

MODELAÇÃO 2.5D MEF-PML DE VIBRAÇÕES INDUZIDAS EM TÚNEIS

Modeling of vibrations induced in tunnels: a 2.5D FEM-PML approach

Patrícia Lopes*

Pedro Alves Costa**

António Silva Cardoso***

Rui Calçada****

RESUMO – A simulação e o estudo da problemática das vibrações induzidas pelo tráfego ferroviário em túneis é uma tarefa difícil e complexa. O carácter semi-indefinido do domínio circundante do túnel associado às características tridimensionais do problema são os principais responsáveis pela complexidade do problema. Uma solução eficiente e precisa para a simulação do comportamento dinâmico de estruturas muito longas, como por exemplo, vias férreas ou túneis, é proposta utilizando técnicas 2.5D no contexto do método dos elementos finitos, e adoptando PML's para o tratamento das fronteiras devido à truncatura do domínio. Dado o recurso a uma abordagem 2.5D MEF-PML não ser usual, as equações do 2.5D PML são derivadas, salientando-se a compatibilidade com o 2.5D MEF. Após essa breve descrição do modelo, exemplos de validação são apresentados, demonstrando a precisão do modelo. Por último, um estudo paramétrico é desenvolvido por forma a avaliar a influência de algumas propriedades do túnel e do solo, nas vibrações induzidas à superfície do maciço.

SYNOPSIS – The simulation and study of problems related with vibrations induced by railway traffic in tunnels is a difficult and complex task. The semi-indefined character of the domain surrounding the tunnel associated to the 3-dimensional characteristics of the problem are the major causes of that complexity. An efficient and accurate solution for the simulation of the dynamic behavior of very long structures, i.e., railways or tunnels, is proposed by using 2.5D techniques in the context of the finite elements method, and adopting PML's for the treatment of the boundaries due to the truncation of the finite elements mesh. Since the resource to 2.5D FEM-PML approach is not very usual, the equations of the 2.5D PML are derived, highlighting the compatibility with the 2.5D FEM. After that brief presentation of the model, a range of validation examples are depicted, showing the accuracy of the model. Finally, a parametric study is presented in order to evaluate the influence of some tunnel and ground properties in the vibrations assessed at the ground surface.

Palavras Chave – Modelação numérica 2.5D MEF-PML, propagação de ondas, interacção túnel-maciço.

Keywords – Numerical modeling 2.5D FEM-PML, wave propagation, tunnel-ground interaction.

* Professor Adjunto, Departamento de Engenharia Civil, Instituto Superior de Engenharia do Porto, Portugal. orcid.org/0000-0001-7171-499X E-mail: cpl@isep.ipp.pt

** Professor Auxiliar, Departamento de Engenharia Civil, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Portugal. orcid.org/0000-0003-1237-0108 E-mail: pacosta@fe.up.pt

*** Professor Catedrático, Departamento de Engenharia Civil, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Portugal. orcid.org/0000-0002-6025-4681 E-mail: scardoso@fe.up.pt

**** Professor Catedrático, Departamento de Engenharia Civil, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Portugal. orcid.org/0000-0002-2375-7685 E-mail: ruiabc@fe.up.pt

1 – INTRODUÇÃO

A construção de vias ferroviárias em meio urbano a que se tem assistido nos últimos anos tem suscitado diversas questões relativas à geração e propagação de vibrações, as quais afectam o conforto e qualidade de vida dos habitantes das suas imediações. Este assunto reveste-se de especial pertinência no caso de tráfego em túneis inseridos em malha urbana, dada a proximidade da infraestrutura ferroviária de edifícios com funcionalidade habitacional ou de serviços, sem esquecer os elevados requisitos apresentados por diversas indústrias modernas no que concerne à ocorrência de vibrações.

A problemática da geração e propagação de vibrações devido ao tráfego em túneis é complexa por causa da elevada quantidade de factores que influenciam a resposta do sistema, nomeadamente: i) os mecanismos de geração da excitação dinâmica do comboio; ii) a interacção dinâmica entre o túnel e o maciço circundante; iii) a geometria e localização do túnel; iv) a heterogeneidade geométrica e material inerente às formações geotécnicas, etc.

A comunidade técnico-científica dedicou, ao longo da última década, um esforço considerável ao desenvolvimento de métodos numéricos e semi-analíticos para a modelação de estruturas com desenvolvimento infinito quando sujeitas a solicitações dinâmicas. A importância crescente deste problema está relacionada com a actual expansão de infraestruturas de transporte modernas como, por exemplo, de transporte ferroviário de alta velocidade e linhas de metro. Modelar estas estruturas é difícil, sendo várias as razões que contribuem para essa complexidade, nomeadamente o carácter infinito da sua geometria e as cargas móveis a que são submetidas. No entanto, estas dificuldades têm sido satisfatoriamente ultrapassadas recorrendo a certos pressupostos que são utilizados com alguma frequência, nomeadamente, admitindo que o meio é periódico ou invariante ao longo da direcção de desenvolvimento da estrutura, o que permite reduzir drasticamente o esforço de cálculo associado à solução numérica do problema tridimensional.

Os modelos periódicos para a simulação dinâmica de túneis têm sido amplamente aplicados por Gupta et al. (2007, 2009, 2010) utilizando um modelo numérico tridimensional híbrido do tipo MEF-MEC anteriormente desenvolvido por Clouteau et al. (2005). Esta abordagem numérica tira partido do método dos elementos finitos (MEF) para a simulação de geometrias complexas, como é o caso de um túnel, recorrendo ao método dos elementos de contorno (MEC) para a simulação do meio indefinido, correspondente ao maciço geotécnico. Apesar da elevada precisão deste tipo de modelos, o esforço numérico inerente é ainda assim muito significativo, desencorajando a sua utilização em aplicações práticas.

Alternativamente, para estruturas longitudinalmente invariantes, uma abordagem 2.5D pode ser aplicada, sendo a solução tridimensional obtida através da discretização numérica da secção transversal combinada com a transformação de Fourier do domínio ao longo da direcção longitudinal. Este método tem sido utilizado no estudo de vários casos de infraestruturas de transporte ferroviário, tanto à superfície como em túneis (Lopes et al., 2010; Galvín et al., 2010; Alves Costa et al., 2010; Lombaert e Degrande, 2009; Sheng et al., 2006; Yang e Hung, 2008). Esta metodologia pode ser aplicada tanto a modelos baseados no método dos elementos finitos (Alves Costa et al., 2010; Yang e Hung, 2008; Yang e Hung, 2001) como no método dos elementos de contorno (Lombaert e Degrande, 2009), como ainda a modelos híbridos que tiram vantagem dos dois métodos (Galvín et al., 2010; Sheng et al., 2006; Alves Costa et al., 2012a), ou mesmo à combinação de métodos sem malha com o MEF, tal como ilustram de modo promissor os estudos preliminares levados a cabo por Amado Mendes et al. (2014). Dado o carácter indefinido do maciço de fundação, a formulação 2.5D MEC é particularmente adequada para a análise deste tipo de problemas, dando cumprimento exacto à condição de Sommerfeld (Domínguez, 1993; Galvín e Domínguez, 2009). Sem embargo, o recurso ao MEC na simulação de geometrias complexas revela-se difícil, podendo mesmo esvanecer-se alguma da vantagem computacional inerente ao método. Por outro lado, a versatilidade do MEF torna este método atraente para modelar geometrias complexas, embora os inconvenientes inerentes à simulação de domínios indefinidos requeiram procedimentos especiais,

que nem sempre são precisos ou simples de implementar. Para superar estas limitações de ambos os métodos, o recurso ao acoplamento MEF- MEC na abordagem 2.5D tem sido adoptado por vários autores (Galvín et al., 2010; Alves Costa et al., 2012a; François et al., 2010; Alves Costa et al., 2012b).

Apesar das virtudes potenciais da abordagem 2.5D MEF-MEC, a sua aplicação requer procedimentos numéricos complexos (François et al., 2010) e, geralmente, a eficiência computacional tende a diminuir no caso de estruturas enterradas, dada a possível ocorrência de modos espúrios que exigem um tratamento especial (François et al., 2008). Nesses casos, a opção por uma abordagem 2.5D MEF para todo o domínio de interesse é bem mais simples e eficiente. Em relação a este aspecto, é de mencionar que a abordagem pelo MEF, por excelência adequada à simulação de geometrias complexas, pode incorporar facilmente a análise de fenómenos não lineares. Acresce que a consideração de modelações menos restritivas para o problema, como, por exemplo, o comportamento anisotrópico do solo, pode ser atendido com mais facilidade através de uma abordagem pelo MEF quando comparando com uma formulação pelo MEC (Rieckh et al., 2012), dado não ser necessário o conhecimento de funções de Green específicas para tal problema. Outras questões podem também ser referidas: por exemplo, geometrias complexas associadas a túneis duplos, tal como analisado por Kuo et al. (2011), podem ser simuladas por uma abordagem pelo MEF sem qualquer alteração particular das equações originais. Da mesma forma, as heterogeneidades dos materiais, que podem desempenhar um papel importante na previsão de vibrações induzidas pelo tráfego em túneis (Jones e Hunt, 2011; Jones e Hunt, 2012), podem também ser facilmente introduzidas numa abordagem pelo método dos elementos finitos.

