left(q_1^0\right)^\dagger$. Ademais, se pode observar, segundo esta interpretação, que não há um operador da álgebra que se possa associar ao que comumente chamamos de *tempo*. O elemento básico metafísico é a mutabilidade, expressa pelo ideal $\Re_0$ e pelo operador $\hat{P}_0$. Qualquer operação que envolva o tempo deverá ser obtida trabalhando-se sobre um espaço vetorial derivado que representa um dado empiriológico, mas não metafísico, da realidade material. Certamente, uma tal ordem derivada já é uma específica projeção espaço-temporal, pois envolverá necessariamente um tratamento geométrico – por conseguinte métrico – dos ideais derivados. A partir da geometrização que se pode obter dos espaços vetoriais derivados, surgem naturalmente os conceitos – como, de resto, já indicamos acima – de coordenação e de ordem que se associam aos elementos x_j e p_j, o que permite definir determinados sistemas de coordenadas e métricas associadas. Uma métrica geral poderia ser dada, por exemplo, por $\sum_{j,k} g_{jk} x_j x_k$, em que os coeficientes g_{jk} poderiam ser definidos para se obter uma métrica galileana ou uma métrica de Minkowski, conforme o caso em análise. Somente assim surge, pela escolha das coordenadas, a medição do tempo, associada à assinatura $(+,+,+)$ de um espaço dual $\mathbb{R}^3$ com um parâmetro independente t para as medições temporais no caso galileano, ou então associada à assinatura $(-,+,+,+)$ de um espaço dual $\mathbb{R}^{1,3}$ no qual uma das coordenadas, $\sqrt{-1}t$, permite a medição temporal para o caso relativístico. Para quaisquer das possibilidades em disputa, o tempo é sempre um derivado associado ao espaço dual $\Re$, mas não um elemento constitutivo intrínseco da álgebra. Cabe, portanto, a observação de Aristóteles de que,

> Quando [no movimento] percebemos um distinto antes e um distinto depois, então falamos de tempo; pois isso é exatamente o que o tempo é: a medida ou dimensão calculável do movimento com respeito a um antes e a um depois. O tempo, portanto, não é

> movimento, porém aquilo pelo qual o movimento pode ser numericamente estimado (Arist. *Ph.* 219b 1-5) [Tradução livre nossa].

A saber, o tempo é sempre um derivado que se situa na ordem física, ao passo que o movimento é de ordem metafísica. Daí a pertinência do trabalho empreendido por Clifford na elaboração de uma álgebra que pudesse expressar a dinâmica própria do movimento. Evidentemente, deve-se excluir no tocante à representação algébrica do movimento qualquer necessidade de previamente se definir algum tipo de métrica, uma vez que, a manter a intuição de Aristóteles, esta última já seria uma derivação física que associamos ao movimento.

5. Derivação de uma expressão prévia ao princípio de incerteza de Heisenberg

Uma interessante consequência do que vimos expondo até agora é a inerente conexão entre a álgebra e ambos, extensão do espaço e movimento corpóreo, que apresenta a relação existente entre os operadores associados a cada uma dessas faces da realidade natural, a qual conduz à não sua comutatividade, ou seja, à assimetria fundamental entre posição e quantidade de movimento presentes na estrutura fundamental do mundo. Isto sugere que a relação de incerteza (ou, para alguns, de indeterminação) de Heisenberg para posição e momentum está de fato presente na compleição ontológica primitiva do mundo, não se tratando, pois, de um aspecto puramente epistemológico da formulação quântica, porém de uma intrínseca relação de assimetria que redunda na impossibilidade de medição simultânea dos autovalores associados a ambos os operadores. Para apresentar essa interessante consequência da formulação algébrica proposta para a estrutura fundamental do substrato material, precisamos obter em seguida o operador associado ao movimento.

