

# **BASES TEÓRICAS DE LA RESISTENCIA DE JUNTAS EN MACIZOS ROCOSOS CON LEYES DE FLUJO NO ASOCIADO**

Theoretical bases of joint strength in rock masses with non-associated flow laws

Rubén Galindo<sup>a</sup>, Alcibiades Serrano<sup>a</sup>, Claudio Olalla<sup>a</sup>

<sup>a</sup> Departamento de Ingeniería y Morfología del Terreno, Universidad Politécnica de Madrid, España

**RESUMEN** – En este artículo se presentan las bases teóricas para evaluar la resistencia al corte en juntas de roca y derivar una ecuación que gobierna la relación entre tensiones tangenciales y normales actuantes sobre la junta. La ecuación teórica se aplica a dos criterios de rotura no lineales: Hoek y Brown Modificado y Mohr-Coulomb Modificado, sobre los que se utilizan leyes de flujo no asociadas. El modelo teórico considera como variables dependientes la dilatación geométrica, el ángulo de rozamiento instantáneo y un parámetro que incorpora la rugosidad de la superficie de la junta. Este modelo deduce matemáticamente una estructura de ecuación similar a la ley empírica propuesta por Barton en 1973. Sin embargo, se consigue únicamente una buena correlación con los valores empíricos y, por tanto, con la ecuación de Barton, mediante la incorporación de una ley de flujo no asociado que gobierne los procesos de rotura. Esta ley de dilatación se hace más significativa en medios altamente fracturados, lo que puede ser inducido en una junta de roca.

**SYNOPSIS** – This article presents the theoretical bases to evaluate the shear strength in rock joints and derive an equation that governs the relationship between tangential and normal stresses acting on the joint. The theoretical equation is applied to two non-linear failure criteria: Modified Hoek and Brown and Modified Mohr-Coulomb, on which non-associated flow laws are applied. The theoretical model considers as dependent variables the geometric dilatation, the instantaneous friction angle and a parameter that incorporates the roughness of the joint surface. This model mathematically deduces a similar equation structure as the empirical law proposed by Barton in 1973. However, a good correlation is only achieved with the empirical values and, therefore, with Barton's equation, by incorporating a law of unassociated flow governing the failure processes. This flow law becomes more significant in highly fractured media, which can be induced in a rock joint.

**Palabras Clave** – Resistencia al corte de juntas de roca, modelo teórico, ley de flujo no asociado

**Keywords** – Shear strength of rock joints, theoretical model, non-associated flow law

## **1 – INTRODUCCIÓN**

La determinación de la resistencia al corte de las juntas de rocas requiere comprender la relación entre la tensión normal media en el plano de rotura (plano medio de la discontinuidad) y la tensión tangencial media que se produce para el deslizamiento entre las dos caras de la roca.

---

E-mails: rubenangel.galindo@upm.es (R. Galindo), alcibiades.serrano@upm.es (A. Serrano), claudio.olalla@upm.es (C. Olalla)

ORCID: [orcid.org/0000-0001-9407-9183](https://orcid.org/0000-0001-9407-9183) (R. Galindo)

En el caso de las juntas de roca, se rompe el contacto de la roca y, como en cualquier proceso relacionado con la mecánica de rotura de macizos rocosos, una buena aproximación de los fenómenos de resistencia implica un conocimiento adecuado de las leyes de resistencia de dichos macizos rocosos. En este sentido, se debe realizar una investigación adecuada en el marco de criterios de rotura bien establecidos para estudiar los macizos rocosos.

Además, la predicción adecuada de los fenómenos de rotura cuando la carga desviadora se vuelve significativa (como juntas de rocas donde se determina la carga cortante que define la rotura en el plano medio de la discontinuidad para un nivel de carga normal dado en este plano) debe considerar la dilatación del material, cuya influencia es bien conocida en materiales rocosos (Veermer y De Borst, 1984, Detournay, 1986, Hoek y Brown, 1997, Medhurst y Brown, 1998, Fairhurst 2003, Alejano y Alonso 2005).

En esta investigación, tanto un adecuado criterio de rotura como de ley de dilatación se han incorporado en un modelo teórico previamente establecido (Serrano et al. 2014) para predecir y aproximar mejor los resultados experimentales según la ley experimental de Barton (1973).

Entre los trabajos pioneros relacionados con la evolución del estudio de las juntas de rocas se encuentran los siguientes: Patton (1966) propuso una formulación que se basaba en un patrón de dientes de sierra y se fundamentaba en pruebas que se realizaron en juntas creadas artificialmente en material de yeso. Newland y Alley (1957) ajustaron los resultados de las pruebas de acuerdo con una ley bilineal para describir la dilatación de los materiales granulares. Ladanyi y Archambault (1970) y Jaeger (1971) utilizaron leyes de ajuste más sofisticadas. Sin embargo, fue Barton (1973) quien incorporó una fórmula empírica que consideró los efectos de la rugosidad de la junta y la dependencia del nivel de carga en la dilatación.

A partir de entonces comenzaron a aparecer modelos empíricos más complejos. Algunos modelos compararon los ángulos que definían la rugosidad de la superficie según el esfuerzo normal aplicado (Schneider 1976). Heuze y Babour (1982) introdujeron un modelo de tres parámetros para predecir la ley de fluencia que se produce en las juntas de rocas identificando empíricamente un punto crítico más allá del cual no existe dilatación. Además, Lechnitz (1985) desarrolló un modelo que podría considerar las fracturas de la roca que fueron producidas por un comportamiento no lineal en el material basado en resultados experimentales sobre muestras de arenisca.

Plesha (1987) y Zubelewicz et al. (1987) estudiaron un factor de degradación de la rugosidad a partir del modelo de rugosidad del diente de sierra. Qiu et al. (1993) revisaron el modelo de Plesha considerando la rugosidad sinusoidal en lugar de la de dientes de sierra. Saeb y Amadei (1992) llevaron a cabo un estudio similar basado en una relación empírica del factor de dilatación dada en 1970 por Ladanyi y Archambault (1970). Hutson (1987), Hutson y Dowding (1990), Huang et al. (1993), Lee et al. (2001) y Homand et al. (1990), entre otros, llevaron a cabo otras investigaciones sobre la degradación de la rugosidad en los contactos entre las caras de las juntas.

Gens et al. (1990) propusieron un modelo constitutivo elastoplástico para describir los comportamientos tridimensionales de las fracturas. Más recientemente, Grasselli (2003), Belem (2007) y Samadhiya et al. (2008) formularon modelos con parámetros que consideraron la naturaleza tridimensional de las superficies de las juntas.

Entre los modelos existentes, el método empírico de (Barton, 1973, Barton, 1976, Barton y Choubey 1977) es el más utilizado en la práctica. Este método se basa en la selección de un coeficiente de rugosidad conjunta (JRC), para lo cual se han propuesto diversas aproximaciones para relacionar este valor con las morfologías de los perfiles que define. Este enfoque también ha sido evaluado por el uso del análisis fractal (Lee et al. 1990, Huang et al. 1992, Den Outer et al. 1995, Muralha 1995, Xie et al. 1999) o análisis estadístico (Reeves 1985), entre otros procedimientos.

Asadollahi (2009) introdujo una modificación del criterio de rotura por corte original de Barton, que se basaba en las limitaciones del criterio de Barton con respecto a la estimación del desplazamiento máximo o la resistencia al corte posterior al pico.

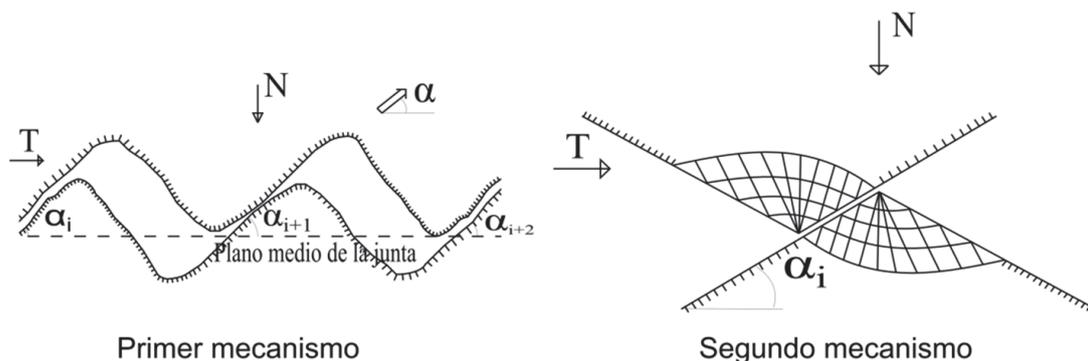
Sin embargo, la base teórica de la resistencia al corte de las juntas de roca fue establecida por Serrano et al. (2014), quien desarrolló un modelo teórico que podría capturar la estructura matemática primaria de la ecuación de Barton (1973) y la dependencia de las variables que se utilizan en la descripción de esta ecuación.

El objetivo de este artículo es aplicar esta formulación teórica (Serrano et al. 2014) para definir con mayor precisión la resistencia al corte de las juntas de roca de acuerdo con resultados experimentales conocidos. Para ello se utilizan criterios de rotura apropiados, que deben ser no lineales, y la dilatancia de las rocas a partir de una ley de flujo no asociada.

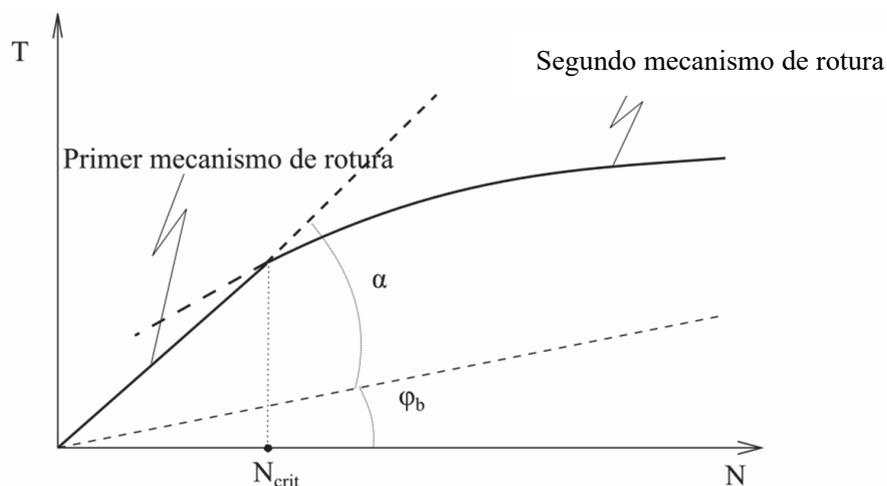
Por lo tanto, se utilizan dos criterios de rotura no lineales bien establecidos: el criterio de Hoek y Brown Modificado (Hoek et al., 1992, Hoek et al., 2002) y el criterio de Mohr-Coulomb Modificado, que fue sugerido por Singh et al. (2011) y Singh y Singh (2012). Adicionalmente, se considera el efecto de la dilatancia del material mediante el uso de una ley de variación lineal con respecto al ángulo de fricción instantáneo de modo que el modelo considere tanto la dilatancia geométrica de la rotura de contactos según planos de debilidad sobre las asperezas de la rugosidad como la del material.

## 2 – MODELO TEÓRICO

Se producen dos mecanismos de rotura cuando el contacto se produce a través de la rugosidad de la superficie. En el primer mecanismo, la junta desliza en sus contactos y forma un ángulo  $\alpha$  con el plano medio de la junta (Figura 1); este mecanismo se utiliza para cargas normales bajas. En el segundo mecanismo, la rugosidad se plastifica y se rompe (Figura 1), y se presenta para cargas exteriores normales elevadas.



**Fig. 1** – Primer mecanismo de rotura (deslizamiento) y segundo mecanismo de rotura (plastificación de los contactos).



**Fig. 2** – Ley que rige la resistencia máxima al corte de una junta.

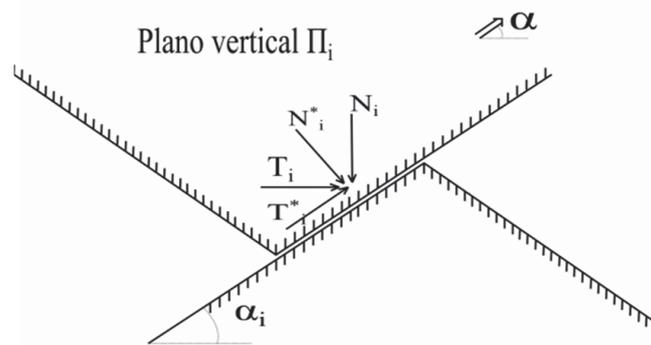
La carga normal crítica  $N_{crit}$  discrimina entre ambos mecanismos. La rotura ocurre a través del primer mecanismo para tensiones normales por debajo de esta carga crítica, mientras que el segundo mecanismo se aplica a cargas por encima del nivel crítico (Figura 2).

### 2.1 – Análisis del primer mecanismo

El contacto “i” entre las áreas de rugosidad se considera según el perfil de la junta. Se supone que el plano tangencial en el contacto “i” forma el ángulo máximo  $\alpha_i$  con el plano medio de la junta en una sección sobre el plano vertical  $\Pi_i$ , que es perpendicular al plano medio en la dirección de la carga de corte (Figura 3). El deslizamiento se produce cuando:

$$\frac{T_i}{N_i} = \tan(\varphi_b + \alpha_i) = \tan(\varphi_p)_i \quad (1)$$

donde  $\varphi_b$  es el ángulo de fricción básico del material y  $T_i$  y  $N_i$  son la fuerza tangencial y normal en la dirección del plano medio, respectivamente (Figura 3). Las fuerzas tangencial y normal en la dirección del plano tangencial en el contacto “i” se expresan mediante  $T_i^*$  y  $N_i^*$ . La notación  $(\varphi_p)_i$  (ángulo de fricción pico) se usa para  $\varphi_b + \alpha_i$ .