Não obstante as vantagens da abordagem pelo MEF referidas, este método apresenta uma importante desvantagem que não pode ser negligenciada: o MEF, especialmente vocacionado para a análise de meios confinados, requer a definição completa do domínio, o que cria dificuldades relevantes quando se trata da simulação de domínios ilimitados. Com efeito, um tópico de particular interesse é a formulação de procedimentos especiais para tratar os efeitos de fronteira, que são inerentes à truncatura do domínio proveniente da discretização do meio através de elementos finitos. Nos problemas estáticos, a contribuição do terreno reflecte-se em termos de rigidez, de modo que é possível truncar o domínio a uma distância suficientemente afastada da zona de interesse, onde a deformação é tão pequena que pode ser desprezada. Porém, no caso de análises dinâmicas, o modelo adoptado para o maciço de fundação deve cumprir os requisitos de representar não apenas a rigidez dinâmica do solo mas também a condição de radiação de Sommerfeld (Domínguez, 1993; Sommerfeld, 1949), a qual postula a impossibilidade de a energia radiada regressar ao domínio de interesse no caso de um meio homogéneo isotrópico e (semi-)indefinido. Este requisito exige um tratamento especial das condições de fronteira, uma vez que a reflexão espúria das ondas quando atingem o limite da malha de elementos finitos não deve ocorrer. Para alcançar este objectivo várias estratégias têm sido propostas e aplicadas no contexto dos problemas de interacção túnel-macício de fundação.

Os diferentes métodos e metodologias para o tratamento das fronteiras artificiais oriundas da limitação geométrica do domínio de análise quando se utiliza o MEF, podem ser agrupados de uma forma abrangente em procedimentos locais e procedimentos globais. Os procedimentos globais são, do ponto de vista conceptual, mais consistentes, sendo no entanto consideravelmente mais complexos e menos versáteis. Englobam-se nesta classe os métodos que atendem às equações de propagação de ondas e à condição de radiação de Sommerfeld de uma forma exacta no contexto do MEF, sendo exemplos: o método dos elementos de contorno, o método das soluções fundamentais (Amado Mendes et al., 2014; Godinho et al., 2013), bem como o método dos elementos finitos de contorno escalados (Yaseri et al., 2014; Wolf, 2003; Khani, 2007). Abordando agora mais em detalhe os procedimentos locais, estes consistem em soluções aproximadas, baseadas na teoria da propagação de ondas e que procuram evitar a reflexão da onda através do tratamento da fronteira artificial propriamente dita. Apesar da limitação associada ao facto da eficiência destas metodologias ser dependente da dimensão do domínio discretizado face ao comprimento de onda gerado, a sua

facilidade de aplicação, associada à boa compatibilidade com o formalismo do MEF, tornam estas abordagens atractivas para aplicações práticas. De entre os vários procedimentos locais, referem-se aqui, pela sua importância, as fronteiras absorventes, o método dos elementos infinitos e os métodos das camadas absorventes. As fronteiras absorventes (Lysmer e Kuhlemeyer, 1969) são um dos procedimentos mais simples, que foi adoptado por Bian et al. (2007) para o estudo dos movimentos do solo induzidos pelo tráfego ferroviário. O mesmo objectivo pode também ser alcançado pelo acoplamento de elementos infinitos 2.5D ao longo da fronteira artificial, como proposto por Yang and Hung. (2008, 2001) e aplicado por Lopes et al. (2010). Comparando as duas metodologias, Alves Costa et al. (2010) verificou que a precisão obtida por esta última é bastante mais elevada que a da anterior, apesar da impossibilidade de garantir uma condição de absorção perfeita em ambas as abordagens. Como alternativa aos procedimentos mencionados, Bian et al. (2012) propuseram uma formulação 2.5D das fronteiras artificiais gradualmente amortecidas anteriormente apresentadas por Liu & Jerry (2003).

Ainda no contexto dos procedimentos locais, uma abordagem alternativa que tem tomado relevo no âmbito de problemas que lidam com propagação de ondas corresponde ao método das camadas de correspondência perfeita (*Perfectly Matched Layers* – PML's), designada por formulação PML. Nesta abordagem, a fronteira artificial é tratada através da substituição do domínio “infinito” por uma camada de dimensão finita, que corresponde à designada camada PML. Este meio dá cumprimento a dois objectivos principais: garante que não há reflexão das ondas quando atingem a sua fronteira (com o domínio de interesse) e tem a capacidade de absorver as ondas que nela incidem (Johnson, 2010). A primeira menção à formulação PML deve-se a Bérenger (1994), no âmbito do electromagnetismo, sugerindo que a consideração das coordenadas do meio PML num domínio complexo permitiria alcançar a condição de absorção perfeita. Posteriormente, surgiram aplicações a problemas elastodinâmicos, sobretudo devido ao trabalho desenvolvido por Chew e Liu (1996) e, mais recentemente, por Basu & Chopra (2003) e Basu (2009). No entanto, apesar das potenciais virtudes deste método, que pode suplantar os métodos anteriormente apresentados, a sua divulgação e aplicação à simulação de infraestruturas de transporte não está ainda muito difundida. Sendo de referir os estudos levados a cabo no seio do grupo de investigação onde se inserem os autores, nomeadamente por Barbosa e Kausel (2012) e por Lopes et al. (2012, 2013), bem como a um trabalho desenvolvido na KU Leuven (François, 2010).

O objectivo do presente artigo é mostrar o desenvolvimento e potencialidades de um modelo baseado na formulação 2.5D MEF-PML concebido pelos autores para a simulação de problemas de interacção túnel-macço de fundação e de propagação de ondas pelo meio envolvente.

Relativamente à organização, inicia-se com uma sucinta exposição do método dos elementos finitos 2.5D, salientando os aspectos particulares a que é necessário atender para a simulação do sistema via-túnel-macço. Seguindo um formalismo idêntico ao do MEF 2.5D, a formulação 2.5D PML é apresentada realçando as semelhanças e diferenças em relação à abordagem formal do método dos elementos finitos. Apresentada a metodologia, segue-se a validação do modelo por comparação com a solução analítica para um meio indefinido (Tadeu e Kausel, 2000). Posteriormente, a solução obtida para um túnel inserido num meio indefinido é comparada com a solução fornecida através de um código semi-analítico, denominado PiP (Pipe in Pipe), que foi desenvolvido por Hussein e Hunt (2007). Por último, é desenvolvido um estudo paramétrico a fim de avaliar e discutir a influência de algumas propriedades do túnel e do solo na propagação de vibrações, apresentando-se as conclusões.

2 – MODELO NUMÉRICO 2.5D MEF-PML: CONCEITOS E FORMULAÇÃO

2.1 – Generalidades

Considere-se uma estrutura com uma secção transversal invariante na direcção longitudinal, como se mostra na Fig. 1. Neste caso, adoptando uma formulação 2.5D, todas as variáveis são

transformadas para o número de onda (k_1) por aplicação de uma transformada de Fourier relativa à coordenada longitudinal (direcção x), sendo por isso apenas necessária a discretização da secção transversal para se alcançar a solução 3D do problema. Assim sendo, o domínio de interesse é então discretizado através de elementos finitos 2.5D, sendo secundado por camada de elementos PML 2.5D. A truncatura do domínio ocorre depois dos elementos PML. Assim, este artifício numérico tem a função de absorver, sem que ocorra reflexão espúria, as ondas que, com ângulo de incidência arbitrário, atinjam a fronteira entre os domínios descritos pelo MEF 2.5D e pelo método 2.5D PML.

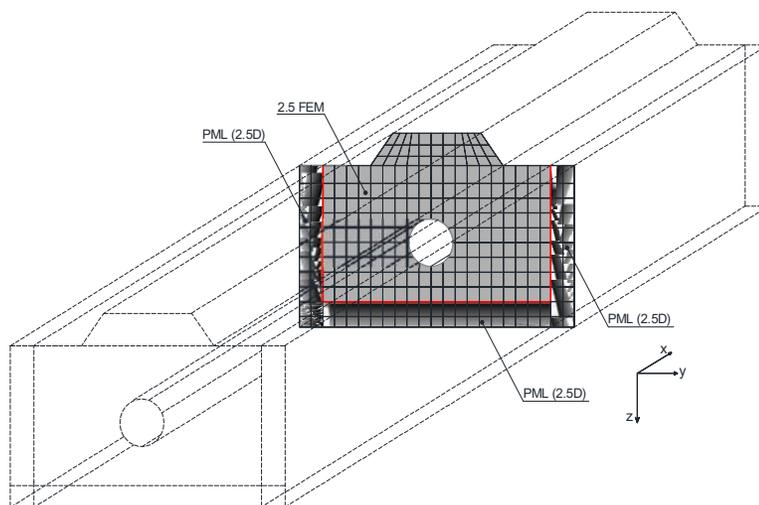


Fig. 1 – Estrutura com desenvolvimento infinito e invariante numa direcção.

A condição de absorção é satisfeita através da alteração das coordenadas dos nós respeitantes aos elementos PML (no presente caso, y e z , uma vez que a coordenada x irá ser transformada para o domínio do número de onda) para o domínio complexo, o que induz um aumento artificial da atenuação da onda que se propaga ao longo dos elementos PML, como é evidenciado na Fig. 2.

O truque deste método reside nas funções de mudança de referencial adoptadas, uma vez que a camada PML deve actuar não apenas como um material absorvente, mas também como um material que garante a não reflexão das ondas na fronteira domínio de interesse/PML. Só cumprindo estes dois requisitos, é que é possível obter uma solução exacta dentro do domínio de interesse.

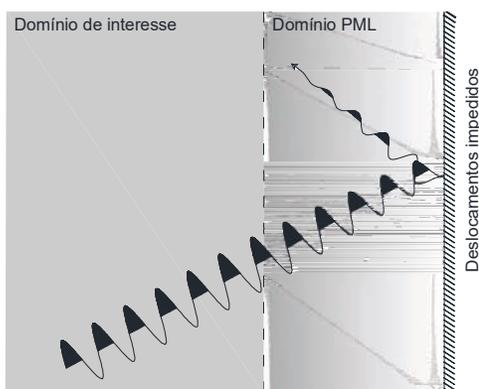


Fig. 2 – Representação esquemática da atenuação das ondas no interior de uma camada PML.