Trata-se, então, de se obter um operador $\hat{P}$ cujo produto pelo vetor $\left| p_j \right\rangle$ resulte nos autovalores e autovetores que representam a ordem do espaço de fases e, por conseguinte, numa *distância* neste espaço (que representa, de fato, um *movimento*) ao longo do eixo dos *p*. Com efeito, trata-se de apresentar um operador que forneça uma solução à seguinte equação de autovalor,

$$\hat{P}\left|p_j\right\rangle = j\left|p_j\right\rangle \qquad (21)$$

Por sua vez, o operador $\hat{B}$ pode ser obtido pela seguinte expressão

$$\hat{P} = \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{j,r,k,l} l\phi^{l(j-r)-rk} q_k^{r-j} \qquad (22)$$

Visto que sua substituição na expressão (21) verifica tanto ser correta sua formulação algébrica como também sua aplicação na equação de autovalor (21). Não faremos esta verificação explicitamente neste trabalho, pois os detalhes estão em Davies (p. 150). O que nos interessa mais propriamente aqui, para além da representação explícita do operador, é interpretá-lo convenientemente como representando o elemento metafísico de mutabilidade da matéria – em termos mais específicos, o movimento local, haja vista o caráter que associamos ao espaço de fases – em termos da geração de holons no espaço de fases, aos quais podemos associar coordenadas discretas p_j e movimentos quaisquer através de deslocamentos holonômicos de valor *b*, tanto no sentido positivo como no sentido negativo, através dos operadores conjugados q_b^0 e $\left(q_b^0\right)^\dagger$, respectivamente.

Assim, procuramos mostrar que, com base na álgebra de Weyl – que representa em nossa interpretação o substrato ou matéria prima – pudemos extrair tanto o espaço (e sua geometria) por meio de coordenadas de posição ou de localização em holons do espaço de configurações através do operador $\hat{X}$, como o movimento (a dinâmica) por meio de coordenadas de posição ou de localização em holons do espaço de fases através do operador $\hat{P}$. Visto serem os geradores da álgebra também os comuns geradores do espaço e de sua dinâmica, pode-se desde já intuir uma intrínseca relação entre matéria, espaço (ou espaço-tempo) e dinâmica, não se tratando de categorias arbitradas ou entidades separadas, porém elementos geneticamente (no sentido de gênese) articulados a partir de um substrato comum. Entre outras consequências interessantes do modelo acima, se pode mostrar que há uma relação especial entre os operadores $\hat{X}$ e $\hat{P}$ que representa *o princípio de incerteza de Heisenberg*. Vejamos como isso pode ser feito.

Seguindo uma sugestão de Landau (1966, p. 61-65) com respeito à forma geral de operadores para a mecânica quântica, definamos $\hat{X}$ e $\hat{P}$ do seguinte modo:

$$\hat{X}(a) = e^{-ia\hat{P}}$$

$$\hat{P}(b) = e^{ib\hat{X}}$$

Em seguida, propõe-se a seguinte associação, $q_0^1 = e^{i\hat{P}}$ e $q_1^0 = e^{-i\hat{X}}$, de onde se segue que,

$$\hat{X}(a) = \left(q_0^1\right)^{-a} = q_0^{-a} \qquad (23)$$

$$\hat{P}(b) = \left(q_1^0\right)^{-b} = q_{-b}^0 \qquad (24)$$

Por conseguinte, as expressões (23) e (24) indicam que os operadores $\hat{X}(a)$ e $\hat{P}(b)$ são recíprocos por estarem associados aos espaços duais da álgebra. Assim, definamos o *comutador* de $\hat{X}$ e $\hat{P}$, $\left[\hat{X},\hat{P}\right]$, como sendo o operador que resulta da seguinte operação (Nussenzveig, 1998, p. 318-319):

$$\left[\hat{X},\hat{P}\right] = \hat{X}\hat{P} - \hat{P}\hat{X}$$

Façamos, para simplificar, e sem perda de generalidade, $a = 1$ e $b = 1$ nas expressões (23) e (24), respectivamente, substituindo estes valores nos operadores do comutador:

$$\left[\hat{X},\hat{P}\right]=q_0^{-1}q_{-1}^0-q_{-1}^0q_0^{-1}$$

$$\left[\hat{X},\hat{P}\right]=q_{-1}^{-1}-\phi^{-1}q_{-1}^{-1}$$

$$\left[\hat{X},\hat{P}\right]=q_{-1}^{-1}(1-\frac{1}{\phi}) \qquad (25)$$

Porém, é possível mostrar – novamente, não o faremos aqui, em razão de a demonstração não ser útil ao objetivo que temos em vista nesse trabalho – que, ao se ter em conta a relação existente entre o espaço das configurações e o espaço de fases, evidencia-se que os holoreatores primitivos q_0^1 e q_1^0 internamente indistinguíveis na álgebra e que, por conseguinte,