**Fig. 3** – Fuerzas de contacto según el primer mecanismo de falla.

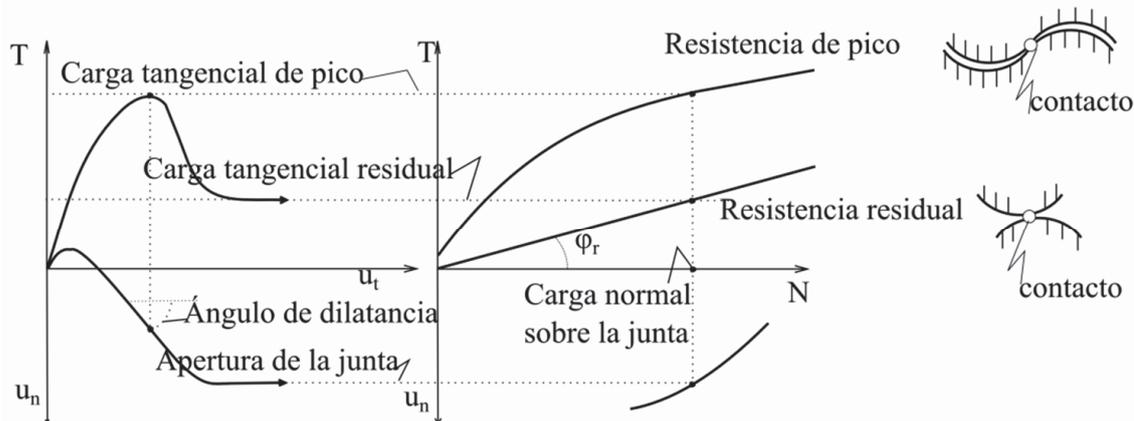
Si estos argumentos se extienden a los “n” contactos entre las caras de la junta y se asume una distribución uniforme de fuerza por unidad de superficie, podemos obtener la ley que rige la resistencia al corte de la junta de acuerdo con el primer mecanismo:

$$\frac{\tau}{\sigma_n} = \tan(\varphi_b + \alpha) \quad (2)$$

La forma práctica de abordar este primer mecanismo de deslizamiento incluye el supuesto de una pendiente promedio constante para todos los contactos. Así, suponemos que el deslizamiento se produce a lo largo de un plano que está formado por el ángulo  $\alpha$  y el plano medio según la ecuación (2). Así, el movimiento entre las paredes de la junta se produce con dilatación constante según este **Fig. 2** – Ley que rige la resistencia máxima al corte de una junta. ángulo; este fenómeno se define como dilatación geométrica porque se produce por la geometría de la superficie de la junta.

Al analizar este mecanismo en términos de superficies más realistas, las ecuaciones descritas anteriormente se verifican en cada estado de equilibrio variando el ángulo de la pendiente en el contacto a lo largo de la apertura de la junta. Esta condición supone una variación en la ley de resistencia del primer mecanismo con el desplazamiento relativo que se produce entre las caras de la junta. Esta configuración geométrica, que se produce principalmente a partir del daño generado

sobre las asperezas, puede explicar las reducciones de resistencia de tal manera que cuando se produce una rotura por deslizamiento con una carga normal constante, la resistencia frente a la tensión tangencial es menor cuando el ángulo de contacto es menor en una posición más alta. Así, para las juntas en las que se produce este primer mecanismo de rotura por deslizamiento, el espacio que constituye la altura de los contactos implica pasar de la resistencia máxima a la básica o residual, donde la dilatancia geométrica es nula (Figura 4). Sin embargo, desde una perspectiva práctica, podemos considerar constante la pendiente  $\alpha_i$  para cada rugosidad y el valor del ángulo de contacto promedio  $\theta_i$ .



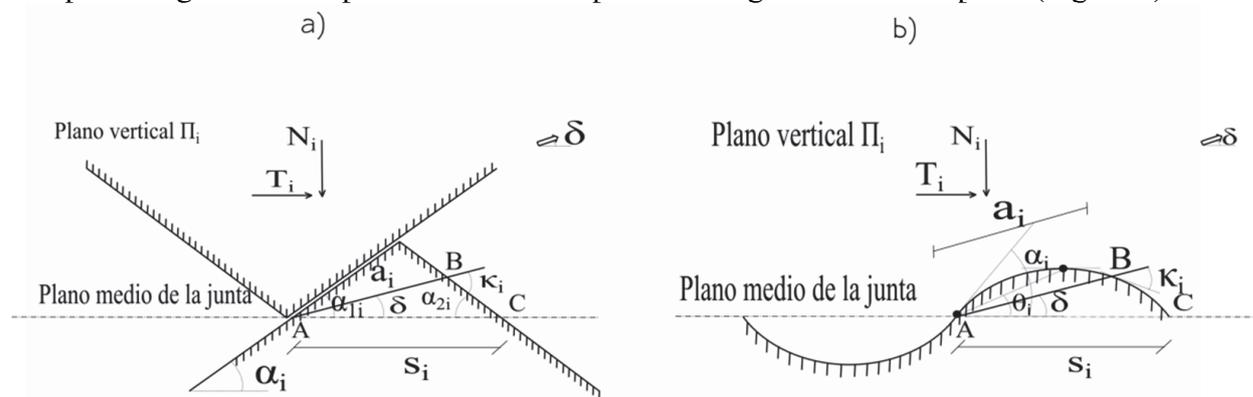
**Fig. 4** – Influencia del perfilado de la rugosidad superficial a lo largo de la apertura de la junta.

## 2.2 – Análisis del segundo mecanismo

La interacción entre los bordes de una junta consta de un gran número de puntos de contacto de manera que la fuerza se transmite a través de estos puntos. La rotura puede ocurrir cuando la carga en cada contacto es suficientemente alta (Figura 1). Esta situación se puede modelar matemáticamente suponiendo que la geometría de la junta se pueda definir mediante un perfil de rugosidad superficial particular y adoptando algunas hipótesis, como se indica a continuación.

La matriz de la roca obedece a la ley que rige la resistencia al corte:  $\tau = \tau(\sigma)$ .

Cuando la rotura se produce por este mecanismo, la junta se mueve con una dilatancia definida por el ángulo  $\delta$ . La superficie de fractura para cada rugosidad dada es plana (Figura 5).



**Fig. 5** – (a) Rotura de una junta en diente de sierra en el contacto “i”; (b) Rotura de rugosidad plana de geometría según arcos de circunferencia en contacto “i”.

Otra hipótesis es que el área de fractura  $a_i$  de cada contacto depende del ángulo de dilatación  $\delta$  según un ángulo particular  $a_i(\delta)$ .

Se utiliza una última hipótesis: la rotura se produce para un ángulo de dilatación  $\delta$  que minimiza la fuerza de corte total  $T$  de la rotura para una cierta carga normal constante  $N$  sobre la junta. Esta condición se puede expresar matemáticamente como:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \delta}\right)_{N=const} = 0 \quad (3)$$

donde  $T = \sum T_i$ .

Con base en estas hipótesis, la ley que rige la resistencia al corte de la junta se puede deducir matemáticamente para relacionar las tensiones en el plano de la junta  $\tau$  y la tensión normal  $\sigma_n$  para el segundo mecanismo de rotura de la siguiente manera (Serrano et al., 2014):

$$\frac{\tau}{\sigma_n} = \frac{T}{N} = \tan(\rho + \kappa_m + \delta) \quad (4)$$

donde  $\delta$  es el ángulo de dilatación en rotura,  $\rho$  es el ángulo de fricción instantáneo y  $\kappa_m$  es el ángulo que representa la reducción del área de contacto en la junta y debe obtenerse de las propiedades geométricas de los diferentes valores de rugosidad (Figura 5) tal que para un  $i$ -ésimo contacto (Serrano et al., 2014):

$$\frac{1}{\tan \kappa_i} = \frac{-1}{a_i} \frac{da_i}{d\delta} \quad (5)$$

### 3 – MÉTODO EMPÍRICO DE BARTON (1973)

Barton (1973) estudió experimentalmente la ley que rige la resistencia al corte de una junta de roca a partir de las siguientes ecuaciones empíricas:

$$\frac{\tau}{\sigma_n} = \tan(\varphi_b + \delta + f) = \tan \varphi_p \quad (6)$$

$$\varphi_p - \varphi_b = JRC \log \frac{JCS}{\sigma_n} \quad (7)$$

dónde

$\tau$  y  $\sigma_n$  son las tensiones al inicio de la rotura según los ángulos tangencial y normal, respectivamente,

$\varphi_b$  es el ángulo de fricción básico de la pared de la junta "sana",

$\delta$  es el ángulo de dilatación al inicio del movimiento de la junta,

$f$  es un parámetro que depende de la rugosidad,

JRC es el coeficiente de rugosidad de la junta, que depende de la rugosidad de la superficie, y

JCS representa la resistencia a la compresión de la junta de roca.

La ecuación (7) está restringida para valores  $JCS/\sigma_n$  mayores de 50, en cuyo caso se les asigna un ángulo de fricción constante e independiente de la carga de:

$$\varphi_p = \varphi_b + 1.7JRC \quad (8)$$

Cuando se alteran las superficies de las juntas, la rugosidad se suaviza y desaparece la dilatación. En este caso, se alcanza el ángulo de fricción residual  $\varphi_r$  y  $\varphi_b = \varphi_r$ .

Se puede considerar un efecto de escala para las pruebas de los valores de JRC y JCS cuando se utilizan ecuaciones de corrección (Barton y Bandis, 1982).

La ecuación (6) depende del ángulo de fricción básico de la pared de la junta ( $\varphi_b$ ), el ángulo de dilatación ( $\delta$ ) y las características de rugosidad ( $f$ ). En la fórmula teórica anterior (ecuación (4)), la resistencia al corte de la junta es una función del ángulo instantáneo de rugosidad ( $\rho$ ), la dilatación geométrica ( $\delta$ ) y el grado de reducción en el área de contacto y depende de las propiedades geométricas que definen la rugosidad ( $\kappa_m$ ). La similitud observada no es aleatoria sino que es el resultado de una adecuada consideración de los factores que contribuyen a la rotura conjunta a través de las hipótesis presentadas y la formulación teórica.

#### 4 – INFLUENCIA DE LOS FACTORES GEOMÉTRICO DE LA RUGOSIDAD

Las influencias de la forma y la geometría de la rugosidad de la superficie en el segundo mecanismo de rotura se muestran claramente en esta formulación teórica mediante el uso de la reducción en el área de contacto  $\kappa_m$ . En la fórmula empírica de Barton, la influencia de la rugosidad superficial en la ley de resistencia se incluyó con el índice JRC, que en su formación inicial se determinó según la similitud de la junta real con los perfiles de rugosidad estándar. Posteriormente, se sugirieron métodos estadísticos y fractales que respaldaban las correlaciones de este índice con los parámetros del perfil de rugosidad conjunta para mejorar la objetividad de la estimación (Reeves, 1985, Lee et al., 1990, Huang et al., 1992, Den Outer et al., 1995, Muralha, 1995, Xie et al., 1999).

Se puede construir una manera simple y representativa de representar la rugosidad de la superficie de una roca a partir de la altura  $h_i$  y la amplitud  $b_i$  para cada rugosidad, de modo que el ángulo de contacto promedio de la irregularidad  $\theta_i$  se pueda representar como  $\tan\theta_i = 2h_i/b_i$ .

Un estudio simplificado consiste en la suposición de formas simples para irregularidades, incluyendo dientes de sierra o curvas ablandadas que forman arcos de circunferencia, de manera que la rugosidad se puede determinar a partir de un solo parámetro: el ángulo de pendiente para cada rugosidad.

En el modelo teórico del segundo mecanismo, la geometría de la junta influye en el parámetro que se define como  $\kappa_m$ . La dependencia  $\kappa_i$  del ángulo de reducción para cada contacto se puede deducir para las distintas geometrías que se utilizan para definir los perfiles de junta (Serrano et al. 2014).

El uso de un perfil de junta en diente de sierra supone trabajar en un problema de deformación plana. Para el contacto “i”, se forman los ángulos  $\alpha_{1i}$  y  $\alpha_{2i}$ , como se muestra en la figura 5a:

$$\kappa_i = \alpha_{2i} + \delta \quad (9)$$

El uso de arcos de circunferencia para perfiles de juntas también está presente en la deformación del plano. El ángulo  $\alpha_i$  corresponde al plano tangente en contacto “i” para crear una geometría de rugosidad superficial ideal y simétrica con respecto al plano medio (Figura 5b):

$$\kappa_i = \alpha_i - \delta \quad (10)$$

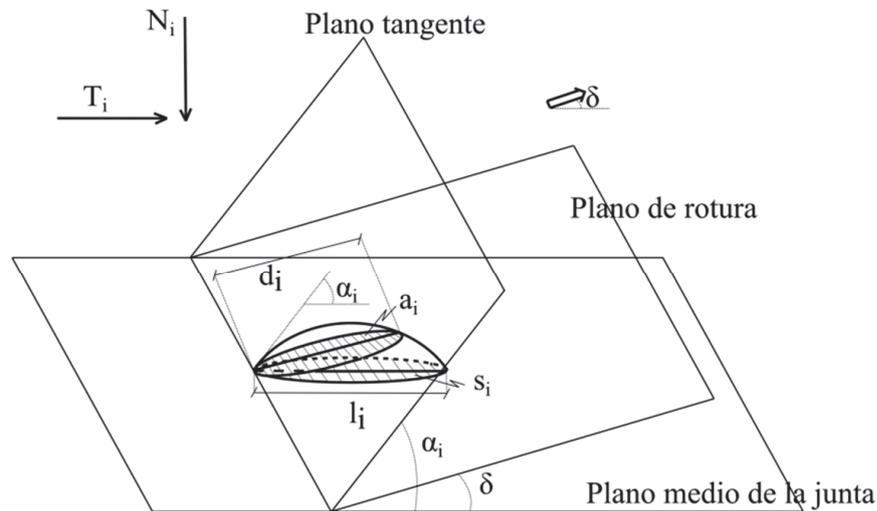
La relación entre el ángulo en el contacto y el ángulo de irregularidad promedio es directa y se muestra mediante  $\alpha_i = 2\theta_i$ .