2.2 – Formulação 2.5D MEF-PML

2.2.1 – Formulação geral do MEF 2.5D

Com o intuito de evitar custos extremamente elevados de computação, intrínsecos a uma simulação tridimensional integral, várias tentativas têm sido desenvolvidas no sentido de respeitar o carácter tridimensional do domínio, mas impondo algumas restrições, a fim de minimizar o esforço computacional. As estruturas tridimensionais com desenvolvimento infinito e propriedades invariáveis (geométricas e mecânicas) podem ser abordadas através de uma formulação 2.5D. Nestes casos, as principais propriedades da estrutura são representadas pela sua secção transversal, sendo, desta forma, a estrutura encarada como bidimensional. No entanto, o carregamento não é bidimensional, mas sim tridimensional, o que naturalmente exige a solução de um problema tridimensional. A principal ideia por detrás da solução 2.5D é resolver o problema através de um método intermédio entre o bidimensional e o tridimensional. Tratando-se de um método baseado nos elementos finitos, apresenta como grande vantagem o recurso a técnicas transformadas que permitem uma drástica redução do número de graus de liberdade, já que apenas a secção transversal do problema necessita de ser discretizada por elementos finitos. Este método foi inicialmente proposto por Hwang & Lysmer (1981), no contexto do MEF, para o estudo de estruturas subterrâneas sob o efeito de ondas sísmicas. Subsequentemente, o método tem sido aplicado por alguns investigadores ao estudo de vibrações induzidas por tráfego ferroviário, tanto em cenários superficiais como em cenários subterrâneos. Neste âmbito, especial atenção deve ser dedicada às seguintes obras: (Sheng et al., 2006; Yang e Hung, 2001; Alves Costa et al., 2012a; Alves Costa et al., 2010; Muller, 2007; Alves Costa, 2008).

Assumindo-se que a resposta da estrutura é linear, a análise pode ser desenvolvida no domínio da frequência/número de onda, sendo aplicadas transformadas de Fourier em relação ao tempo e ao espaço na direcção de desenvolvimento infinito da estrutura. As grandezas transformadas (acção e resposta) passam a ser função das imagens de Fourier da direcção espacial x e do tempo, t , que são designadas, respectivamente, por número de onda e frequência angular, e representadas por k_1 e ω . Este procedimento implica que apenas duas das direcções que caracterizam o meio tridimensional se mantenham no domínio não transformado, sendo por isso o plano definido por essas direcções discretizado através de elementos finitos, tal como já ilustrado na Fig. 1.

Seguindo as etapas habituais de um procedimento baseado no método dos elementos finitos, nomeadamente nas formulações forte e fraca, a seguinte equação de equilíbrio pode ser estabelecida para qualquer infinitésimo de volume de um domínio tridimensional:

$$\int_V \delta \varepsilon \sigma dV + \int_V \delta u \rho \ddot{u} dV = \int_S \delta u p dS \quad (1)$$

em que $\delta \varepsilon$ representa o campo de extensões virtuais, σ representa o campo de tensões, δu é o campo de deslocamentos virtuais, u é o campo de deslocamentos, ρ é a massa volúmica do meio e p representa o campo de pressões externas aplicadas na superfície S .

Após a aplicação das transformadas de Fourier, e como já foi referido, a secção transversal do domínio permanece no domínio não transformado e está discretizada em elementos finitos. Esta abordagem permite reescrever a equação 1 em termos de variáveis nodais.

O conceito de trabalho virtual pode ser aplicado no domínio transformado recorrendo ao teorema do integral de Parserval que postula o seguinte (Grundmann and Dinkel, 2000):

$$\int \delta f(x)p(x)dx = \int \delta f(-k_1)p(k_1)dk_1 \quad (2)$$

Considerando a equação 1, o trabalho virtual realizado pelas forças internas e pelas forças de inércia no domínio transformado é dado, respectivamente, por:

$$\int_V \delta \varepsilon \sigma dV = \int_{k_1} \delta u_n^T(-k_1, \omega) \int_{z y} B^T(-k_1) D B(k_1) dy dz u_n(k_1, \omega) dk_1 \quad (3)$$

$$\int_V \delta u \rho \ddot{u} dV = -\omega^2 \int_{k_1} \delta u_n^T(-k_1, \omega) \int_{z y} N^T \rho N dy dz u_n(k_1, \omega) dk_1 \quad (4)$$

em que B representa a matriz das derivadas das funções de forma; N representa a matriz das funções de forma (as quais são apenas definidas no plano da secção transversal); D é a matriz de elasticidade (que relaciona tensões e deformações); u_n é o vector dos deslocamentos nodais (que colige os deslocamentos correspondentes aos três graus de liberdade dos nós da secção transversal do elemento, no domínio transformado); e onde se considera que as fontes de excitação apresentam variação harmónica ao longo do tempo com frequência angular ω .

O trabalho virtual realizado pelas acções externas é calculado tirando partido do facto de a geometria apenas ser discretizada no plano ZY. Assim, considerando uma coordenada s, paralela ao lado do elemento onde é aplicada a acção, o trabalho virtual desenvolvido pelas acções externas é obtido através de:

$$\int_S \delta u p dS = \int_{k_1} \delta u_n^T(-k_1, \omega) p_n(k_1, \omega) dk_1 \quad (5)$$

em que o vector p_n colige as forças nodais equivalentes resultantes da pressão p aplicada ao longo do contorno do elemento finito.

Dado que as equações 3, 4 e 5 são válidas para um qualquer deslocamento virtual, $\delta u_n(-k_1)$, então todos os integrais relativos a k_1 podem ser removidos o que permite alcançar a seguinte relação de equilíbrio para cada elemento finito:

$$\left(\int_{z y} B^T(-k_1) D B(k_1) dy dz - \omega^2 \int_{z y} N^T \rho N dy dz \right) u_n(k_1, \omega) = p_n(k_1, \omega) \quad (6)$$

Adoptando a nomenclatura habitual do método dos elementos finitos, podem definir-se as matrizes de rigidez e massa, tal como indicado, respectivamente, nas equações 7 e 8:

$$[K] = \int_{z y} B^T(-k_1) D B(k_1) dy dz \quad (7)$$

$$[M] = \int_{z y} N^T \rho N dy dz \quad (8)$$

A matriz [B] é determinada através do produto do operador diferencial [L] (no domínio transformado) pela matriz [N], a qual agrupa as funções de forma do elemento. Dado que a direcção x é submetida a uma operação de transformação para o domínio do número de onda, k_1 , as derivadas

relativas a essa mesma direcção são avaliadas de modo analítico, sendo então o operador [L] dado por:

$$[L] = \begin{bmatrix} ik_1 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & ik_1 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & ik_1 \end{bmatrix}^T \quad (9)$$

No que diz respeito à forma de inclusão de efeitos de amortecimento material no modelo, é adoptado um modelo de amortecimento hysterético, através da consideração de parâmetros de rigidez complexa.

É de salientar que a eficiência computacional pode ser muito melhorada dividindo a matriz de rigidez [K] em sub-matrizes, de modo a que todos os termos dessas mesmas matrizes sejam independentes do número de onda. Com esse intuito considera-se a matriz [B] como a soma de duas matrizes, separando deste modo as derivadas numéricas das analíticas, de acordo com a equação 10:

$$[B] = [B_1] + ik_1 [B_2] \quad (10)$$

Substituindo a equação 10 na equação 7 e reagrupando-a, é então possível reescrever a equação 6 da seguinte forma:

$$\left([K]_1 + ik_1 [K]_2 + k_1^2 [K]_3 - \omega^2 [M] \right) u_n(k_1, \omega) = p_n(k_1, \omega) \quad (11)$$

2.2.2 – *Formulação matemática 2.5D PML*

A abordagem pelo método dos elementos finitos não é a mais adequada para simular meios indefinidos, como é o caso de maciços geotécnicos. Na verdade, o carácter finito do domínio de interesse e a necessidade de definir as fronteiras que o delimitam, implicam a violação da condição de radiação de Sommerfeld. Para ultrapassar essa limitação inerente ao próprio MEF, recorre-se ao método das camadas absorventes, utilizando uma formulação 2.5D PML (*Perfect Matched Layers*).

O princípio consiste na introdução de uma camada de elementos PML em redor da zona de interesse, também ela discretizada por elementos finitos 2.5D, que permita a absorção da energia incidente, sem implicar qualquer reflexão na fronteira entre os dois domínios. Deste modo, a camada PML deverá ser absorvente e não reflectiva, como aliás se ilustra na Fig. 2.

O cumprimento das duas condições mencionadas é alcançado através da consideração de coordenadas complexas no domínio PML, mantendo-se a equação governativa do problema e, por esse modo, evitando-se reflexões espúrias na fronteira entre os dois domínios em análise.

Atendendo ao exposto no parágrafo anterior, é então necessário proceder a uma mudança de referencial geométrico do domínio descrito pelo PML para o domínio complexo. Tal relação é dada pelas seguintes funções de mudança de referencial, apenas aplicáveis às direcções y e z, uma vez que a direcção x é transformada para o domínio do número de onda (ver Fig. 1):

$$\tilde{y} = \int_0^y \lambda_y(y) dy \quad (12)$$

$$\tilde{z} = \int_0^z \lambda_z(z) dz \quad (13)$$

sendo λ_y e λ_z as funções de transformação nas direcções y e z , respetivamente.