> A transformação algébrica que converteria um dos geradores no outro representaria uma simetria fundamental da estrutura algébrica e, portanto, uma simetria fundamental das relações entre sistemas físicos associados com a estrutura algébrica (Davies, 1981, p. 158).

Assim, após algumas transformações entre os elementos da álgebra, pode-se mostrar que se pode definir, sem perda de generalidade, o valor de q_{-1}^{-1} como sendo,

$$q_{-1}^{-1}=\frac{\sqrt{-1}}{(1-\frac{1}{\phi})}=\frac{\boldsymbol{i}}{(1-\frac{1}{\phi})} \qquad (26)$$

E, do mesmo modo, a partir das mesmas transformações referidas acima, tem-se que $q_{-1}^{-1}q_1^1=\phi$ e que $q_1^1q_{-1}^{-1}=\phi$; portanto, se segue que,

$$q_1^1=\boldsymbol{i}\left(1-\phi\right)$$

Por conseguinte, do exposto até aqui chegamos a uma conhecida expressão que resulta da não comutatividade dos operadores para a não comutatividade dos operadores $\hat{X}$ e $\hat{P}$ a partir do produto das expressões (25) e (26):

$$\left[\hat{X},\hat{P}\right]=\boldsymbol{i}$$

A expressão acima expõe a associação natural existente entre, respectivamente, posição e quantidade de movimento (momentum). A expressão acima, uma vez aplicada a espaços contínuos de configuração e de fases, conduz ao *princípio de incerteza* de Heisenberg. De fato, a continuidade provém de se passar ao limite, $n \to \infty$, isto é, de se passar a considerar a álgebra C_2^∞ (ou W_∞), a saber, a álgebra de Weyl, com um número infinito de idempotentes geradores.

6. Observações finais

Em razão da importância da intuição de Aristóteles sobre a necessidade de um substrato que se mantivesse incólume como um princípio de conservação metafísico na gênese e na corrupção na natureza,[39] decidimos investigar se seria possível estabelecer um modelo matemático capaz de representar certas propriedades desse substrato.[40] Por outro lado, isto equivale, com efeito, a recusar a posição de Aristóteles sobre a impropriedade de se compreender a realidade natural por meio de dispositivos matemáticos, menos ainda um extrato dessa realidade que se sustém metafisicamente. Vale recordar que aristotélicos medievais como Aquino (1998, p. 115-127) admitiam a existência de um conhecimento intermediário entre a realidade física e a matemática, desde que se considerasse que os elementos matemáticos empregados para a compreensão dessa

[39] Uma correspondência apropriada em termos contemporâneos faria corresponder, por exemplo, os conceitos de gênese e corrupção dos elementos a partir do, e no, substrato, respectivamente, aos conceitos de criação e aniquilação de partículas elementares a partir do, e no, vácuo.

[40] A longa discussão sobre o estatuto ontológico do substrato como uma realidade não individualizada pode ganhar força se assumirmos que a intuição originária de Aristóteles se revela profícua ao assimilá-la, em termos físicos, mas não metafísicos, a conceitos como os de campo e vácuo. Outra assimilação possível seria aos conceitos de ordem implicada e holomovimento, do físico David Bohm (1980). Esses tópicos são assuntos para uma discussão que não faremos aqui, mas esperamos fazê-la em tempo oportuno.

realidade se constituíam em dispositivos úteis para *salvar os fenômenos*, sem verdadeiro alcance ontológico. No entanto, o que propomos neste trabalho é ir além de uma ciência média que tem por objeto formal a matemática e por objeto material a realidade física[41] para substabelecer uma ciência média que teria por objeto formal a matemática, porém por objeto material, não a ordem sensível, mas a ordem inteligível, isto é, a realidade metafísica.[42] O empreendimento pressupõe a possibilidade dessa ciência intermediária (*loc. cit.*), o que seria impossível se esta fosse *a priori* descartada.