Para una mejor aproximación al estudio de juntas reales, debemos considerar que la rugosidad superficial tiene una naturaleza tridimensional cuya geometría está formada por casquetes esféricos. En este caso, el área de contacto entre las caras de la junta es menor que en los modelos de deformación plana: específicamente, las intersecciones son circulares. La Figura 6 representa la

geometría evaluada para estas asperezas. El ángulo  $\alpha_i$  sirve como parámetro de rugosidad y forma la tangente al contacto en el plano medio de la junta:

$$\tan \kappa_i = \frac{\tan(\alpha_i - \delta)}{2} \quad (11)$$

Al igual que en el caso anterior, puede resultar más práctico utilizar el ángulo de rugosidad medio  $\theta_i = \alpha_i/2$ .



**Fig. 6** – Rugosidad superficial tridimensional según los casquetes esféricos en el contacto “i”.

La comparación de las predicciones del modelo teórico con los criterios de Barton requiere relacionar el JRC con la variable geométrica  $\alpha_i$  (o  $\theta_i$ ), que se utiliza para definir la rugosidad.

Así, para caracterizar la geometría de irregularidades con formas perfiladas, proponemos caracterizar la dimensión fractal de las juntas con un generador de arco de circunferencia que depende del ángulo de contacto medio ya definido con respecto al plano medio (Figura 6) según la geometría de rugosidad superficial de los arcos de circunferencia. Para este modelo, se obtiene la siguiente dimensión fractal (Serrano et al. 2014):

$$D_b = \frac{\ln 3}{\ln \left( 2 + \frac{\sin 2\theta}{2\theta} \right)} \quad (12)$$

La correlación entre el JRC y la dimensión fractal del modelo establecido se puede obtener con la razón empírica estadística que fue utilizada por Tse y Cruden (1979). La relación empírica entre el valor de JRC y la dimensión fractal para el modelo fractal en la Figura 6 se puede expresar utilizando la siguiente ecuación (Serrano et al. 2014):

$$JRC = 8.0011 \ln(D_b - 1) + 41.8964 \quad (13)$$

## 5 – INFLUENCIA DE LA LEY DE RESISTENCIA INTRÍNSECA DE LA ROCA EN LOS CONTACTOS

### 5.1 – Criterio de rotura de Hoek y Brown Modificado

El criterio de Hoek-Brown Modificado (Hoek et al., 1992, Hoek et al., 2002) es el siguiente:

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_c} = \left( m \frac{\sigma_3}{\sigma_c} + s \right)^n \quad (14)$$

donde  $\sigma_1$  es el esfuerzo principal mayor en la rotura;  $\sigma_3$  es la tensión principal menor;  $\sigma_c$  es la resistencia a la compresión uniaxial de la roca matriz;  $m$  y  $s$  son constantes que dependen de las características del macizo rocoso, su grado de fracturación y el factor de perturbación  $D$ . El valor del exponente  $n$  también depende generalmente del grado de fracturación mediante el Índice de Resistencia Geológica (GSI). Su ecuación es la siguiente (Hoek et al., 2002):

$$n = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \left( e^{-\frac{GSI}{15}} - e^{-\frac{20}{3}} \right) \quad (15)$$

Para juntas de roca, el factor de perturbación  $D$  se puede elegir convenientemente para representar las condiciones de alteración a lo largo de la superficie de la junta.

La expresión para el criterio de rotura de Hoek-Brown Modificado, que involucra las variables de Lambe para el análisis de deformación plana, ( $p=(\sigma_1 + \sigma_3)/2$  y  $q=(\sigma_1-\sigma_3)/2$ ), permite un tratamiento simplificado y normalizado de los fenómenos de rotura de macizos rocosos. Con estas variables, el criterio de rotura de Hoek-Brown Modificado se expresa de la siguiente manera (Serrano et al. 2000):

$$\frac{p}{\beta_n} + \zeta_n = \left[ 1 + (1 - n) \left( \frac{q}{\beta_n} \right)^k \right] \frac{q}{\beta_n} \quad (16)$$

donde  $k$ ,  $\beta_n$  y  $\zeta_n$  son constantes que representan el macizo rocoso y dependen de  $n$ ,  $m$ ,  $s$  y  $\sigma_c$  de la siguiente manera:

$$k = \frac{(1 - n)}{n}; \beta_n = A_n \sigma_c; \zeta_n = \frac{s}{mA_n} \quad (17)$$

donde  $A_n^k = m(1 - n)/2^{1/n}$

La rotura sobre los círculos de Mohr,  $\tau = \tau(\sigma)$ , está definida por (Figura7):

$$\tau = q \cos \psi \quad (18)$$

$$\sigma = p - q \sin \psi \quad (19)$$

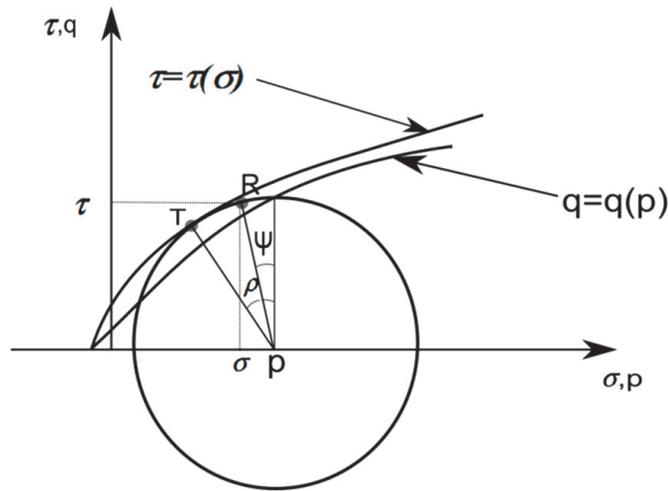
donde  $\psi$  es el ángulo de dilatancia, que marca el punto de rotura del criterio de fallo en el círculo de Mohr.

El concepto del ángulo de fricción instantáneo fué definido por Serrano y Olalla (1994):

$$\sin \rho = \frac{dq}{dp} \quad (20)$$

Según Eq. (16),

$$\sin \rho = \frac{dq}{dp} = \frac{1}{1 + k \left( \frac{q}{\beta_n} \right)^k} \quad (21)$$



**Fig. 7** – Círculo de tensiones de Mohr y tensiones en el plano de rotura.

Las ecuaciones paramétricas se obtienen para el criterio con las variables de Lambe [a partir de (16) y (21)]:

$$q^* \equiv \frac{q}{\beta_n} = \left[ \frac{1 - \sin \rho}{k \sin \rho} \right]^{\frac{1}{k}} \quad (22)$$

$$p_0^* \equiv \frac{p}{\beta_n} + \zeta_n = n \left[ \frac{1 + k \sin \rho}{\sin \rho} \right] \left[ \frac{1 - \sin \rho}{k \sin \rho} \right]^{\frac{1}{k}} \quad (23)$$

Las expresiones paramétricas de las tensiones de rotura en el círculo de Mohr para el criterio de Hoek-Brown Modificado (2002) bajo una ley de flujo no asociado se pueden obtener considerando (18), (19), (20) y (23):

$$\tau^* \equiv \frac{\tau}{\beta_n} = \left[ \frac{1 - \sin \rho}{k \sin \rho} \right]^{\frac{1}{k}} \cos \psi \quad (24)$$

$$\sigma_0^* \equiv \frac{\sigma}{\beta_n} + \zeta_n = \left( \frac{1 - \sin \rho}{k \sin \rho} \right)^{\frac{1}{k}} \left[ n \left( \frac{1 + k \sin \rho}{\sin \rho} \right) - \sin \psi \right] \quad (25)$$

## 5.2 – Criterio de rotura de Mohr-Coulomb Modificado

Singh et al. (2011) y Singh y Singh (2012) sugirieron un criterio de resistencia no lineal de un macizo rocoso como sigue:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_{cj} + 2 \frac{\sin \varphi_j}{1 - \sin \varphi_j} \sigma_3 - \frac{\sin \varphi_j}{1 - \sin \varphi_j} \frac{\sigma_3^2}{\sigma_c} \quad (26)$$

dónde

$\sigma_3$  y  $\sigma_1$  son los esfuerzos principales menores y mayores efectivos en caso de rotura,  
 $\sigma_c$  es la resistencia a la compresión uniaxial de la roca intacta,

$\sigma_{cj}$  es la resistencia del macizo rocoso, y

$\varphi_j$  es el ángulo de fricción, que se obtiene al realizar pruebas de resistencia triaxial en muestras de roca a bajas presiones de confinamiento ( $\sigma_3 \rightarrow 0$ ).

Si  $\sigma_3 > \sigma_c$ , entonces  $\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_{cj} + \frac{\sin \varphi_j}{1 - \sin \varphi_j} \sigma_c$ . Es decir, cuando  $(\sigma_1 - \sigma_3)$  alcanza su valor máximo en (26), entonces este valor se considera constante  $(\sigma_1 - \sigma_3)$  e igual a ese valor máximo.

La ecuación (26) se puede expresar en forma normalizada dividiendo por  $\sigma_c$ :

$$\sigma_1^* - \sigma_3^* = \frac{\sigma_{cj}}{\sigma_c} + 2 \frac{\sin \varphi_j}{1 - \sin \varphi_j} \sigma_3^* - \frac{\sin \varphi_j}{1 - \sin \varphi_j} (\sigma_3^*)^2 \quad (27)$$

La ecuación (27) se puede escribir de una forma más simple para todas las rocas:

$$\sigma_1^* - \sigma_3^* = r + 2n_j \sigma_3^* - n_j (\sigma_3^*)^2 \quad (28)$$

donde  $n_j = \frac{\sin \varphi_j}{1 - \sin \varphi_j}$  y  $r = \frac{\sigma_{cj}}{\sigma_c}$ .

Al utilizar los parámetros de Lambe,  $p = (\sigma_1 + \sigma_3)/2$  y  $q = (\sigma_1 - \sigma_3)/2$ , el criterio de Mohr-Coulomb Modificado se puede expresar de la siguiente manera:

$$2q^* = r + 2n_j(p^* - q^*) - n_j(p^* - q^*)^2 \quad (29)$$

$$2p^* = r + 2(n_j + 1)(p^* - q^*) - n_j(p^* - q^*)^2 \quad (30)$$

Usando las ecuaciones (29) y (30) y llamando  $t^* = \sigma_3^*$ , se pueden obtener las siguientes expresiones:

$$2q^* = r + n_j - \frac{1}{n_j} \left( \frac{\sin \rho}{1 - \sin \rho} \right)^2 \quad (31)$$

$$2p^* = 2 + r + n_j - \frac{2}{n_j} \left( \frac{\sin \rho}{1 - \sin \rho} \right) - \frac{1}{n_j} \left( \frac{\sin \rho}{1 - \sin \rho} \right)^2 \quad (32)$$

$$\sin \rho = \frac{n_j(1 - t^*)}{1 + n_j(1 - t^*)} \quad (33)$$

Para una predicción realista, debe prestarse atención a la evaluación de los parámetros del criterio ( $r$  y  $n_j$ ). La estimación del valor de  $n_j$  requiere el parámetro  $\varphi_j$ , que se puede obtener como se analiza en (Singh y Singh 2012):

$$n_j = n_0 + (1 - r) \quad (34)$$

$$n_0 = \frac{\sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \quad (35)$$

donde  $\varphi$  es el ángulo de fricción, que se obtiene al realizar pruebas de resistencia triaxial en roca intacta a bajas presiones de confinamiento ( $\sigma_3 \rightarrow 0$ ). Por lo tanto,

$$\sin \varphi_j = \frac{1 - r + n_0}{2 - r + n_0} \quad (36)$$

El otro parámetro ( $r$ ) implica estimar  $\sigma_{cj}$ .

De (17), (18), (31), (32) y (33), las expresiones paramétricas de rotura en el círculo de Mohr para el criterio de Mohr-Coulomb Modificado bajo una ley de flujo no asociado son:

$$\tau^* = \frac{1}{2} \left[ r + n_j - \frac{1}{n_j} \left( \frac{\sin \rho}{1 - \sin \rho} \right)^2 \right] \cos \psi \quad (37)$$

$$\sigma^* = \frac{1}{2n_j} \left( \frac{\sin \rho}{1 - \sin \rho} \right)^2 (-1 + \sin \psi) - \frac{1}{n_j} \left( \frac{\sin \rho}{1 - \sin \rho} \right) + \frac{r + n_j}{2} (1 - \sin \psi) + 1 \quad (38)$$

### 5.3 – Ley de flujo no asociado

El ángulo crítico ( $\rho_{crit}$ ) se define como el ángulo de fricción instantáneo a partir del cual el macizo rocoso deja de tener dilatancia positiva. Después de este punto, la dilatancia es nula y no ocurren cambios de volumen durante la plastificación del macizo rocoso. A partir de esta definición, el ángulo crítico se puede obtener con base en las expresiones de (18) y (19), considerando la razón crítica ( $\sigma_1/\sigma_3$ ). Para el criterio original de Hoek y Brown y el criterio de Mohr-Coulomb Modificado, podemos obtener expresiones explícitas mediante las siguientes ecuaciones.

Para el criterio original de Hoek y Brown Modificado:

$$\sin \rho_{crit} = \frac{\frac{\sigma_1}{\sigma_3} - 1}{\left( \frac{\sigma_1}{\sigma_3} + 1 \right) + 2 \sqrt{1 + \frac{\zeta}{2} \left( \frac{\sigma_1}{\sigma_3} - 1 \right)^2}} \quad (39)$$

Para el criterio de Mohr-Coulomb Modificado:

$$\sin \rho_{crit} = \frac{1 + A}{2 + A + B} \quad (40)$$

$$A = \sqrt{1 - n_j(1 + B)[2 + (r + n_j)(1 - B)]} \quad (41)$$

$$B = \frac{\frac{\sigma_1}{\sigma_3} + 1}{\frac{\sigma_1}{\sigma_3} - 1} \quad (42)$$

Este ángulo crítico  $\rho_{crit}$  presenta un valor variable que se sitúa aproximadamente entre  $0^\circ$  y  $30^\circ$  y depende de los valores de los parámetros. Según la expresión del criterio de Hoek y Brown llega a  $0^\circ$  cuando  $\sigma_1 = \sigma_3$  para macizos rocosos.