No desenvolvimento de uma formulação do tipo elementos finitos, é também necessário o estabelecimento de relações entre as derivadas das coordenadas nodais nos dois espaços, o físico e o complexo. Tais relações podem ser alcançadas da seguinte forma:

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{y}} = \frac{1}{\lambda_y(y)} \frac{\partial}{\partial y} \quad (14)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{z}} = \frac{1}{\lambda_z(z)} \frac{\partial}{\partial z} \quad (15)$$

Atendendo a que a solução no interior do domínio PML satisfaz a mesma equação diferencial que no domínio interesse, a abordagem 2.5D PML pode ser definida fazendo uso do procedimento anterior para o MEF 2.5D, desde que as relações de mudança de coordenadas para o espaço complexo sejam atendidas na equação 1. Deste modo, considerando as equações 12 a 15 e fazendo uso do procedimento de Garlekin, as seguintes matrizes de rigidez, $[K^*]$ e de massa, $[M^*]$, podem ser estabelecidas para a região dos PML:

$$[K^*] = \iint_{z y} B^{*T}(-k_1) D B^*(k_1) \lambda_y \lambda_z dy dz \quad (16)$$

$$[M^*] = \iint_{z y} N^T \rho N \lambda_y \lambda_z dy dz \quad (17)$$

A matriz $[B^*]$ resulta do produto do operador diferencial $[L^*]$ pela matriz $[N]$, a qual colige as funções de forma do elemento 2.5D PML. A fim de respeitar as relações anteriormente expressas entre coordenadas no espaço físico e no espaço complexo, o novo operador diferencial é agora dado por:

$$[L^*] = \begin{bmatrix} ik_1 & 0 & 0 & \frac{1}{\lambda_y(y)} \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{1}{\lambda_z(z)} \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{1}{\lambda_y(y)} \frac{\partial}{\partial y} & 0 & ik_1 & \frac{1}{\lambda_z(z)} \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda_z(z)} \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{1}{\lambda_y(y)} \frac{\partial}{\partial y} & ik_1 \end{bmatrix}^T \quad (18)$$

Saliente-se que a região dos PML tem a capacidade de absorver a energia incidente em ambas as direcções, numa direcção apenas, ou em nenhuma direcção. Esta última situação corresponde a

$\lambda_y = \lambda_z = 1$. Com efeito a introdução desta última relação nas matrizes de rigidez e massa indicadas pelas equações 16 e 17, leva a que as mesmas redundem nas equações 7 e 8, respectivamente.

Kausel e Barbosa (2012) propuseram uma formulação alternativa para uma metodologia bidimensional de PMLs, onde as matrizes são directamente avaliadas no espaço complexo, evitando assim a integração das funções de mudança de referencial. Contudo, o resultado final é exactamente igual ao agora apresentado.

Por último, refira-se que sistema global de equações é completamente definido após a assemblagem das matrizes de rigidez dinâmica, tanto dos elementos finitos como dos elementos PML, e da introdução das condições de fronteira de Neumann e de Dirichlet. Deste modo, o sistema de equações global poderá então ser escrito da seguinte forma:

$$\left\{ \left[K_{FEM}^g(k_1) \right] + \left[K_{PML}^g(k_1, \omega) \right] - \omega^2 \left(\left[M_{FEM}^g \right] + \left[M_{PML}^g(k_1, \omega) \right] \right) \right\} u_n(k_1, \omega) = p_n(k_1, \omega) \quad (19)$$

Os resultados obtidos após a resolução do sistema de equações encontram-se no domínio transformado, exigindo uma dupla transformada de Fourier inversa para converter a solução para o domínio do espaço/tempo

2.2.3 – Funções de mudança para o referencial complexo

Com base no exposto nas últimas duas secções pode-se concluir que a incorporação de uma formulação 2.5D PML numa aplicação numérica baseada no MEF 2.5D é bastante simples. O aspecto basilar de tal incorporação consiste na definição das funções de mudança de coordenadas nodais para o referencial complexo.

As referidas funções são derivadas através da continuidade da solução para além do domínio de interesse, tendo presente o cuidado de corresponderem a uma solução suave de evolução da atenuação, de modo a evitar reflexões espúrias no interior do domínio correspondente ao PML (Johnson, 2010). Os requisitos que tais funções devem satisfazer são cumpridos adoptando funções com a seguinte configuração:

$$\lambda_y(y) = \frac{2\pi}{\text{abs}(k)} \frac{y}{H_y} - i \frac{k_0}{k} \left(\frac{y}{H_y} \right)^2 \quad (20)$$

$$\lambda_z(z) = \frac{2\pi}{\text{abs}(k)} \frac{z}{H_z} - i \frac{k_0}{k} \left(\frac{z}{H_z} \right)^2 \quad (21)$$

em que k_0 é uma constante de valor adequado (no presente estudo concluiu-se que um valor de $k_0=20$ dá origem a bons resultados); H_y e H_z correspondem à espessura da camada absorvente nas direcções y e z , respectivamente; k é o número de onda que corresponde ao comprimento de onda propagante ao longo da secção transversal do problema, o qual é dado por:

$$k = \sqrt{\left(\frac{\omega}{C_s} \right)^2 - k_1^2} \quad (22)$$

em que C_s é a velocidade de propagação das ondas de corte no terreno.

A parte real das funções de mudança de referencial é introduzida para permitir um ajustamento da malha, a fim de se obter uma espessura do domínio PML adequada ao comprimento de onda propagante (Alves Costa et al., 2010). Deste modo, no método proposto, a malha PML é sempre gerada com um metro de espessura e divide-se em cinco ou seis sub-camadas (segundo estudos desenvolvidos por Yang & Hung (1996) e posteriormente aferidos por Alves Costa et al. (2010), o número em causa corresponde ao valor mínimo de discretização compatível com a acuidade dos resultados), sendo o seu carácter adaptativo conferido pelas funções de mudança de referencial. Efectivamente, a malha do domínio PML é adaptativa (estica ou encolhe) mediante o número de onda e este efeito é conseguido através das funções de transformação. As funções de mudança de referencial propostas foram validadas comparando os resultados obtidos pelo modelo proposto com os fornecidos por soluções teóricas.

Deve notar-se que, se o radicando da equação 22 for negativo, as funções de mudança de referencial não têm parte imaginária, isto é, a onda que se propaga ao longo da secção transversal do problema é evanescente e, consequentemente, as funções de mudança de referencial 20 e 21 são valores reais puros, ou, dito de outra forma, não há atenuação da onda, havendo contudo um ajustamento da malha, a fim de melhor simular o carácter infinito do domínio.

3 – VALIDAÇÃO TEÓRICA

3.1 – Carga vertical num meio indefinido

Com o intuito de testar a fiabilidade e a precisão do modelo implementado, um exemplo simples foi simulado sendo os resultados comparados com a solução analítica explícita proposta por Tadeu e Kausel (2000). A Fig. 3 mostra as características principais do problema, bem como a geometria da malha de elementos finitos 2.5D adoptada. Para a análise numérica, tirou-se partido das condições de simetria e anti-simetria do problema, impondo-se as condições de fronteira da malha de elementos finitos 2.5D indicadas na Fig. 3b.

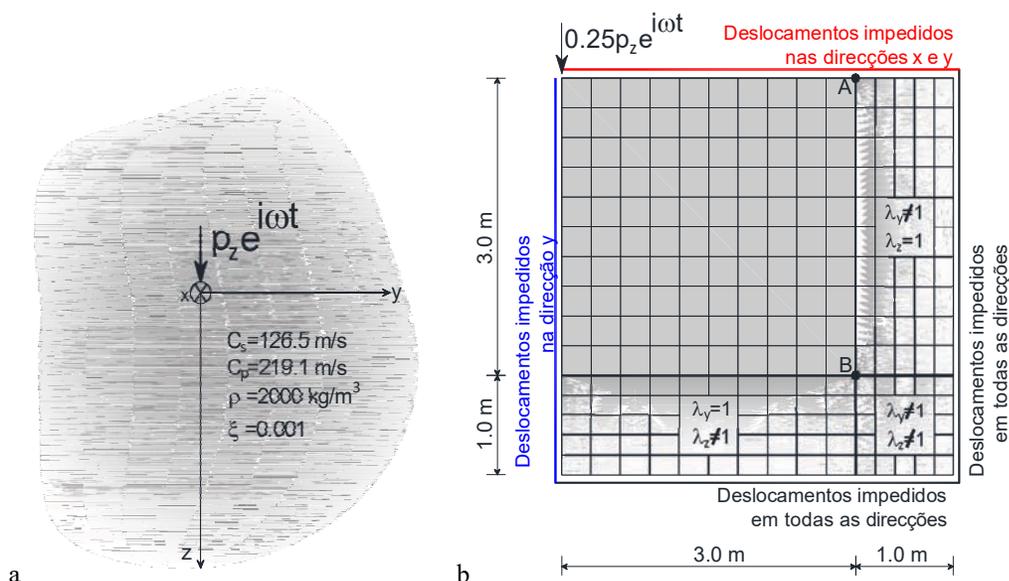


Fig. 3 – Descrição do problema de validação: a) propriedades do meio indefinido; b) malha de elementos finitos 2.5D.

O domínio de interesse tem $3\text{m} \times 3\text{m}$ de secção transversal e é representado por elementos finitos 2.5D, sendo a largura de cada elemento $l_e=0,3$ m. Por sua vez, ao longo do contorno exterior do referido domínio, ou seja, nas fronteiras artificiais, é aplicada uma camada de elementos PML com 1m de espessura, sendo a sua dimensão ajustável em função do comprimento de onda que se propaga no plano YOZ.