Em conclusão, tomando como ponto de partida a realidade metafísica da matéria prima, empreendemos uma análise de sua estrutura por meio de elementos matemáticos apropriados, no caso por um modelo algébrico que articulasse entre si certos elementos primários anteriormente a qualquer conceito geométrico, uma vez que, estando presentes espaços vetoriais e métricas associadas aos mesmos, isto, por si só, já delinearia a presença da extensão física e do movimento, uma vez admitida uma dinâmica imposta pela presença da matéria. Por meio do modelo proposto, puderam-se apresentar três consequências básicas:

1) Demonstrou-se a edução do *espaço* pela ação do gerador primitivo idempotente q_0^1, fonte da *extensão* da realidade material do substrato, bem como da *geometria* de caráter holonômico associada ao dual à esquerda $\mathfrak{I}$ e ao operador $\hat{X}$.
2) Demonstrou-se a edução do *movimento* (e consequentemente do tempo, como número do movimento) pela ação do gerador primitivo idempotente q_1^0, fonte da *mutabilidade* da realidade material do substrato, bem como do *movimento local* de

[41] Vale ressaltar que se trata da realidade física enquanto sensível, ou seja, enquanto objeto de observação e medição.

[42] Estamos cientes de certa ojeriza que se consolidou ao longo dos últimos três séculos sobre a capacidade da intuição metafísica em prover conhecimento verdadeiro sobre a realidade. Não pertence ao escopo deste trabalho tal discussão, porém apresentar, em termos concretos, um modelo factível desse tipo de ciência média que se compõe de matemática e metafísica.

caráter holonômico associado ao ideal à direita $\Re$ e ao operador $\hat{P}$. Observe-se, ademais, que não foi realizada qualquer operação específica com vistas à edução do tempo, o que poderia igualmente supor a existência de um operador específico para tanto. Isso não é em absoluto necessário, visto que o elemento básico da dinâmica da matéria não é o tempo, mas o movimento, do qual redunda a medição numérica à qual denominamos tempo. Esta fica, por sua vez, relativizada a algum sistema específico de coordenadas associado ao espaço.

3) Demonstrou-se o intrínseco entrelaçamento entre a ordem geométrica e a ordem dinâmica e seu caráter conjugado, porém não comutativo, pela existência da relação $\hat{X}\hat{P} - \hat{P}\hat{X} = \boldsymbol{i}$ entre os operadores de posição e de movimento, que se pode interpretar como indicando o caráter ontológico da *relação de incerteza* de Heisenberg. Antecipa-se, pois, em termos algébricos discretos o fato de os operadores de posição e de movimento não serem comutativos em razão do caráter de flutuação de seus valores para o caso contínuo, este último obtido do modelo algébrico ao se fazer passar ao infinito o número finito de holoreatores.

Bibliografia

AMARANTE, M. (1984). Agostinho. *Confissões*. São Paulo, Paulus.

BOHM, D. (1980). *Wholeness and the Implicate Order*. New York, Routledge & Kegan Paul.

BOSTOCK, D. (2006). *Space, Time, Matter, and Form: Essays on Aristotle's Physics*. Oxford, Oxford University Press.

BYRNE, C. (1995). Prime Matter and Actuality. *Journal of the History of Philosophy* 33, nº 2, p. 197-224.

CLIFFORD, W. (1878). Applications of Grassmann's extensive algebra. *Am. J. Math.* 1, p. 350-358.

CORREA, A. (1980). Tomás de Aquino. *Suma Teológica*. 11 vols. (tradução). Caxias do Sul/Porto Alegre, Livraria Sulina.

DAVIES, P. G. (1981). *The Weyl Algebra and an Algebraic Mechanics*. PhD Thesis. London, Birkbeck College, University of London.