La dilatancia máxima ( $\sin \psi_{\max}$ ) se produce cuando el macizo rocoso se somete a tracción simple. Las líneas de rotura forman el ángulo  $(\pi/4 - \psi/2)$  con la deformación principal mayor (y por tanto con  $\sigma_1$  al trabajar con materiales coaxiales).

En el caso de que una muestra de roca se someta a una prueba de tracción simple, la rotura siempre se produce en una dirección perpendicular al esfuerzo principal menor, de manera que las líneas de rotura forman un ángulo de  $\pi/2$  con la deformación principal mayor, por lo que el ángulo que corresponde a la dilatancia máxima alcanza un valor de  $\pi/2$ .

Bajo estas consideraciones, en esta investigación se ha considerado una ley de flujo lineal. La expresión matemática de esta ley de flujo es:

$$\sin \psi = \frac{\sin \psi_{\max}}{1 - \sin \rho_{\text{crit}}} (\sin \rho - \sin \rho_{\text{crit}}) \text{ if } \rho < \rho_{\text{crit}} \rightarrow \psi = 0 \quad (43)$$

La ley de flujo propuesta sigue las recomendaciones de Veermer y De Borst (1984), de manera que es función del ángulo de fricción interno (variable según las condiciones de tensión) y del ángulo crítico del material. Por tanto, la ley de dilatancia lineal se puede expresar de la siguiente manera:

$$\sin \psi = E \sin \rho - F \quad (44)$$

donde E y F son constantes no negativas tales que  $E \leq 2$ ,  $F \leq 1$  y  $E - F \leq 1$ .

El caso de  $E = 1$  y  $F = 0$  corresponde a la ley de flujo asociada, mientras que  $E = F = 0$  implica una dilatancia nula.

El estado inferido en una junta de roca corresponde a la calidad alterada de una roca (lo que indica menos dilatancia de lo esperado y, por lo tanto, peor resistencia en comparación con un macizo rocoso sano). Archambault et al. (1993) observaron que al aumentar la escala del análisis, la resistencia pico disminuye, la resistencia residual se mantiene y por lo tanto la dilatancia es menor, por lo que el material comienza a expandirse a un nivel más alto de deformación plástica. Si consideramos que el índice de calidad da cuenta del efecto de la escala, estas observaciones son consistentes con las propuestas de Hoek y Brown (Hoek et al., 1998), que indican que la diferencia entre la resistencia máxima y residual es mayor a menor escala (es decir, más calidad geotécnica).

En este sentido y con respecto a la regla de flujo, algunos trabajos (Hoek y Brown, 1997, Fairhurst, 2003) demostraron la necesidad de utilizar una regla de flujo no asociado y, en particular, adoptar una dilatancia nula para macizos rocosos blandos. Así, los resultados que se muestran en la siguiente sección para el modelo teórico de la resistencia al corte de las discontinuidades están muy cerca de los valores experimentales al adoptar valores de  $E = F = 0$  en (44), es decir, dilatancia cero.

## 6 – APLICACIÓN DEL MODELO TEÓRICO CON UNA LEY DE FLUJO NO ASOCIADA

El segundo mecanismo de fallo está asociado con la rotura de rugosidades y, por lo tanto, requiere incorporar un criterio de resistencia intrínseco con el cual modelar este mecanismo.

Los estudios de rocas requieren criterios de rotura no lineal para considerar las influencias de las presiones de confinamiento en la resistencia al corte. El uso de este criterio de análisis proporciona una base para la comparación con el modelo empírico de Barton.

Se aplicó un criterio de rotura de Hoek y Brown Modificado y un criterio de Mohr-Coulomb Modificado considerando una ley de flujo no asociada en ambos casos.

## 6.1 – Criterio de rotura de Hoek y Brown Modificado

El criterio de rotura de Hoek y Brown Modificado con flujo no asociado se puede expresar en forma paramétrica con el ángulo de fricción instantáneo como variable (Serrano y Olalla, 1994) según las ecuaciones (24) y (25). En tales expresiones, el subíndice “i” se usa cuando se aplica a una aspereza, y el subíndice “r” se usa para indicar variables en el plano de rotura.

Las expresiones que relacionan las fuerzas sobre los ejes globales y las del plano de rotura satisfacen lo siguiente:

$$N_i = a_{ir}(\sigma_{ri} \cos \delta - \tau_{ri} \sin \delta) \quad (45)$$

$$T_i = a_{ir}(\sigma_{ri} \sin \delta + \tau_{ri} \cos \delta) \quad (46)$$

Con base en las expresiones anteriores, podemos obtener ecuaciones específicas para cada tipo de rugosidad modelada. Sin embargo, el caso más realista es el del modelado geométrico con casquetes esféricos. En este caso,

$$a_{ir} = a_i \frac{\sin^2(\alpha_i - \delta)}{\sin^2 \alpha_i} \quad (47)$$

La sustitución de las ecuaciones (24), (25) y (47) en las ecuaciones (45) y (46) para la rotura de Hoek y Brown Modificado produce lo siguiente:

$$N_i = \beta_n a_i \frac{\sin^2(\alpha_i - \delta)}{\sin^2 \alpha_i} \left[ \left( n \left[ \frac{1 + k \sin \rho}{\sin \rho} \right] \left[ \frac{1 - \sin \rho}{k \sin \rho} \right]^{\frac{1}{k}} - \zeta_n - \left[ \frac{1 - \sin \rho}{k \sin \rho} \right]^{\frac{1}{k}} \sin \psi \right) \cos \delta - \left[ \frac{1 - \sin \rho}{k \sin \rho} \right]^{\frac{1}{k}} \cos \psi \sin \delta \right] \quad (48)$$

$$T_i = \beta_n a_i \frac{\sin^2(\alpha_i - \delta)}{\sin^2 \alpha_i} \left[ \left( n \left[ \frac{1 + k \sin \rho}{\sin \rho} \right] \left[ \frac{1 - \sin \rho}{k \sin \rho} \right]^{\frac{1}{k}} - \zeta_n - \left[ \frac{1 - \sin \rho}{k \sin \rho} \right]^{\frac{1}{k}} \sin \psi \right) \sin \delta + \left[ \frac{1 - \sin \rho}{k \sin \rho} \right]^{\frac{1}{k}} \cos \psi \cos \delta \right] \quad (49)$$

donde la ley de dilatancia se expresa mediante (44).

Para abordar el estudio de juntas tridimensionales, se debe considerar la ecuación (11) porque define el ángulo de reducción del contacto.

Debemos resolver el sistema de ecuaciones no lineales que consta de las ecuaciones (48) y (49) (aplicadas a toda la junta), (4), (11) y la ley de dilatancia (44). La solución de este sistema permite obtener los valores del ángulo de dilatancia geométrico  $\delta$  y el ángulo de fricción instantáneo  $\rho$ , a partir de los cuales calcular los valores compatibles de la fuerza normal y cortante que definen la resistencia de la junta de roca.

El lugar geométrico en un diagrama N-T que muestra la resistencia de la junta de roca debe excluir aquellos valores que se obtuvieron para resultados negativos de ángulos de dilatación y para valores de dilatación superiores al ángulo  $\alpha$ , que representa el parámetro geométrico del contacto (pendiente máxima de asperezas), porque estos valores son físicamente imposibles.

Para un valor de dilatación geométrica nula ( $\delta = 0$ ), las ecuaciones (48) y (49) muestran el comportamiento de rotura exactamente como lo predice el criterio de Hoek y Brown cuando se usa una ley de flujo no asociada. Este lugar geométrico del criterio Modificado de Hoek y Brown se identifica con el segundo mecanismo de rotura, que corresponde a la formulación teórica desarrollada. Tal ley de resistencia al corte de la junta debería intersectar con el primer mecanismo de rotura (2), que gobierna el comportamiento a tensiones normales bajas. La ecuación (2) se aplica a todas las geometrías de rugosidad considerando cada ángulo de contacto promedio (es decir,  $\alpha_i = \theta_i$ ).

Como se indicó anteriormente, también debemos evaluar los valores de  $m$  y  $s$  considerando el valor de  $m_0$ , que corresponde a la roca intacta, y considerar cualquier alteración al aplicar este valor a las condiciones de las paredes de las juntas según la ecuación (50). El valor de  $s$  se puede obtener mediante  $s = (m/m_0)^{28/9}$ .

Cuando se utiliza el criterio de rotura de Hoek y Brown, el valor del ángulo de fricción instantáneo depende del nivel de tensión: a medida que aumenta el valor de carga normal, se logra un valor de ángulo menor. Basado en las ecuaciones anteriores, el segundo mecanismo implica una representación particular de las tensiones en el plano  $\tau$ - $\sigma$ , que depende de los parámetros de Hoek y Brown. Cuando se aplican a juntas, estos parámetros deben incluir diferentes factores que son difíciles de cuantificar en la práctica con los criterios que se utilizan normalmente para macizos rocosos. Para las juntas, se pueden incorporar alteraciones si el valor asignado del ángulo básico  $\varphi_b$  (o  $\varphi_r$  residual) se usa para medir estos factores. Por lo tanto, como predice la fórmula de Barton, el valor del ángulo de fricción pico que define la resistencia al corte de la junta se reduce al valor del ángulo básico si la tensión normal es igual a la resistencia a la compresión uniaxial de la pared de la junta.

Igualar el valor del ángulo de fricción básico con lo que predice el segundo mecanismo de rotura para un esfuerzo normal en la junta ( $\sigma_n = \sigma_c$ ) y demostrar que el ángulo de dilatación es positivo nos permite obtener el valor del parámetro  $m$  según el criterio de Hoek y Brown a partir de la siguiente ecuación:

$$\varphi_b = (\rho + \kappa_m + \delta)_{\sigma_n = \sigma_c} \quad (50)$$

Para dilatación nula, la rotura estaría indicada directamente por el criterio de Hoek y Brown, y podemos obtener el valor del parámetro  $m$  que produciría un esfuerzo cortante que es igual a  $\sigma_c \tan \varphi_b$ .

Las ecuaciones de criterio de Hoek y Brown se pueden aplicar para definir los esfuerzos sobre la junta que corresponden a situaciones en las que la resolución de las ecuaciones del segundo mecanismo conduce a ángulos de dilatación geométricos negativos. Debido a que tales ángulos no son físicamente posibles, tales situaciones requieren la propuesta de dilatación nula y por lo tanto una aplicación directa de las ecuaciones del criterio de rotura.

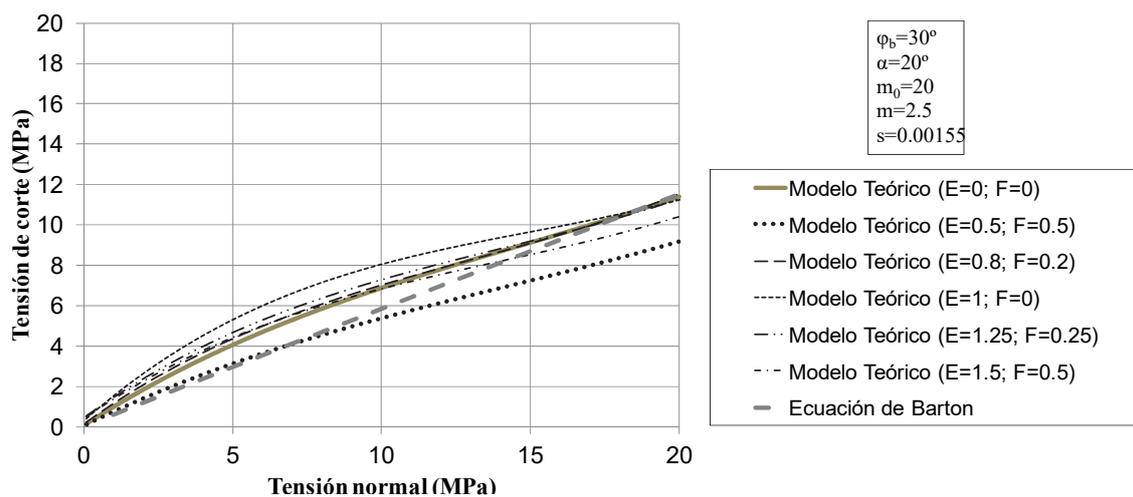
### **6.1.1 – Resultados del modelo teórico con el criterio de Hoek y Brown Modificado**

En el caso más general, tres zonas contribuyen al comportamiento de resistencia de una junta que está sujeta a un esfuerzo cortante (que se muestra en la Figura 11a). La primera zona corresponde al primer mecanismo, que se produce hasta que la ecuación (2) es igual a (4). En la segunda zona, que implica valores decrecientes de dilatación geométrica, las ecuaciones del segundo mecanismo gobiernan el sistema hasta que la dilatación geométrica llega a cero.

Finalmente, la tercera zona se describe mediante las ecuaciones (24) y (25), que corresponden al criterio de rotura.

Las Figuras 8 a 11 analizan la ley que gobierna la resistencia al corte para algunos valores de los parámetros del modelo teórico, considerando áreas de rugosidad tridimensionales iguales y el criterio de rotura de Hoek y Brown Modificado y usando ley de flujo no asociada. Estas representaciones también muestran la ley que rige la resistencia al corte cuando se aplicó el criterio de Barton con el valor del JRC según (13). Estos gráficos permiten comparar ambos modelos para diferentes valores de  $m_0$  y  $\alpha$  y un valor de ángulo de fricción residual de  $30^\circ$  en todos los casos.