O meio indefinido é excitado por uma carga vertical que é harmónica em relação ao eixo longitudinal de coordenadas x , com número de onda k_1 . No domínio espaço-frequência, a carga é dada por:

$$p_j(x, y, z, \omega) = \delta_{ij} \delta(y) \delta(z) \cos(k_1 x) \quad (23)$$

Uma vez que a carga é harmónica, os deslocamentos resultantes também são harmónicos:

$$u_j(x, y, z, \omega) = u_j(k_1, y, z, \omega) \cos(k_1 x) \quad (24)$$

As Fig. 4 e Fig. 5 mostram os deslocamentos verticais ao longo do eixo y para números de onda k_1 adimensionais, definidos como $k_1 = k_1 C_s / \omega$, e para frequências de 10 Hz e 75 Hz, respectivamente.

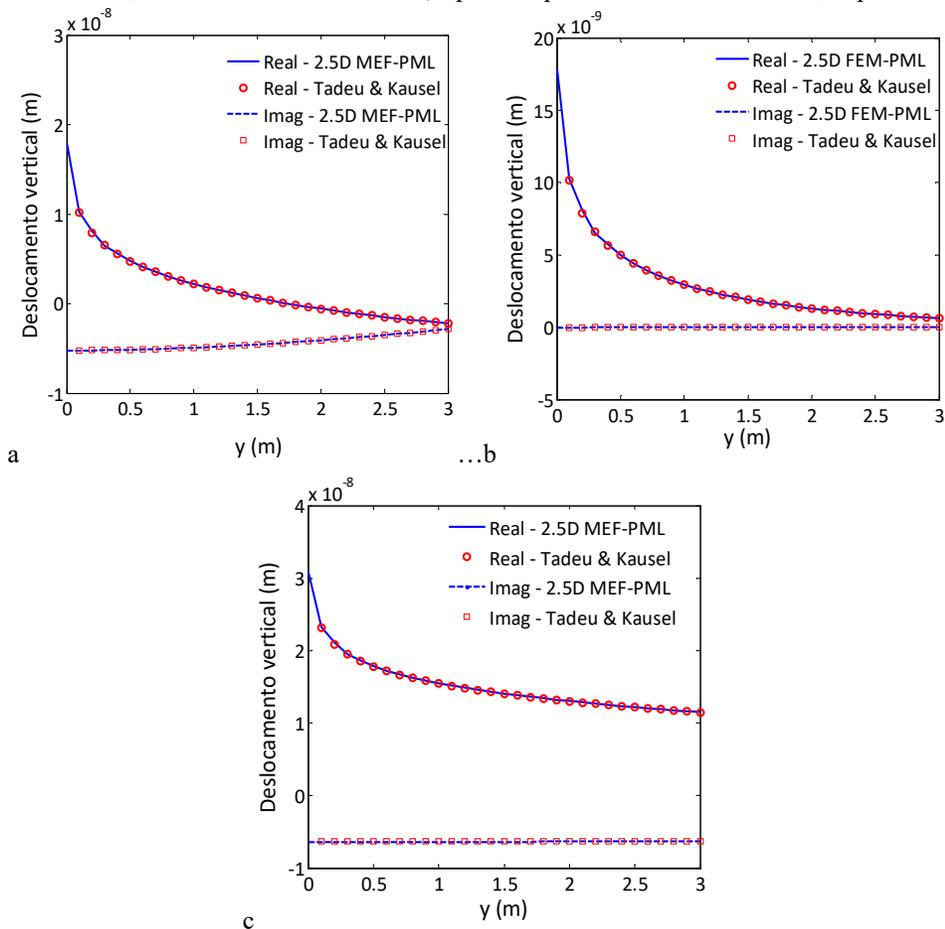


Fig. 4 – Parte real e imaginária do deslocamento vertical $u_z(x, y, z, \omega)$ ao longo do eixo y do meio indefinido quando solicitado por uma carga vertical com uma frequência de excitação de 10 Hz e para os números de onda adimensionais: a) $k_1=0.5$; b) $k_1=1.0$; c) $k_1=1.5$.

Analisando os resultados apresentados nas Fig. 4 e Fig. 5, pode-se concluir que a concordância entre as soluções numéricas e teóricas é esplêndida, independentemente do número de onda ou frequência. Deve ser salientado que, para k_1 superior a 1 apenas são originadas ondas evanescentes ao longo da secção transversal, tal como sugerido pela equação 22. Dado o facto do amortecimento material considerado ser muito reduzido, a componente imaginária da resposta é praticamente nula quando k_1 é superior à unidade, evidenciando o carácter evanescente da resposta. Este efeito também é muito bem reproduzido pelo modelo numérico, verificando-se uma correspondência perfeita entre os resultados numéricos e teóricos.

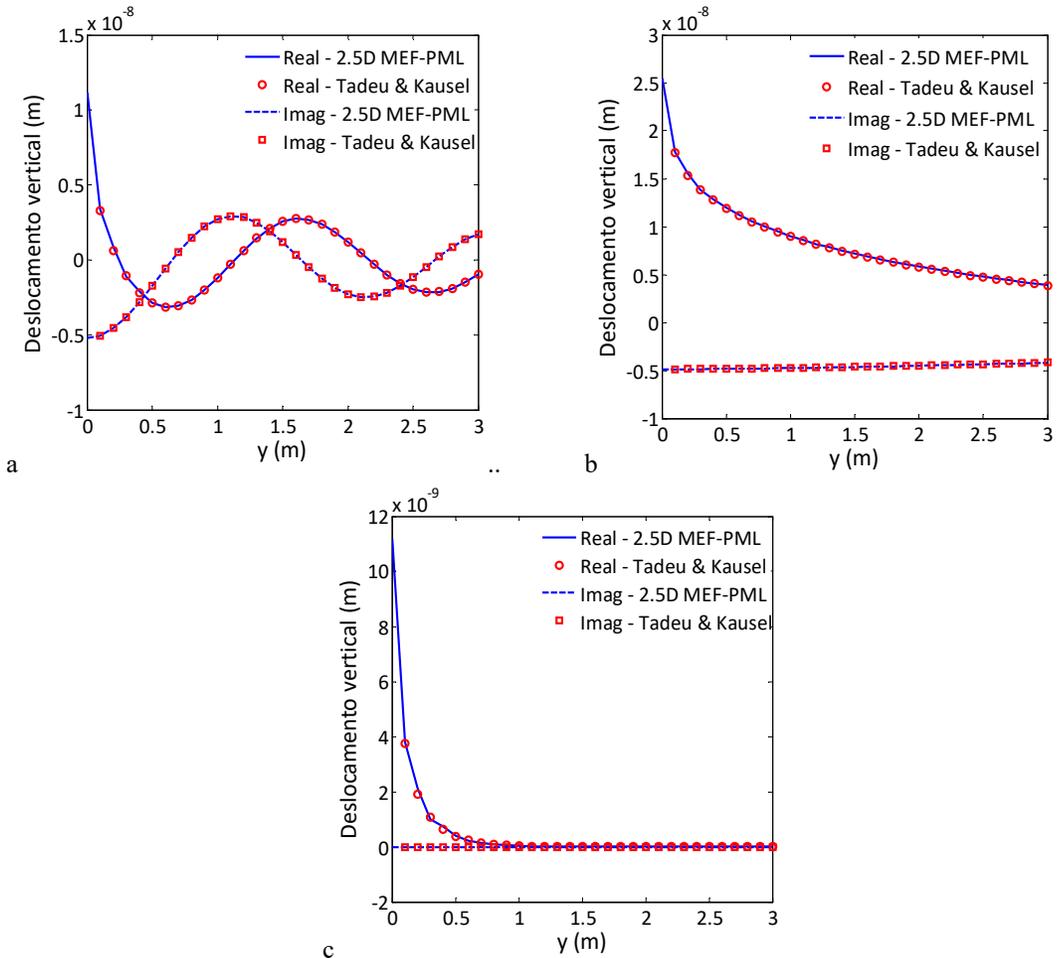


Fig. 5 – Parte real e imaginária do deslocamento vertical $u_z(x, y, z, \omega)$ ao longo do eixo y do meio indefinido quando solicitado por uma carga vertical com uma frequência de excitação de 75 Hz e para os números de onda adimensionais: a) $k_1=0.5$; b) $k_1=1.0$; c) $k_1=1.5$.

Um outro aspecto muito relevante que é evidenciado pelos resultados agora expostos, com especial destaque para a Fig. 4a, prende-se com a capacidade do modelo em reproduzir com acuidade ondas propagantes, mesmo quando o seu comprimento de onda é substancialmente superior ao domínio de interesse. Com efeito, nas condições da Fig. 4a, o comprimento da onda de corte propagante é de cerca de 14,5 m, correspondendo assim a cerca de 5 vezes a dimensão do domínio de interesse. A notória capacidade do modelo em reproduzir tal efeito deve-se à configuração adoptada para as funções de mudança de referencial adoptadas para o PML (expressões 20 e 21). A

introdução de uma componente real função do número de onda propagante na secção transversal permite que o modelo adapte automaticamente a dimensão dos elementos PML, acomodando assim a capacidade de simulação de grandes comprimentos de onda.

Pretendendo alargar o procedimento de validação, uma análise 2D também foi realizada. Na verdade, impondo $k_1=0$, o problema 2.5D reduz numa análise de deformação plana 2D. Para essa situação e assumindo o espaço indefinido com as propriedades indicadas na Fig. 3a, assim como o modelo descrito na Fig. 3b, considerou-se agora uma carga vertical transiente em correspondência com o impulso de Ricker ilustrado na Fig. 6. O ponto de aplicação da acção corresponde à origem do referencial (ver Fig. 3a).