FABRO, C. (2015). *Participation et Causalité selon S. Thomas d'Aquin*. Louvain, Parole et Silence.

FAITANIN, P. (2001a). *Principum Individuationis: Estudio Metafisico de la Doctrina de la Individuación en Tomás de Aquino*. Tesis Doctoral. Pamplona, EUNSA.

FAITANIN, P. (2001b). Ontologia de la materia en Tomás de Aquino. *Cuadernos de Anuario Filosofico* 135. Pamplona, EUNSA.

FAITANIN, P. (2009a). Tomás de Aquino. *Os Princípios da Natureza*. *Opúsculos Filosóficos*. (tradução, introdução e notas). São Paulo, SITA Brasil.

FAITANIN, P. (2009b). Tomás de Aquino. *A Natureza da Matéria*. *Opúsculos Filosóficos*. (tradução, introdução e notas). São Paulo, SITA Brasil.

FAITANIN, P. (2009c). Tomás de Aquino. *A Mescla dos Elementos*. *Opúsculos Filosóficos*. (tradução, introdução e notas). São Paulo, SITA Brasil.

FAITANIN, P.; VEIGA, B.; PETRONIO, R. (2014). Tomás de Aquino. *A criação, a conservação e o governo do mundo*. (tradução, introdução e notas). Campinas, Instituto Aquinate/Ecclesiae.

GILL, M. L. (1992). *Aristotle on Substance: The Paradox of Unity*. Princeton, Princeton University Press.

GRAHAM, D. (1987). The Paradox of Prime Matter. *Journal of the History of Philosophy* 25, nº 4, p. 475-490.

HESTENES, D.; SOBCZYK, G. (1987). *Clifford Algebra to Geometric Calculus*. Dordrecht, D. Reidel Publishing.

LANDAU, L.; LIFCHITZ, E. (1966). *Mécanique Quantique*. Moscou, Editions Mir.

MESCHINI, D.; LEHTO, M.; PIILONEN, J. (2006). *Geometry, pregeometry and beyond*. (Disponível em http://arxiv.org/abs/gr-qc/0411053v3).

NASCIMENTO, C. A. R. (1998). Tomás de Aquino. *Comentário ao Tratado da Trindade de Boécio – Questões 5 e 6*. (tradução e introdução). São Paulo, Editora da UNESP.

NUSSENZVEIG, H. M. (1998). *Ótica, Relatividade Física Quântica. Curso de Física 4*. São Paulo, Edgard Blücher.

ODILÃO MOURA, D. (1977). Tomás de Aquino. *Compêndio de Teologia*. (tradução, comentários e notas). Rio de Janeiro, Editora Presença.

ODILÃO MOURA, D. (1981). Tomás de Aquino. *O Ente e a Essência*. (tradução, comentários e notas). Rio de Janeiro, Editora Presença.

ODILÃO MOURA, D.; JASPERS, L.; DE BONI, L. (1990). Tomás de Aquino. *Suma contra os Gentios*. 2 vols. (tradução e introdução). Rio de Janeiro, Editora Presença.

O'ROURKE, F. (2005). *Pseudo-Dionysius and the Metaphysics of Aquinas*. Notre Dame, University of Notre Dame Press.

ROWAN, J. (1961). Thomas Aquinas. *Commentary on Aristotle's Metaphysics*. (translation). Notre Dame, Dumb Ox Books.

SOKOLOWSKI, R. (1970). Matter, elements and substance in Aristotle. *Journal of the History of Philosophy* 8, nº 3, p. 263-288.

VAZ Jr., J.; ROCHAR Jr., R. (2012). *Álgebras de Clifford & Espinores*. São Paulo, Editora Livraria da Física.

WEYL, H. (1949). *Philosophy of Mathematics and Natural Science*. Princeton, Princeton University Press.

WEYL, H. (1950). *The Theory of Groups and Quantum Mechanics*. Mineola, Dover.

WICKSTEED, P. H.; CORNFORD, F. M. (1957). Aristotle. *The Physics*. 2 vols. Cambridge, Harvard University Press.

Submetido em 16/01/2017 e aprovado
para publicação em 14/07/2017.