Como se mencionó anteriormente, realizamos un análisis con respecto a una ley de flujo no asociado que está representada por la ley lineal (44) para estudiar las juntas de roca. Así, los resultados al evaluar la resistencia a corte de la junta de roca en el diagrama N-T (Figura 8) muestran una aproximación a la ecuación de Barton en función de los parámetros E y F, que definen la ley de dilatación (44). Esta figura muestra el caso que corresponde a una junta de roca con una pendiente máxima de rugosidad  $\alpha = 20^\circ$ , un valor de ángulo de fricción residual de  $30^\circ$  y un parámetro de macizo rocoso  $m_0 = 20$ . El resultado de (50) para el valor m considera la alteración del macizo rocoso en la zona de debilidad por la presencia de la junta; este valor corresponde al valor de  $m = 2,5$ . La situación de flujo asociada se muestra en el gráfico para  $E = 1$  y  $F = 0$ . De acuerdo con este gráfico, el mejor ajuste se obtuvo para  $E = F = 0$ , es decir, para dilatación cero, donde la curva que representa la resistencia de la junta de la roca fue muy cercana al resultado de la ley empírica de Barton (5).



**Fig. 8** – Ley que rige la resistencia al corte según el modelo teórico (con el criterio de Hoek y Brown Modificado) y modelo experimental de Barton en función de los parámetros E y F que definen la ley de dilatación para  $\phi_b = 30^\circ$ ;  $\alpha = 20^\circ$ ;  $m_0 = 20$ ;  $m = 2,5$ .

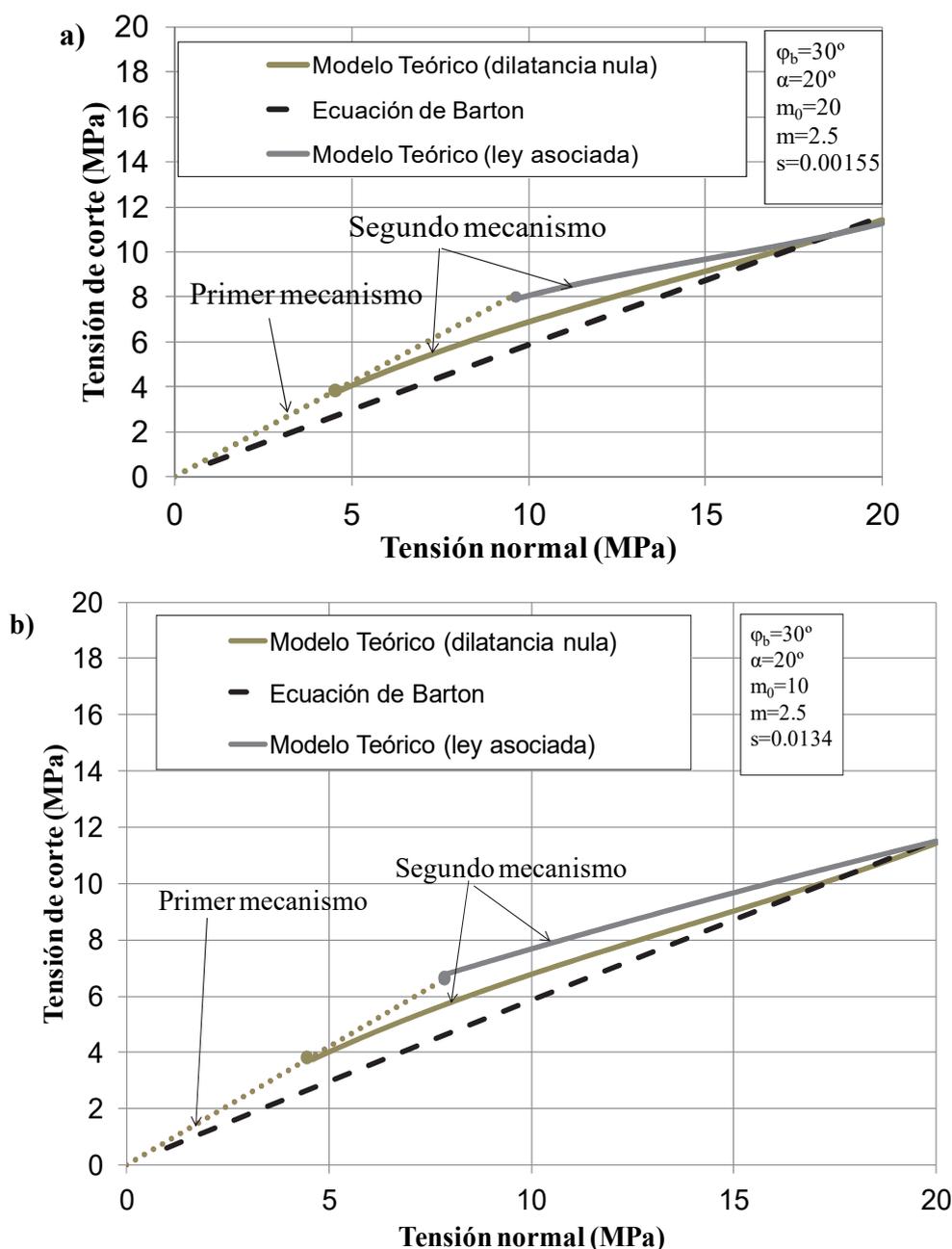
Este primer análisis podría extenderse a todos los casos analizados. La experimentación numérica indicó que la mejor ley de flujo no asociado para estudiar el comportamiento de la resistencia a cortante de juntas de roca según el modelo teórico para el segundo mecanismo de rotura se obtuvo al utilizar dilatación de material nula (Figuras 9 a 11, solo muestran la ley de dilatación nula y la ley de flujo asociada para mayor claridad).

Los resultados con dilatación del material nula están bastante cerca de lo que predice la ley de Barton, sobrestimando levemente la resistencia a esfuerzos normales bajos, donde el ángulo de resistencia pico es mayor que el valor obtenido experimentalmente.

De acuerdo con la aplicación de las ecuaciones anteriores, estas figuras muestran las tres zonas que delimitan la ley que rige la resistencia al cortante hasta alcanzar un valor de 20 MPa para la resistencia a compresión uniaxial de la pared de la junta. En la figura 11a, se llega al caso más general porque las tres zonas de resistencia aparecen cuando se usa dilatación nula. La primera

zona, que se rige por el primer mecanismo, conduce a la zona para el segundo mecanismo, que finaliza cuando se obtienen valores negativos de la dilatación geométrica (valores físicamente imposibles) y luego rige el criterio de rotura cuando se utiliza la ley de flujo no asociada. Para la ley de flujo asociada, el segundo mecanismo desaparece porque no se cruza ni con el criterio de rotura ni con el primer mecanismo.

Los resultados que se obtuvieron con ángulos más altos de la rugosidad (Figuras 11a y 11b) demostraron que los valores de tensión normal bajos afectaron en gran medida la rugosidad a través de la degradación. En estos casos, se obtuvo la dilatación geométrica nula y el comportamiento de la junta vino dado por el criterio de resistencia de la roca. Por tanto, estas

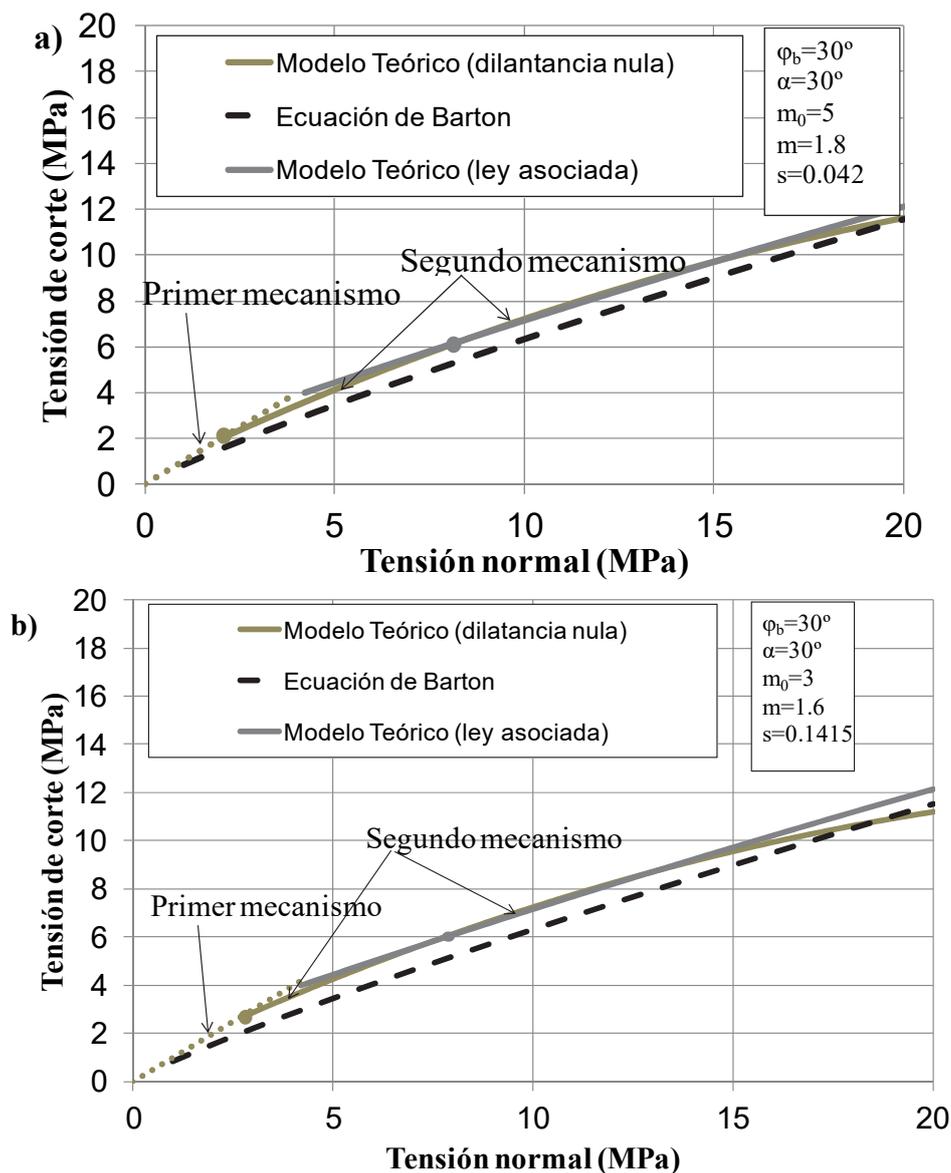


**Fig. 9** – (a) Ley que rige la resistencia al corte según el modelo teórico (con el criterio de Hoek y Brown) y el modelo experimental de Barton para  $\phi_b = 30^\circ$ ,  $\alpha = 20^\circ$ ,  $m_0 = 20$  y  $m = 2.5$ ; (b) ley que gobierna la resistencia al corte de acuerdo con el modelo teórico (dilatación nula del material) y modelo experimental de Barton para  $\phi_b = 30^\circ$ ,  $\alpha = 20^\circ$ ,  $m_0 = 10$  y  $m = 2.5$ .

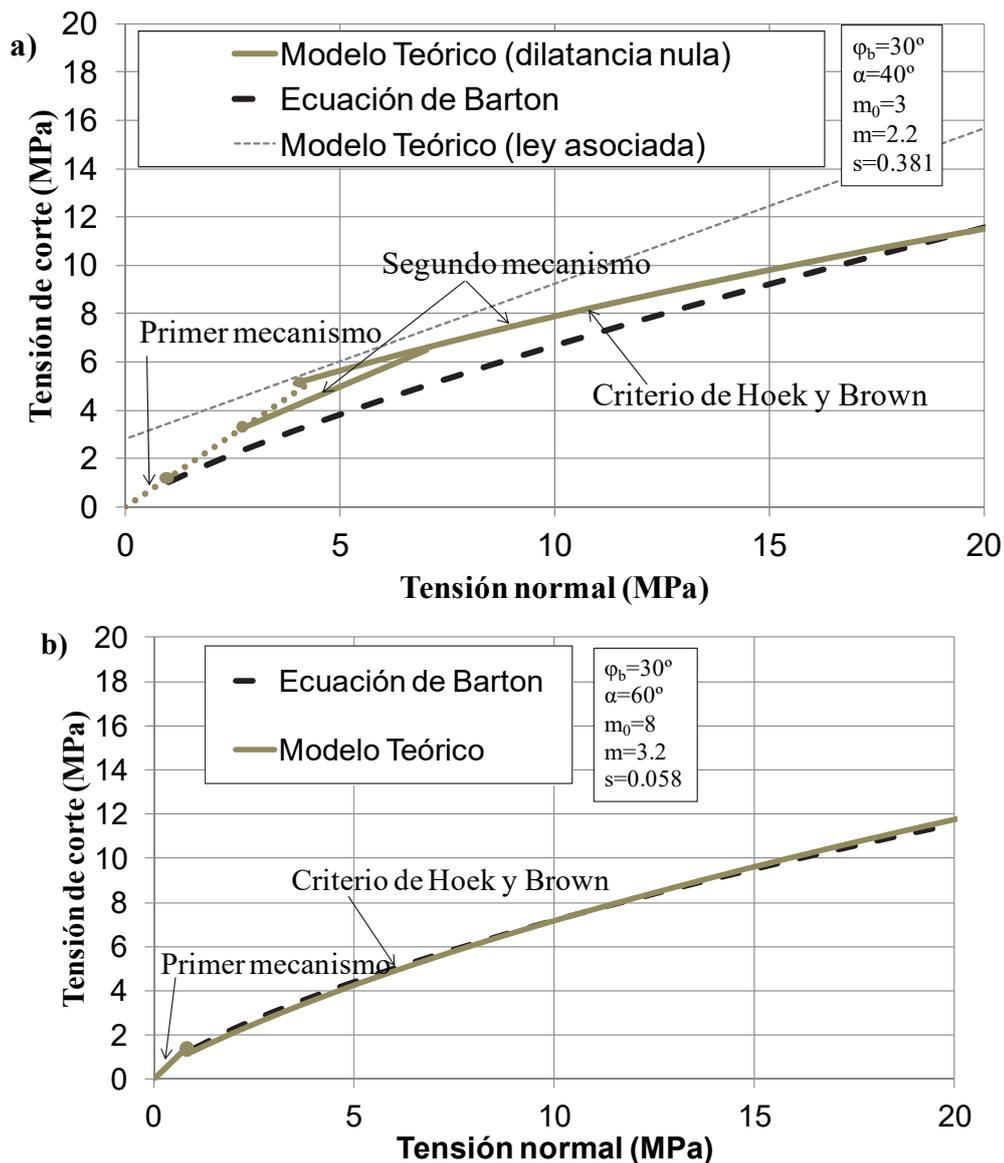
simulaciones de rugosidad con ángulos de contacto elevados correspondían a juntas de roca de baja calidad.