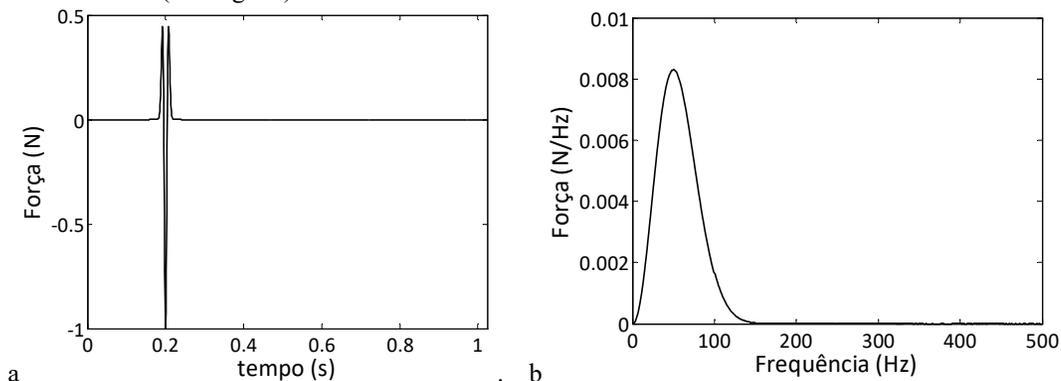


Fig. 6 – Impulso de Ricker adoptado: a) representação no domínio do tempo; b) representação no domínio da frequência (conteúdo em frequência).

A Fig. 7 mostra a resposta, no domínio espaço-tempo, dos pontos A e B indicados na Fig. 3b, que estão posicionados no limite do domínio de interesse. Sobrepostos aos resultados numéricos, apresentam-se os resultados teóricos (calculados através das funções de Green 2.5D propostas por Tadeu e Kausel). Mais uma vez, a adesão entre a solução numérica e a teórica é perfeita, não havendo nenhuma distinção entre os resultados obtidos, mesmo para pontos localizados ao longo da fronteira do domínio interesse. Este facto evidencia uma vez mais a capacidade do modelo proposto, mesmo quando o ponto em análise pertence à interface MEF-PML. Este aspecto reveste-se de muita importância, pois permite que não haja necessidade de qualquer subaproveitamento do domínio de interesse, prescindindo a simulação de uma zona de sacrificio para a qual poderiam existir reservas quanto à qualidade dos resultados obtidos.

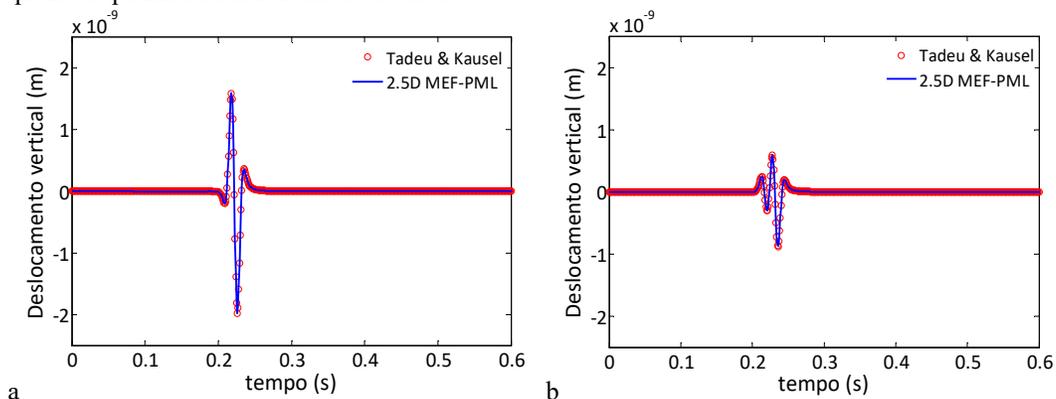


Fig. 7 – Deslocamentos verticais no domínio do tempo, devido à excitação induzida pelo impulso de Ricker: a) Ponto A; b) Ponto B.

Ainda em torno do mesmo exemplo de validação, uma comparação de resultados mais abrangente é dada pela Fig. 8, onde o campo de deslocamentos verticais é descrito para alguns instantes temporais. Apenas o segundo quadrante da figura foi calculado pelo método numérico, sendo os resultados representados nos restantes quadrantes obtidos pela solução teórica proposta por Tadeu e Kausel (2000). Como se pode verificar, a concordância de resultados é perfeita para qualquer um dos instantes considerados, não se constatando qualquer reflexão espúria nas fronteiras artificiais do problema.

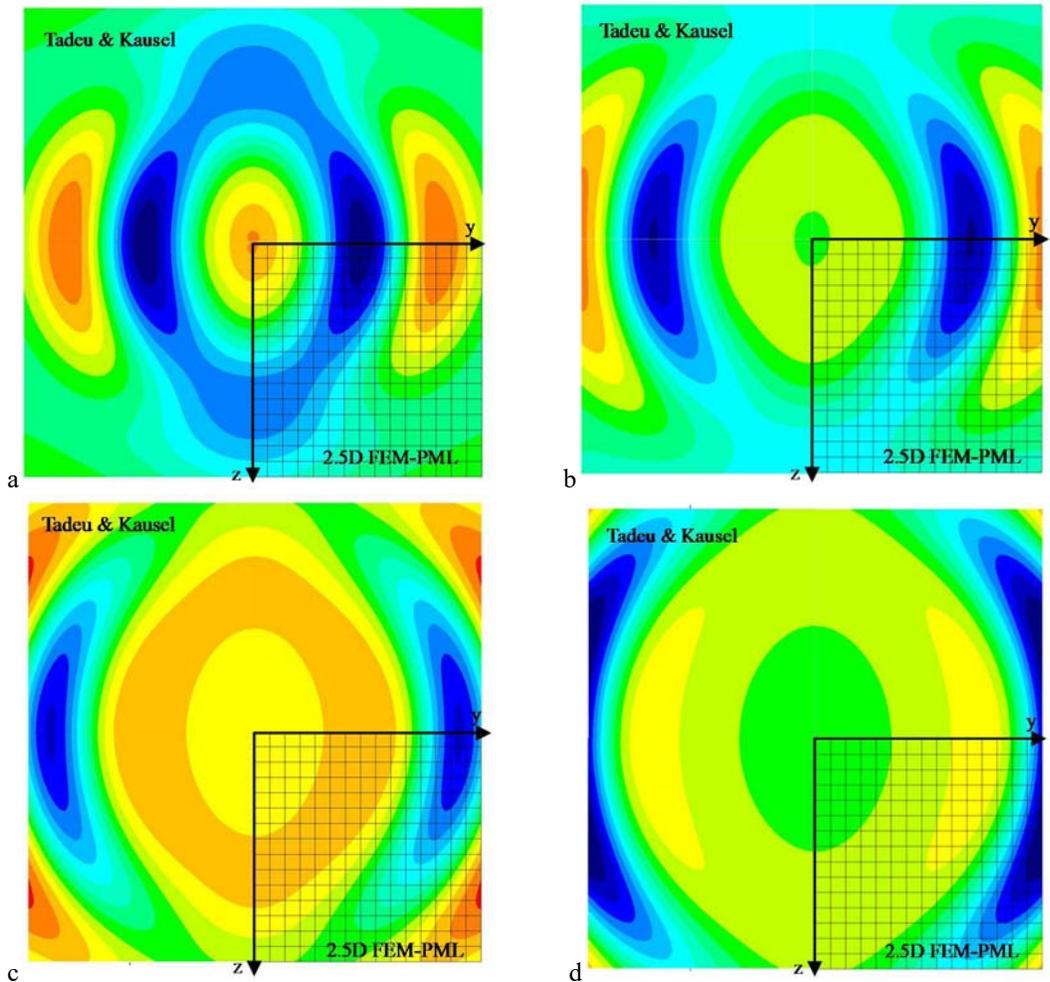


Fig. 8 – Campo de deslocamentos verticais do meio indefinido devido à excitação induzida pelo impulso de Ricker para diferentes instantes temporais: a) $t=0.214s$, b) $t=0.219s$, c) $t=0.224s$, e d) $t=0.229s$.

3.2 – Túnel embebido num meio indefinido

Apesar do indubitável interesse dos resultados apresentados na secção anterior, os quais realçam a precisão e potencialidade do modelo desenvolvido, não deve ser esquecido que o objectivo é o desenvolvimento de uma ferramenta numérica para a análise da resposta dinâmica de túneis. Tendo presente tal objectivo, para este exemplo de validação foi seleccionado um conjunto de resultados previamente apresentados num estudo elaborado por Gupta et al. (2007). O caso de estudo em

consideração foi utilizado para a validação de um modelo numérico desenvolvido por esses autores, comparando para o efeito a solução numérica com os resultados semi-analíticos fornecidos pelo modelo PiP (Pipe in Pipe) desenvolvido por Forrest e Hunt (2006), o qual foi posteriormente aperfeiçoado por Hussein e Hunt (2007). Em concreto, o estudo apresentado de seguida compara três metodologias distintas para a análise da resposta dinâmica de um túnel embebido num meio indefinido: i) o modelo 2.5D MEF-PML agora proposto; ii) o modelo periódico MEF-MEC apresentado por Gupta et al. (2007); iii) o modelo semi-analítico PiP, que é aqui assumido como a solução de referência.

A Fig. 9 resume as propriedades do túnel e do meio indefinido envolvente. O túnel, com um raio interno de 2,75 m e um revestimento de betão, com 0,25 m de espessura, é submetido a uma carga pontual vertical harmónica aplicada na sua base. Os pontos de observação são definidos por coordenadas polares na secção transversal do problema e por coordenadas rectangulares na direcção ortogonal, tal como se segue: $x=0$ m, r , θ . A carga é aplicada no ponto com coordenadas $(0; 2,75; 0)$.