En ángulos de rugosidad más bajos, la carga normal que se aplicó a la junta tuvo un efecto inicial menor, aunque su resistencia sería menor. Por tanto, la zona de dilatancia geométrica distinta de cero alcanzó valores de tensión normales elevados y aumentó la contribución del segundo mecanismo.

La consistencia del modelo es evidente. Las variaciones en el parámetro  $m_0$  fueron casi insignificantes al considerar los valores de  $\alpha$  y  $\phi_b$ . Así, las Figuras 9a y 9b usaron el mismo valor  $\alpha = 20^\circ$ , mientras que las Figuras 10a y 10b usaron  $\alpha = 30^\circ$  al variar el parámetro  $m_0$ .



**Fig. 10** – (a) Ley que rige la resistencia al corte según el modelo teórico (con el criterio de Hoek y Brown) y el modelo experimental de Barton para  $\phi_b = 30^\circ$ ,  $\alpha = 30^\circ$ ,  $m_0 = 5$ , y  $m = 1.8$ ; (b) ley que gobierna la resistencia al corte de acuerdo con el modelo teórico (dilatancia nula del material) y modelo experimental de Barton para  $\phi_b = 30^\circ$ ,  $\alpha = 30^\circ$ ,  $m_0 = 3$  y  $m = 1.6$ .



**Fig. 11** – (a) Ley que rige la resistencia al corte según el modelo teórico (con el criterio de Hoek y Brown) y el modelo experimental de Barton para  $\varphi_b = 30^\circ$ ,  $\alpha = 40^\circ$ ,  $m_0 = 3$  y  $m = 2.2$ ; (b) ley que gobierna la resistencia al corte de acuerdo con el modelo teórico (dilatación nula del material) y modelo experimental de Barton para  $\varphi_b = 30^\circ$ ,  $\alpha = 60^\circ$ ,  $m_0 = 8$  y  $m = 3.2$ .

## 6.2 – Criterio de rotura de Mohr-Coulomb Modificado

Siguiendo el mismo enfoque para el criterio de Hoek y Brown Modificado, las tensiones en el plano de rotura para el criterio de Mohr-Coulomb Modificado con una ley de flujo no asociada pueden expresarse en forma paramétrica como una función del ángulo de fricción instantáneo (ecuaciones (37) y (38)).

Asimismo, las siguientes ecuaciones para el caso más realista de modelado geométrico con casquetes esféricos pueden deducirse al considerar las expresiones de rotación de los ejes para relacionar las fuerzas normales y cortantes en el plano medio de la junta y su perpendicular con (31) y (32):

$$N_i = \sigma_c a_i \frac{\sin^2(\alpha_i - \delta)}{\sin^2 \alpha_i} \left[ \left( 1 + \frac{r + n_j}{2} - \frac{1}{n_j} \left( \frac{\sin \rho}{1 - \sin \rho} \right) + \frac{1}{2n_j} \left( \frac{\sin \rho}{1 - \sin \rho} \right)^2 \right) \cos \delta - \right. \\ \left. - \left( \frac{r + n_j}{2} - \frac{1}{2n_j} \left( \frac{\sin \rho}{1 - \sin \rho} \right)^2 \right) \sin \psi \cos \delta - \left( \frac{r + n_j}{2} - \frac{1}{2n_j} \left( \frac{\sin \rho}{1 - \sin \rho} \right)^2 \right) \cos \psi \sin \delta \right] \quad (51)$$

$$T_i = \sigma_c a_i \frac{\sin^2(\alpha_i - \delta)}{\sin^2 \alpha_i} \left[ \left( 1 + \frac{r + n_j}{2} - \frac{1}{n_j} \left( \frac{\sin \rho}{1 - \sin \rho} \right) + \frac{1}{2n_j} \left( \frac{\sin \rho}{1 - \sin \rho} \right)^2 \right) \sin \psi \sin \delta - \right. \\ \left. - \left( \frac{r + n_j}{2} - \frac{1}{2n_j} \left( \frac{\sin \rho}{1 - \sin \rho} \right)^2 \right) \sin \psi \sin \delta + \left( \frac{r + n_j}{2} - \frac{1}{2n_j} \left( \frac{\sin \rho}{1 - \sin \rho} \right)^2 \right) \cos \psi \cos \delta \right] \quad (52)$$

donde la ley de dilatación se expresa mediante (44).

El sistema de ecuaciones no lineales para las ecuaciones (51) y (52) (aplicadas a toda la junta), (4), (11) y la ley de dilatación (44) producen el ángulo de dilatación geométrico  $\delta$  y el ángulo de fricción instantáneo  $\rho$  y nos permiten calcular los valores compatibles de la fuerza normal y cortante que definen la resistencia de la junta de roca para el segundo mecanismo de rotura.

Se puede utilizar un diagrama N-T para indicar la resistencia de la junta de roca. Los ángulos de dilatación negativos y los valores de dilatación superiores al ángulo  $\alpha$ , que representa el parámetro geométrico del contacto (pendiente máxima de asperezas), son físicamente imposibles. Este segundo mecanismo de rotura está limitado a tensiones bajas en comparación con el primer mecanismo.

Para un valor de dilatación geométrico nulo ( $\delta = 0$ ), las ecuaciones (51) y (52) muestran el comportamiento de rotura exactamente como lo predice el criterio de Mohr-Coulomb Modificado cuando se usa una ley de flujo no asociada.

Cuando se estudia la resistencia al corte de las juntas de roca, los parámetros de Mohr-Coulomb Modificado deben incluir diferentes factores que se cuantifican en la práctica para macizos rocosos. En este caso, la elección de parámetros es clara. Por un lado, este estudio corresponde a una zona que se ve afectada por la discontinuidad y por lo tanto alterada, por lo que se puede considerar un valor prácticamente nulo para el parámetro  $r$  porque su influencia es despreciable al utilizar valores bajos, lo que está del lado de la seguridad. Por otro lado, el parámetro  $\phi$  se puede calcular usando (50), que considera la alteración en la junta de roca.

### 6.2.1 – Resultados del modelo teórico con el criterio de Mohr-Coulomb Modificado

La estimación de los parámetros de este criterio a partir del criterio de Hoek y Brown es de gran utilidad porque el criterio de Hoek y Brown se introdujo hace mucho tiempo y ha recibido contraste con una multitud de datos experimentales y de campo. Además, este criterio simula con éxito las características de rotura más importantes del macizo rocoso, como la dependencia no lineal con los niveles de tensión, la influencia de la resistencia y el tipo de roca y las condiciones de calidad del macizo rocoso.

La equiparación de los valores de la tensión principal mayor para ambos criterios cuando no existe confinamiento ( $\sigma_3 \rightarrow 0$ ) permite obtener la relación entre el parámetro  $s$  del criterio de Hoek y Brown y el parámetro  $r$  del criterio de Mohr-Coulomb Modificado. Por tanto, el parámetro  $r$  está asociado con el GSI porque el parámetro  $s$  depende de este índice. Esta relación se expresa mediante la siguiente ecuación:

$$r = (s)^n \quad (53)$$

donde  $n$  es el exponente del criterio de Hoek y Brown Modificado.

Asimismo, podemos obtener la relación del parámetro  $m$  del criterio de Hoek y Brown con los parámetros  $n_j$  o  $\varphi_j$ ; en este caso, los ángulos de fricción instantáneos son iguales para ambos criterios en una situación no confinada:

$$\sin \varphi_j = \frac{m}{m + 4r} \quad (54)$$

La ecuación (54) muestra las diferencias conceptuales entre los dos criterios y no debe interpretarse como un método para obtener los parámetros de diseño de un criterio a partir del otro cuando estos factores se conocen. Por lo tanto, para la roca intacta,

$$\sin \varphi = \frac{m_0}{m_0 + 4} \quad (55)$$

Esta ecuación indica que se obtiene el mismo valor de ángulo de fricción a partir de la resistencia triaxial bajo bajas presiones de confinamiento en roca intacta para el mismo valor del parámetro  $m_0$ . El valor  $m_0$  está asociado con un tipo de roca en el criterio de Hoek y Brown; por lo tanto, cada tipo de roca se caracteriza de forma única por un ángulo de fricción.

El gráfico de la Figura 12 muestra el resultado de aplicar el criterio de Mohr-Coulomb Modificado al considerar la equivalencia de los parámetros anteriores con el criterio de Hoek y Brown Modificado. La resistencia de la junta de la roca fue mucho mayor cuando se utilizó el criterio de Mohr-Coulomb Modificado, principalmente debido a la diferencia significativa entre los dos criterios. De acuerdo con el criterio de Mohr-Coulomb Modificado, un macizo rocoso de baja calidad se ve muy atenuado por el efecto del confinamiento (Figura 13a); sin embargo, el criterio de Hoek y Brown penaliza el grado de alteración y fracturación de un macizo rocoso en todos los niveles de tensión (Figura 13b). Por lo tanto, a medida que la carga normal aumenta, la diferencia entre ambos criterios de rotura en la junta se vuelve más importante porque los parámetros equivalentes se obtienen bajo tensiones de confinamiento bajas.

Así, debemos obtener los parámetros basados en estudios específicos de juntas de rocas para utilizar el criterio de Mohr-Coulomb Modificado y compararlo con la ley de Barton y por lo tanto realizar una comparación con el criterio de Hoek y Brown; en este caso, el parámetro  $r$  se consideró nulo, mientras que el parámetro  $\varphi$  se calculó mediante la ecuación (50).

Como se indica para el criterio de Hoek y Brown, se utilizaron diferentes valores de  $E$  y  $F$  en la ley de dilatancia (44) para obtener el mejor ajuste a los datos experimentales. La Figura 14 muestra los valores  $E$  y  $F$  para ángulos de rugosidad de  $\alpha = 20^\circ$  y  $\varphi_b = 30^\circ$ , que obtuvieron los mejores resultados para dilatancia nula. En las Figuras 15 y 16, solo se muestran los resultados de dilatancia nula.

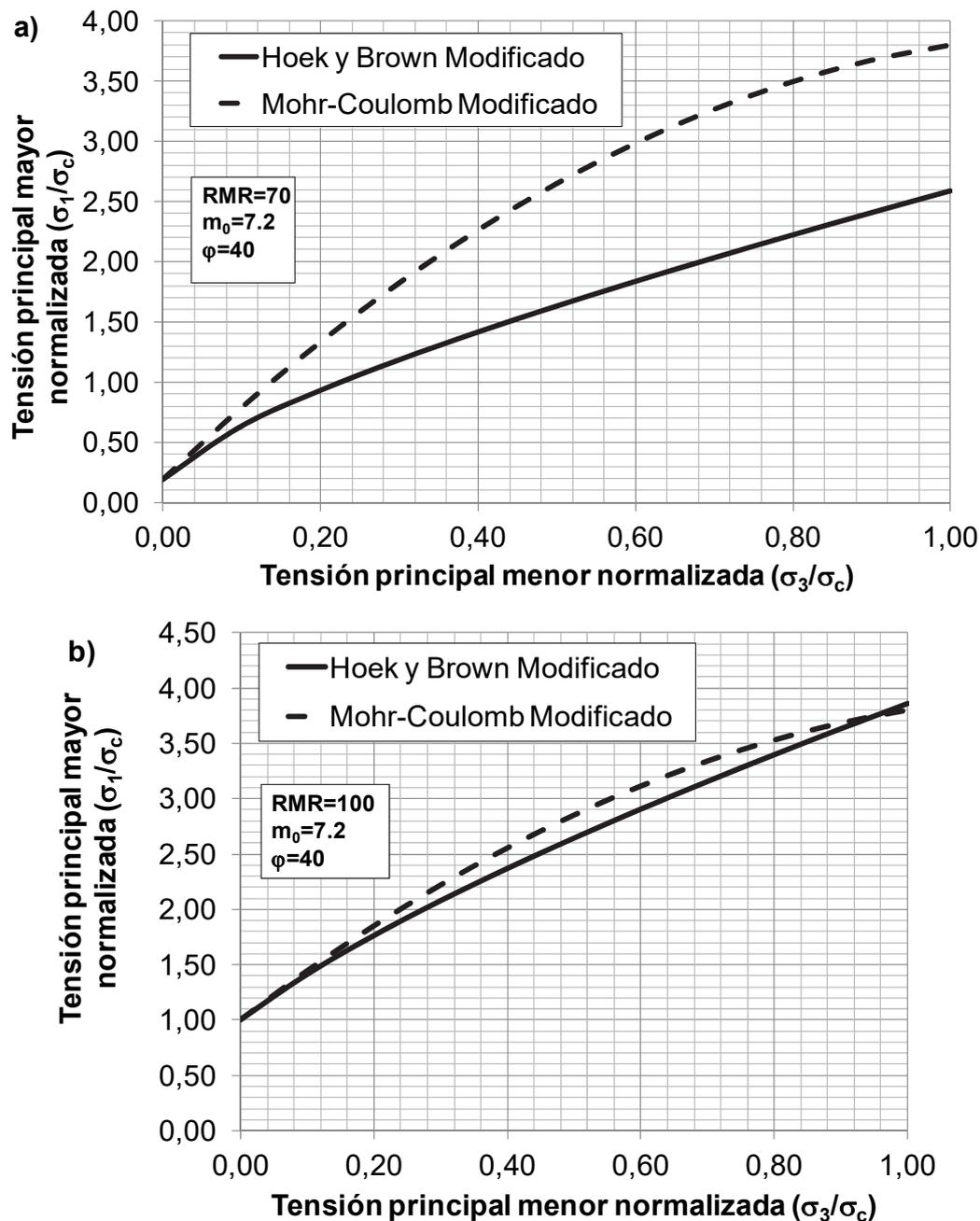
En las Figuras 14 a 16, la ley que gobierna la resistencia al corte para algunos de los valores en los parámetros del modelo teórico se analizó considerando áreas de rugosidad tridimensionales iguales y el criterio de rotura de Mohr-Coulomb Modificado usando una ley de flujo no asociada. Estas representaciones también mostraron la ley que rige la resistencia al corte que se dedujo cuando se aplicó la ley de Barton con el valor del JRC según (13). Estos gráficos nos permiten comparar ambos modelos para diferentes valores de  $\alpha$  y un valor de ángulo de fricción residual de  $30^\circ$  en todos los casos.

Como se observa en los gráficos representados, una ley de flujo asociada produjo valores más altos que los del método de Barton para el modelo teórico de este estudio.

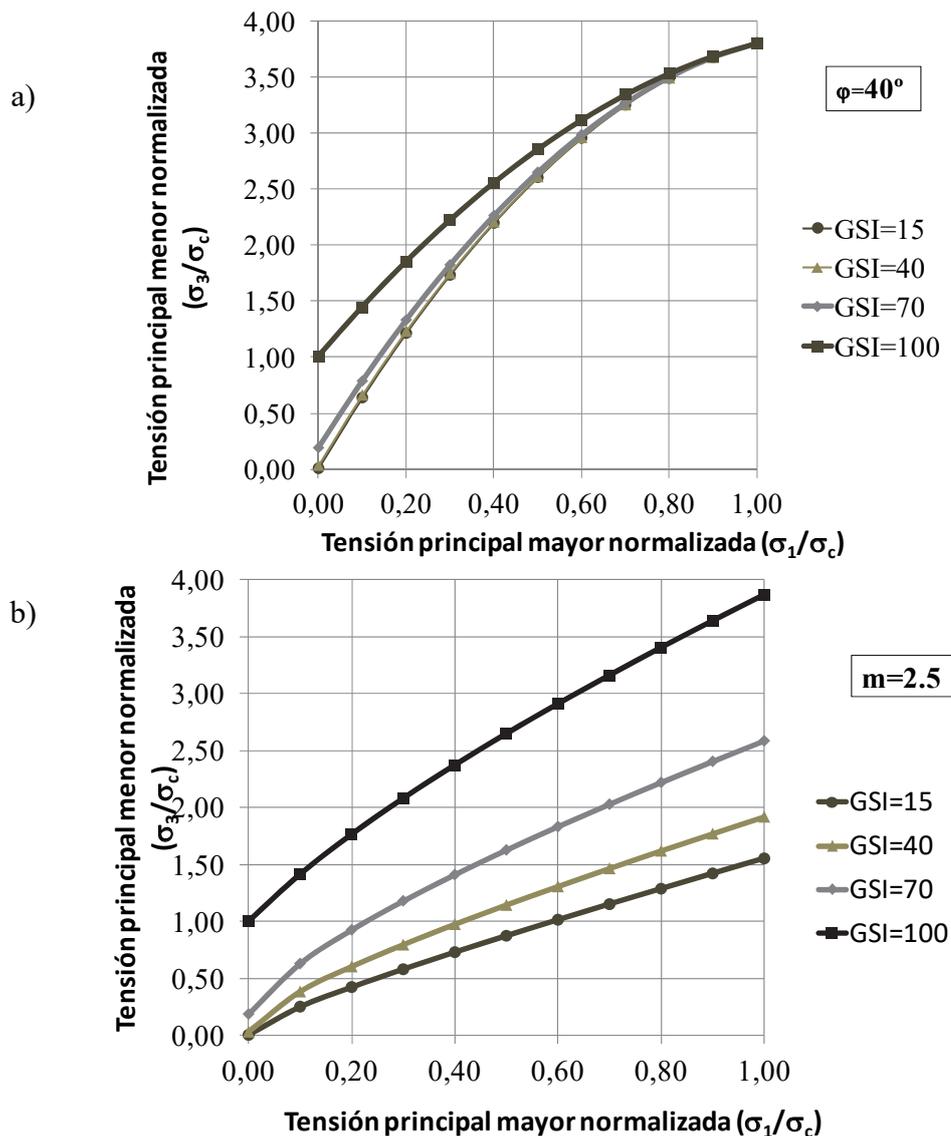
Al igual que con el criterio de Hoek y Brown, los resultados con dilatancia de material nula estuvieron bastante cerca de lo predicho por la ley de Barton, sobrestimando ligeramente la resistencia a tensiones normales más bajas.

De acuerdo con la aplicación de las ecuaciones anteriores, estas figuras muestran las tres zonas que delimitan la ley que rige la resistencia al corte hasta alcanzar un valor de 20 MPa para la resistencia a compresión uniaxial de la pared de la junta. La primera zona, que está gobernada por el primer mecanismo, conduce a la zona del segundo mecanismo, que finaliza cuando se obtienen valores negativos de la dilatancia geométrica (valores físicamente imposibles), y luego gobierna el criterio de rotura utilizando una ley de flujo no asociada.

Los resultados con ángulos de rugosidad más altos indican un macizo rocoso de baja calidad porque este modelo requiere un parámetro de ángulo de fricción bajo.



**Fig. 12** – a) Comparación de ambos criterios de rotura en un diagrama  $\tau$ - $\sigma$  para  $GSI \approx RMR = 70$ ;  
 b) Comparación de ambos criterios de rotura en un diagrama  $\tau$ - $\sigma$  para  $GSI \approx RMR = 100$ .

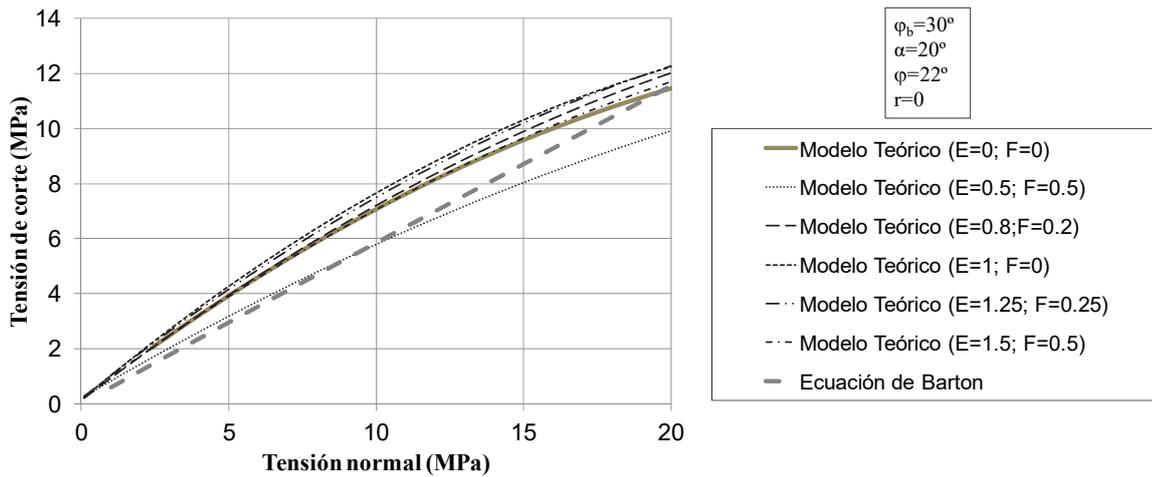


**Fig. 13** – a) Influencia del GSI sobre el criterio de Mohr-Coulomb Modificado para  $\varphi = 40^\circ$ ; b) influencia del GSI en el criterio de Hoek y Brown Modificado para  $m = 2.5$ .

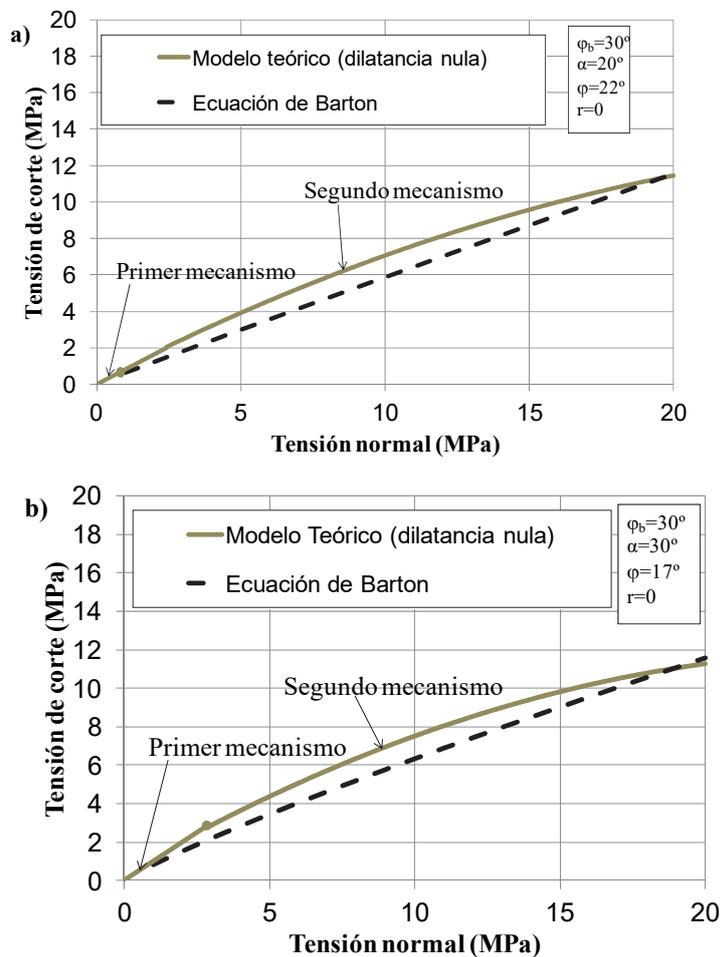
En la Figura 16b se obtuvo una dilatación geométrica nula para el segundo mecanismo, por lo que se aplicó directamente el criterio de Mohr-Coulomb Modificado (solo en este caso se utilizó un valor distinto de cero del parámetro  $r$ ), lo que arrojó valores muy cercanos a lo predicho por la formulación experimental, aunque estos valores fueron ligeramente inferiores.

En ángulos de rugosidad más bajos, la zona de dilatación distinta de cero alcanzó valores altos de tensión normal y aumentó la contribución del segundo mecanismo.

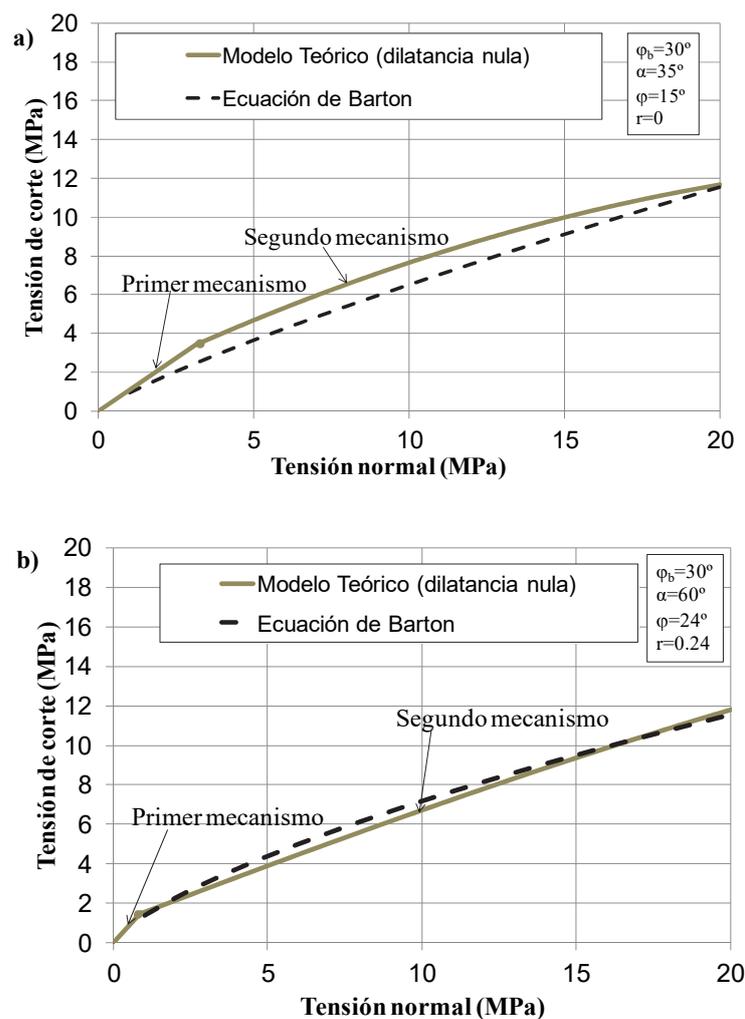
Las juntas lineales no representan de manera óptima el comportamiento tridimensional, por lo que no podemos obtener valores razonables con los criterios de Hoek y Brown Modificados o de Mohr-Coulomb Modificados al determinar un mecanismo de rotura de rugosidad, principalmente porque los modelos de juntas lineales, como los modelos de dientes de sierra o de arco de circunferencia, implican una mayor área de contacto entre las superficies de contacto y sobreestiman la resistencia máxima por encima de los valores realistas y los valores que se obtienen para geometrías tridimensionales. En consecuencia, las situaciones de dilatación nula aparecen con mucha facilidad en casi todos los rangos de parámetros que se asignan al modelo, lo que reduce el estudio al primer mecanismo y al criterio de rotura.