A malha de elementos finitos tem 10 m de largura e 40 m de altura, ou seja prolonga-se 20 m na direcção z relativamente ao centro do túnel (note-se que os pontos A e C pertencem à interface entre o domínio dos elementos finitos e dos PML's). O domínio foi discretizado em elementos finitos 2.5D, sendo a largura de cada elemento inferior a 0,6 m, a fim de obter resultados precisos para frequências até 80 Hz. Para evitar reflexões espúrias de ondas que possam atingir as fronteiras artificiais do problema, uma camada de elementos PML com 1m espessura, compreendendo cinco camadas de elementos finitos 2.5D, foi acoplada ao longo das fronteiras artificiais.

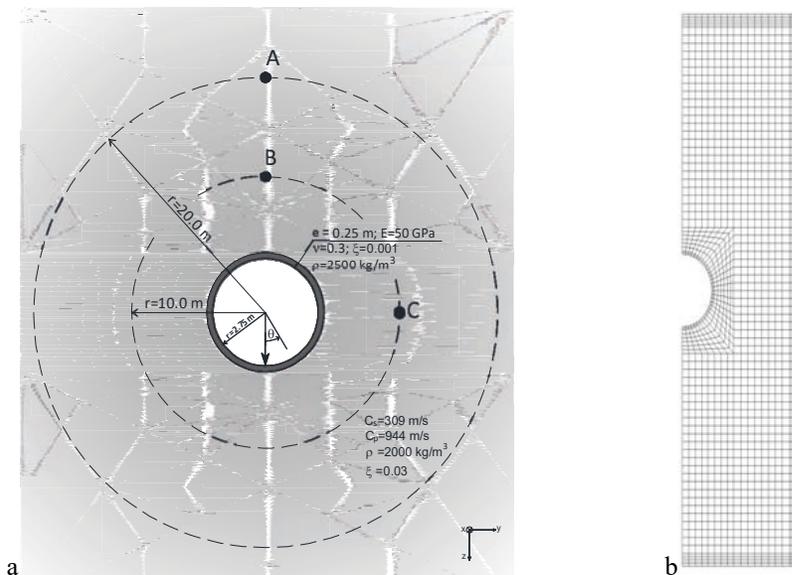


Fig. 9 – Túnel inserido num meio indefinido: a) Descrição do problema; b) Malha de elementos finitos 2.5D.

A Fig. 10 mostra a parte real da norma do campo de deslocamentos para o plano YOZ, ou seja, o plano que compreende a carga e os pontos de observação, para frequências distintas. Uma inspeção preliminar das figuras permite antecipar a boa qualidade dos resultados, não sendo percebida perturbação alguma dos campos de deslocamentos na proximidade das fronteiras do modelo.

Note-se que apesar da representação bidimensional apresentada na Fig. 10, os resultados correspondem a uma análise tridimensional. Com efeito, o problema foi resolvido para sucessivos valores de k_1 , sendo posteriormente invertido para o domínio do espaço.

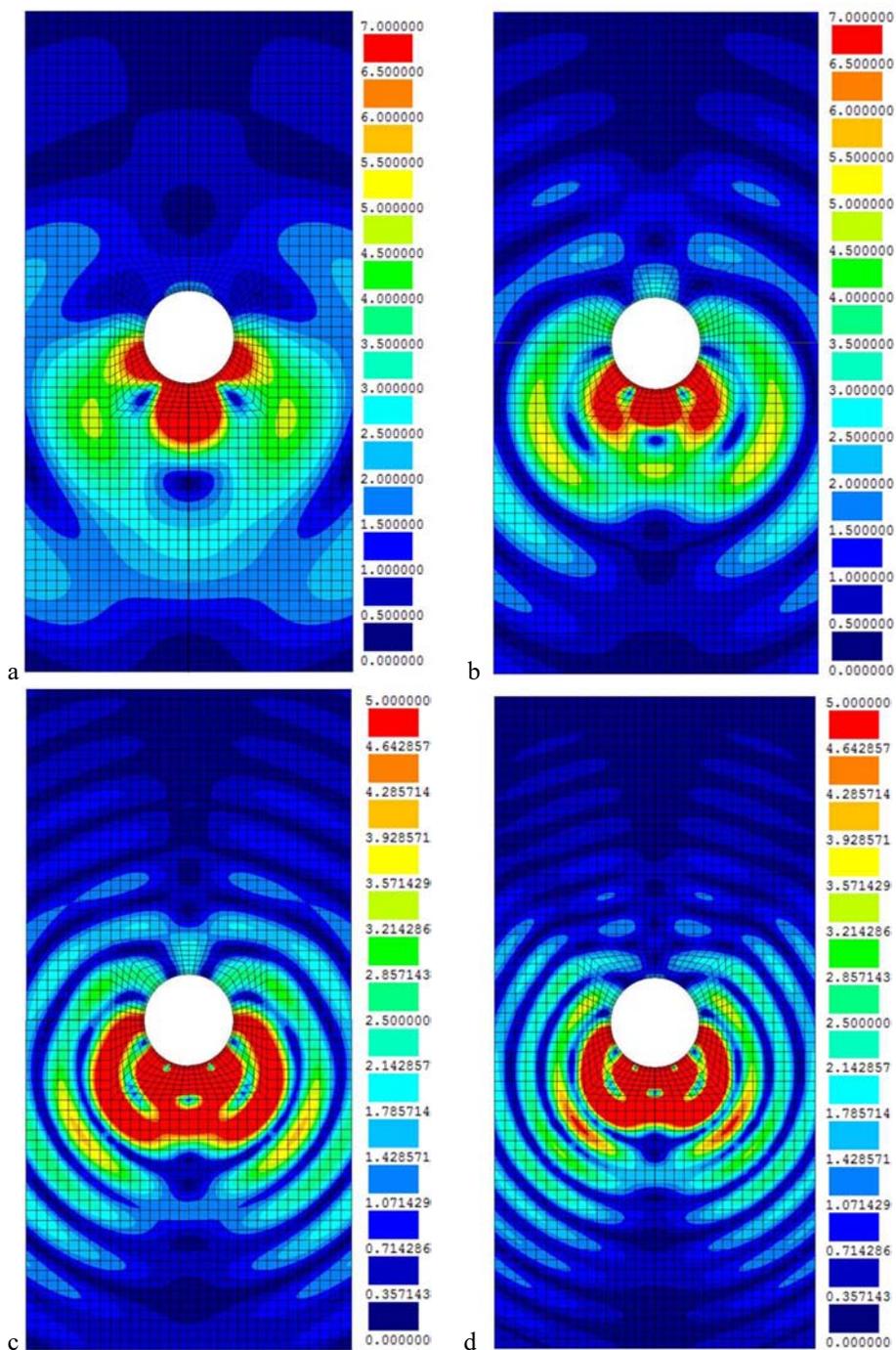


Fig. 10 – Parte real do campo de deslocamentos ao longo do plano yoz induzido por uma carga pontual harmónica, aplicada na base do túnel, com frequências distintas ($\times 10^{-11}$): a) 20 Hz; b) 40 Hz; c) 60Hz; d) 80 Hz.

A comparação entre os resultados proporcionados pelos diferentes modelos está patente na Fig. 11, onde se ilustra o módulo da função de transferência do deslocamento vertical para cada um dos pontos de observação indicados na Fig.9 a.

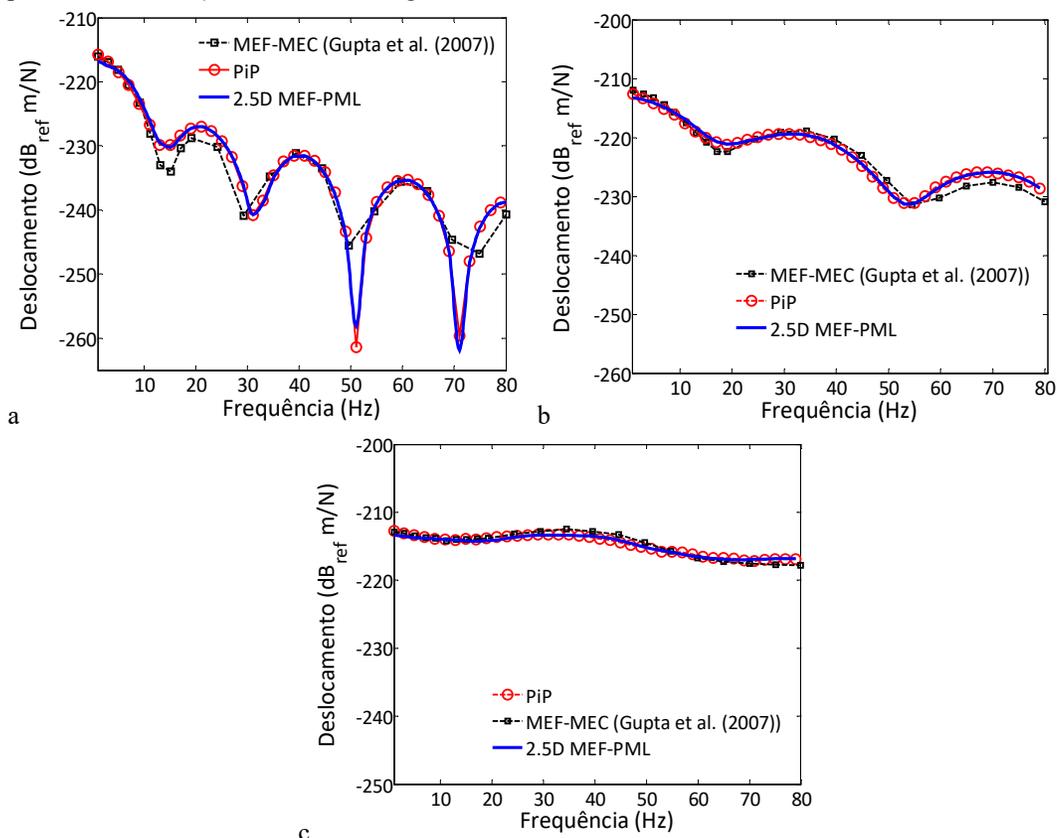


Fig. 11 – Função de transferência dos deslocamentos verticais em diferentes locais: a) Ponto A; b) Ponto B; c) Ponto C.