**Fig. 14** – Ley que rige la resistencia al corte de juntas según el modelo teórico (con el criterio de Mohr-Coulomb Modificado) y el modelo experimental de Barton en función de los parámetros E y F que definen la ley de dilatación para  $\phi_b = 30^\circ$ ,  $\alpha = 20^\circ$ ,  $\phi = 22^\circ$  y  $r = 0$ .



**Fig. 15** –(a) Ley que rige la resistencia al corte de una junta según el modelo teórico (con el criterio de Mohr-Coulomb Modificado) y el modelo experimental de Barton para  $\phi_b = 30^\circ$ ,  $\alpha = 20^\circ$ ,  $\phi = 22^\circ$  y  $r = 0$ ; (b) ley que rige la resistencia al corte de acuerdo con el modelo teórico (dilatación nula del material) y el modelo experimental de Barton para  $\phi_b = 30^\circ$ ,  $\alpha = 30^\circ$ ,  $\phi = 17^\circ$  y  $r = 0$ .



**Fig. 16** – (a) Ley que rige la resistencia al corte de juntas según el modelo teórico (con el criterio de Mohr-Coulomb Modificado) y el modelo experimental de Barton para  $\phi_b = 30^\circ$ ,  $\alpha = 35^\circ$ ,  $\phi = 15^\circ$  y  $r = 0$ ; (b) ley que gobierna la resistencia al corte de acuerdo con el modelo teórico (dilatación nula del material) y modelo experimental de Barton para  $\phi_b = 30^\circ$ ,  $\alpha = 60^\circ$ ,  $\phi = 24^\circ$  y  $r = 0.24$ .

## 7 – CONCLUSIONES

Esta investigación estableció una formulación teórica para elaborar los criterios de resistencia al corte para las discontinuidades de la roca. Los resultados se compararon con ecuaciones empíricas, produciendo valores muy cercanos para diferentes estados de rugosidad.

Se identificaron dos mecanismos de rotura de acuerdo con un nivel de carga normal en la junta. Ambos mecanismos tuvieron claras interpretaciones físicas y fueron apoyados por evidencias empíricas en numerosos estudios. El primer mecanismo apareció para tensiones normales bajas y correspondió al deslizamiento entre las caras de cada pared de junta. Cuando la tensión normal actuante era alta, se produce el segundo mecanismo de rotura, que corresponde a una rotura de los contactos por plastificación de la rugosidad. Ambos mecanismos fueron analizados teóricamente y su comportamiento siguió las ecuaciones (2) y (4).

Como indica la formulación teórica para el análisis del segundo mecanismo, las juntas de roca deben estar adecuadamente caracterizadas en base a la elección de modelos de rugosidad con un

criterio de rotura realista y deben considerar tanto la dilatación geométrica que se produce por la rotura de contactos según una dirección como leyes de flujo no asociadas.

La influencia de la rugosidad superficial se caracterizó por la definición de parámetros geométricos simples. En particular, se calculó el ángulo de contacto medio  $\theta$  para la rugosidad. Este valor es fácilmente medible tanto en el campo como en el laboratorio y se define como el ángulo cuya tangente es la altura de rugosidad dividida por la mitad de la longitud en el plano medio, que está cubierto por la rugosidad de la superficie. Se caracterizaron diferentes geometrías de rugosidad asumidas utilizando este parámetro. En particular, se recomienda el uso de irregularidades como casquetes esféricos en el plano medio de la junta para el estudio tridimensional de las discontinuidades.

En esta investigación se utilizaron los criterios Modificados de Hoek y Brown y Mohr-Coulomb. Estos criterios nos permitieron obtener comportamientos muy diferentes para macizos rocosos alterados o fracturados. En este caso, el criterio de Mohr-Coulomb Modificado dependió en gran medida del esfuerzo de confinamiento, perdiendo su influencia después de la alteración o para un macizo rocoso de baja calidad cuando aumentó la presión de confinamiento (a diferencia del criterio de Hoek y Brown). Este hecho hace que este criterio sea inútil para comparar lo que ocurre en juntas sometidas a tensiones elevadas mediante la transformación directa de parámetros entre ambos criterios, ya que esta transformación se produce a tensiones bajas.

Los parámetros fueron elegidos para que los resultados de la ley de Barton pudieran asociar un ángulo de resistencia residual a un esfuerzo normal que igualara la resistencia uniaxial de la junta. Para el criterio de Mohr-Coulomb Modificado, se sugiere un valor para el parámetro  $s$  igual a cero.

Se utilizó una ley lineal de dilatación (44) para evaluar la importancia del flujo no asociado, por lo que los mejores resultados se obtuvieron para dilatación de material nula, que consideró cambios significativos para macizos rocosos suaves o zonas de debilidad alteradas.

Se obtuvieron resultados muy cercanos a los valores empíricos (ecuación de Barton) utilizando asperezas de ángulos de  $20^\circ$  a  $60^\circ$ , lo que mejoró las predicciones del modelo teórico para el segundo mecanismo con respecto al caso de flujo asociado.

La fórmula teórica que se presentó en este documento podría usarse para estudiar la resistencia al corte de las juntas de rocas con base en suposiciones no empíricas con un proceso de análisis relativamente simple y práctico.

## 8 – REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Alejano, L.R.; Alonso E. (2005). *Considerations of the dilatancy angle of rocks and rock masses*. Int J Rock Mech Sci and Geom Abstr, 42(4):481–07.
- Archambault, G.; Roleau, A.; Daigneault, R.; Flamand, R. (1993). *Progressive failure of rock masses by a self similar anastomosing process of rupture at all scales and its scale effects on their shear strength*. In: Pinto da Cunha, editor. Proc. 2º Int. Workshop on Scale Effects in Rock Masses. Lisbon. Balkema, pp. 133-141.
- Asadollahi, P. (2009). *Stability analysis of a single three dimensional rock block: effect of dilatancy and high-velocity water jet impact*. PhD Thesis, University of Texas, Austin.
- Barton, N. (1973). *Review of a new shear strength criterion for rock joints*. Eng Geol, 7:287–332.
- Barton N. (1976). *Rock mechanics review: the shear strength of rock and rock joints*. Int J Rock Mech Min Sci, 13:255–79.
- Barton, N.; Bandis, S. (1982). *Effects of block size on the shear behavior of jointed rock*. In: Proceedings of the 23rd US Symposium on Rock Mechanics, Berkeley, California.

- Barton, N.; Choubey, V. (1977). *The shear strength of rock joints in theory and practice*. Rock Mech Rock Eng, 10: 1-54.
- Belem, T.; Souley, M.; Homand, F. (2007). *Modelling surface roughness degradation of rock joint wall during monotonic and cyclic shearing*. Acta Geotech, 2:227-48.
- Den Outer, A.; Kaashoek, J.F.; Hack, H.R.G.K. (1995). *Difficulties with using continuous fractal theory for discontinuity surfaces*. Int J Rock Mech Min Sci, 32:3-9.
- Detournay, E. (1986). *Elastoplastic model of a deep tunnel for a rock with variable dilatancy*. Rock Mech Rock Eng, 19:99-108.
- Fairhurst, C. (2003). *Stress determination in rock: a brief history and review*. Int J Rock Mech Min Sci, 40:957-73.
- Gens, A.; Carol, I.; Alonso, E.E. (1990). *A constitutive model for rock joints, formulation and numerical implementation*. Comput Geotech, 9:3-20.
- Grasselli, G.; Egger, P. (2003). *Constitutive law for the shear strength of rock joints based on three-dimensional surface parameters*. Int J Rock Mech Min. Sci, 40:25-40.
- Heuze, F.E.; Barbour, T.G. (1982). *New models for rock joints and interfaces*. ASCE J Geotech Eng Div, 108(5):757-76.
- Hoek, E.; Brown, E.T. (1997). *Practical estimates of rock mass strength*. Int J Rock Mech Sci and Geom Abstr, 34(8):1165-187.
- Hoek, E.; Carranza-Torres, C.; Corkum, B. (2002). *Hoek-Brown failure criterion – 2002 Edition*. In Hammah, R. Bawden, W., Curran, J., Telesnicki M, editors. Proceedings of NARMS-TAC 2002, Mining Innovation and Technology. Toronto, pp. 267-73.
- Hoek, E.; Marinos, P.; Benissi, M. (1998). *Applicability of the geological strength index (GSI) classification for weak and sheared rock masses; the case of the Athens schist formation*. Bull Eng Geol Env, 57(2):151-160.
- Hoek, E.; Wood, D.; Shah, S. (1992). *A modified Hoek-Brown criterion for jointed rock masses*. In: Hudson, J.A., editor. Proceedings of the Rock Characterization Symposium of ISRM: Eurock 92. London: British Geotechnical Society, pp. 209-14.
- Homand, F.; Lefevre, F.; Belem, T.; Souley, M. (1990). *Rock joints behaviour under cyclic direct shear tests*. In: Amadei K, Smealie & Scott, editors. Rock mechanics for industry. Rotterdam: Balkema, p. 399-406.
- Huang, X.; Haimson, B.C.; Plesha, M.E.; Qui, X. (1993). *An investigation of the mechanics of rock joints – part I. Laboratory investigation*. Int J Rock Mech Min Sci, 30:257-69.
- Huang, S.L.; Oelfke, S.M.; Speck, R.C. (1992). *Applicability of fractal characterization and modelling to rock joint profile*. Int J Rock Mech Min Sci, 29:89-8.
- Hutson, R.W. (1987). *Preparation of duplicate rock joints and their changing dilatancy under cyclic shear*. PhD Thesis, Northwestern University, Evanston.
- Hutson, R.W.; Dowding, C.H. (1990). *Joint asperity degradation during cyclic shear*. Int J Rock Mech. Min Sci, 27(2):109-19.
- Jaeger, J.C. (1971). *Friction of rocks and stability of rock slopes*. Geotechnique, 21(2):97-34.
- Ladanyi, B.; Archambault, G. (1970). *Simulations of the shear behavior of a jointed rock mass*. In: Proceedings 11th US Symposium on Rock Mechanics, Berkeley, p. 105-125.

- Lee, Y.H.; Carr, J.R.; Barr, D.J.; Haas, C.J. (1990). *The fractal dimension as a measure of the roughness of rock discontinuity profiles*. Int J Rock Mech Min Sci, 27:453-64.
- Lee, H.S.; Park, Y.J.; Cho, T.F.; You, K.H. (2001). *Influence of asperity degradation on the mechanical behavior of rough rock joints under cyclic shear loading*. Int J Rock Mech Min Sci, 38:976-80.
- Leichnetz, W. (1985). *Mechanical properties of rock joints*. Int J Rock Mech Min Sci, 22(5):313–21.
- Medhurst, T.P.; Brown, E.T. (1998). *A study of the mechanical behaviour of coal for pillar design*. Int J Rock Mech Min Sci, 35(8):1087–105.
- Muralha, J. (1995). *Fractal dimension of joint roughness surfaces*. In: Proceedings Fractured and Jointed Rock Masses, Rotterdam, p. 205-12.
- Newland, P.L.; Alley, B.H. (1957). *Volume changes in drained triaxial tests on granular materials*. Geotechnique, 7:17-34.
- Patton, F.D. (1966). *Multiple modes of shear failure in rock*. In: Proceedings of the First Congress of International Society of Rock Mechanics, Lisboa, Portugal, p. 509-513.
- Plesha, M.E. (1987). *Constitutive models for rock discontinuities with dilatancy and surface degradation*. Int J Num Anal Meth Geomech, 11:345-62.
- Qiu, X.; Plesha, M.E.; Huang, X.; Haimson, B.C. (1993). *An investigation of the mechanics of rock joints-part II: analytical investigation*. Int J Rock Mech Min Sci, 30(3):271–87.
- Reeves, M.J. (1985). *Rock surface roughness and frictional strength*. Int J Rock Mech Min Sci, 22:429-42.
- Saeb, S.; Amadei, B. (1992). *Modeling rock joints under shear and normal loading*. Int. J. Rock Mech Min Sci, 29:267-78.
- Samadhiya, N.K.; Viladkar, M.N.; Al-Obaydi, M.A. (2008). *Three-dimensional joint/interface element for rough undulating major discontinuities in rock masses*. Int J Geomech, 8(6):327–35.
- Schneider, H.J. (1976). *The friction and deformation behavior of rock joints*. Rock Mech Rock Eng, 8:169-84.
- Serrano, A.; Olalla, C. (1994). *Ultimate bearing capacity of rock masses*, Int J Rock Mech Min Sci, 31(2):93-06.
- Serrano, A.; Olalla, C.; Galindo, R.A. (2014). *Micromechanical basis for shear strength of rock discontinuities*. Int J Rock Mech Min Sci, 70:533–46.
- Serrano, A.; Olalla, C.; Gonzalez, J. (2000). *Ultimate bearing capacity of rock masses based on the modified Hoek-Brown criterion*. Int. J. Rock Mech. Min. Sci, 37:1013–1018.
- Singh, M.; Raj, A.; Singh, B. (2011). *Modified Mohr–Coulomb criterion for non-linear triaxial and polyaxial strength of intact rocks*. Int J Rock Mech Min Sci, 48:546–55.
- Singh, M.; Singh, B. (2012). *Modified Mohr–Coulomb criterion for non-linear triaxial and polyaxial strength of jointed rocks*. Int J Rock Mech Min Sci, 51:43–52.
- Tse, R.; Cruden, D.M. (1979). *Estimating joint roughness coefficients*. Int J Rock Mech Min Sci, 16:303-7.

- Veermer, P.A.; De Borst, R. (1984). *Non-associated plasticity for soils, concrete and rock*. Heron, 29(3):3–64.
- Xie, H.; Wang, J.A.; Kwasniewski, M.A. (1999). *Multifractal characterization of rock fracture surfaces*. Int J Rock Mech Min Sci, 36:19-7.
- Zubelewicz, A.; O'Connor, K.; Dowding, C.H.; Belytschko, T.; Plesha, M.E. (1987). *A constitutive model for cyclic behavior of dilatant rock joints*. Proceedings 2nd International Conference on constitutive laws for engineering materials, Arizona, p. 1137–1144.