Como se pode constatar, uma muito boa precisão é alcançada com o modelo proposto. Na realidade, há uma concordância quase perfeita entre os resultados numéricos fornecidos pelo modelo proposto e os resultados obtidos usando o modelo PiP. Note-se que o modelo PiP é um modelo semianalítico baseado na teoria de propagação de ondas em tubos de parede espessa, o que permite obter uma solução exacta nas presentes condições, ou seja um túnel embebido num espaço indefinido (Forrest e Hunt, 2006). Porém, pese embora as recentes alterações introduzidas no referido modelo, nomeadamente no que concerne à possibilidade de simulação de túneis em meios semi-indefinidos (Hussein e Hunt, 2009), não poderá deixar de ser referido que a solução não dá cumprimento a todos os requisitos de compatibilidade e equilíbrio, estando-lhe inerente um erro de génese, o qual é tanto mais significativo quanto mais superficial for o túnel (Galvín et al., 2010). Para além disso, o modelo numérico proposto é muito versátil, permitindo simular geometrias complexas, que não são possíveis de atender num modelo semi-analítico como o PiP.

No que diz respeito à comparação com o modelo periódico MEF-MEC proposto por Gupta et al. (2007), é claro, a partir dos resultados mostrados acima, que o modelo 2.5D MEF-PML o pode suplantar em termos de precisão. De facto, a ondulação entre os picos com um passo de 20 Hz, que está presente na Fig. 11a, é muito bem reproduzida no modelo proposto, não sendo tão perceptível na solução alcançada por Gupta et al. (2007). Um pequeno aparte relativamente a esta modulação:

a sua configuração deve-se à interferência entre ondas de corte e ondas longitudinais, a qual leva a uma minimização da resposta para frequências concretas em função da localização do ponto receptor face à fonte de excitação dinâmica.

É também de salientar a alta precisão alcançada mesmo para pontos localizados na fronteira entre o domínio de interesse, ou seja, o domínio descrito pelo MEF 2.5D e o domínio PML.

4 – ESTUDO PARAMÉTRICO DAS VIBRAÇÕES INDUZIDAS NUM TÚNEL EM MEIO SEMI-INDEFINIDO

4.1 – Descrição do cenário de referência

Após a validação teórica do modelo numérico, nesta secção é apresentado um estudo paramétrico cujo objectivo é contribuir para um melhor entendimento da influência das propriedades do solo e do túnel na propagação de vibrações induzidas pela aplicação de uma acção dinâmica na soleira do túnel.

A Fig. 12 ilustra a geometria e as propriedades mecânicas adoptadas para o cenário de referência.

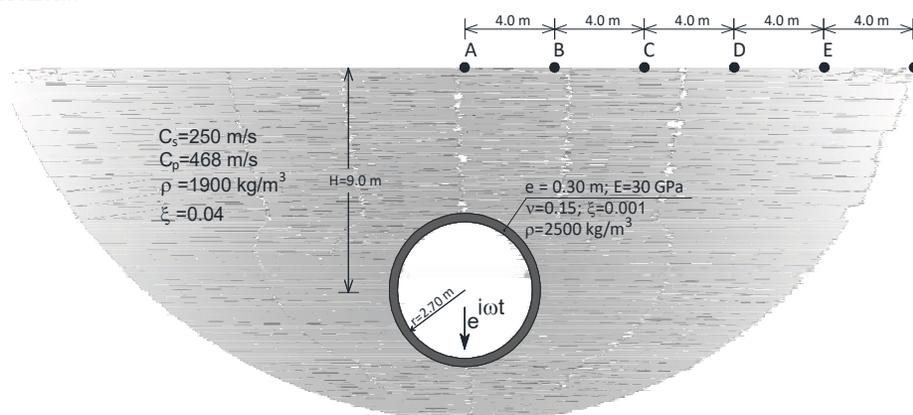


Fig. 12 – Geometria e propriedades dos materiais adoptadas para o cenário de referência

O estudo proposto contempla um túnel pouco profundo envolvido por um maciço homogéneo e semi-indefinido. A excitação dinâmica resulta da aplicação de uma carga vertical, de amplitude unitária (1N), harmónica, com frequência variável, na base do túnel. A Fig. 12 mostra a localização dos diversos pontos de observação considerados à superfície, bem como do ponto do túnel situado sob a carga aplicada. Os pontos de observação e o ponto de aplicação da acção encontram-se incritos na mesma secção transversal (condição de carga parada). Sem embargo, o problema mantém-se tridimensional uma vez que é considerada uma carga pontual.

Relativamente à simulação numérica, desenvolveu-se um modelo 2.5D MEF-PML tirando partido das condições de simetria do problema em análise. O domínio de interesse foi considerado com uma largura de 20m, ou seja, o alinhamento vertical que inclui o ponto F indicado na Fig. 12 corresponde à fronteira desse domínio. A dimensão dos elementos finitos foi definida de modo a permitir analisar uma gama de frequências até aos 80Hz. Acoplada ao domínio de interesse, foi considerada uma fiada de 2.5D PML's com 1 metro de espessura, dividida em 6 sub-camadas. A Fig. 13 mostra a malha de elementos finitos adoptada para o cenário de referência.

Tendo como base o cenário de referência descrito, foi desenvolvido um estudo paramétrico cujas principais conclusões são apresentadas nas secções seguintes.

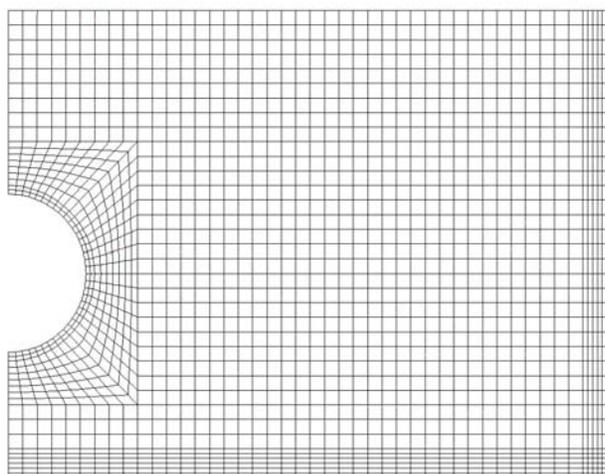


Fig. 13 – Malha de elementos finitos adoptada para o cenário de referência.

4.2 – Influência da profundidade do túnel

Do ponto de vista da resposta dinâmica induzida na superfície do solo, é de todo evidente que a profundidade do túnel é um aspecto importante que deve ser abordado na análise do presente problema. Nesse sentido, foram consideradas duas profundidades adicionais, em correspondência com $H = 12$ m e $H = 15$ m, para além do cenário de referência, onde $H = 9$ m.

A Fig. 14 mostra o deslocamento vertical induzido nos pontos de referência localizados à superfície do maciço e para os três cenários distintos em análise.

Uma visão geral da Fig. 14 permite concluir que a tendência da resposta dinâmica da superfície do solo é bastante complexa. Diversos aspectos contribuem para essa complexidade, nomeadamente a interação ao longo da superfície livre entre de ondas de compressão, de corte e de Rayleigh, sendo consequência dessa interação o comportamento ondulante exibido e os picos invertidos (abaixamentos) presentes nas curvas. O passo da frequência desses picos invertidos varia em função da profundidade do túnel porque a sua ocorrência é dependente da distância entre a fonte e o receptor.

No entanto, apesar da complexidade da tendência, é indiscutível que quanto mais profundo é o túnel mais reduzidos são os níveis de vibração. Na verdade, este efeito é bastante evidente para os pontos mais próximos do alinhamento do túnel, como pode ser visto nas Fig. 14a e b, ou para os pontos localizados longe do alinhamento do túnel (Fig. 14e, f). No último caso, o efeito é mais pronunciado para as frequências superiores a 20 Hz. Este efeito de atenuação em função da profundidade do túnel pode ser atribuído a duas causas principais: i) ao amortecimento, dado que a distância da fonte ao receptor aumenta com a profundidade do túnel, ii) à diminuição da gama de frequências para as quais a excitação gera ondas de Rayleigh. Se a primeira causa tem maior reflexo nos pontos mais próximos do túnel, tanto que é exactamente nesses pontos que a distância fonte receptor é mais influenciada pela profundidade do túnel, a segunda causa justifica em boa parte a conclusão referente aos pontos de observação mais afastados. A esse respeito, Gupta et al. [3] mostrou que o conteúdo de frequência das ondas de Rayleigh é confinado a uma gama de frequências até C_R/d , em que d é a profundidade da fonte e C_R é a velocidade das ondas de Rayleigh. Assim, o aumento da profundidade do túnel conduz a uma redução da gama de frequências onde o contributo das ondas de Rayleigh é importante. Note-se que enquanto para $H=9,0$ m a frequência de corte das ondas de Rayleigh corresponde a aproximadamente 20Hz-30Hz, para o cenário do túnel mais profundo a respectiva frequência de corte encontrar-se-á nos 13 a 20 Hz.

Um outro aspecto interessante que é possível observar na Fig. 14 prende-se com as frequências para as quais ocorrem os valores mínimos da resposta mediante a profundidade do túnel. Com efeito, quanto maior é a profundidade do túnel menor é a frequência para a qual se verifica tal efeito, sendo a diferença de frequência de ocorrência menor na gama das baixas frequências quando comparada com a gama das altas frequências. Ainda relativamente a este aspecto é notória a diminuição da referida diferença com o aumento da distância do ponto de observação, o que aliás se encontra bem patente na Fig. 14f.

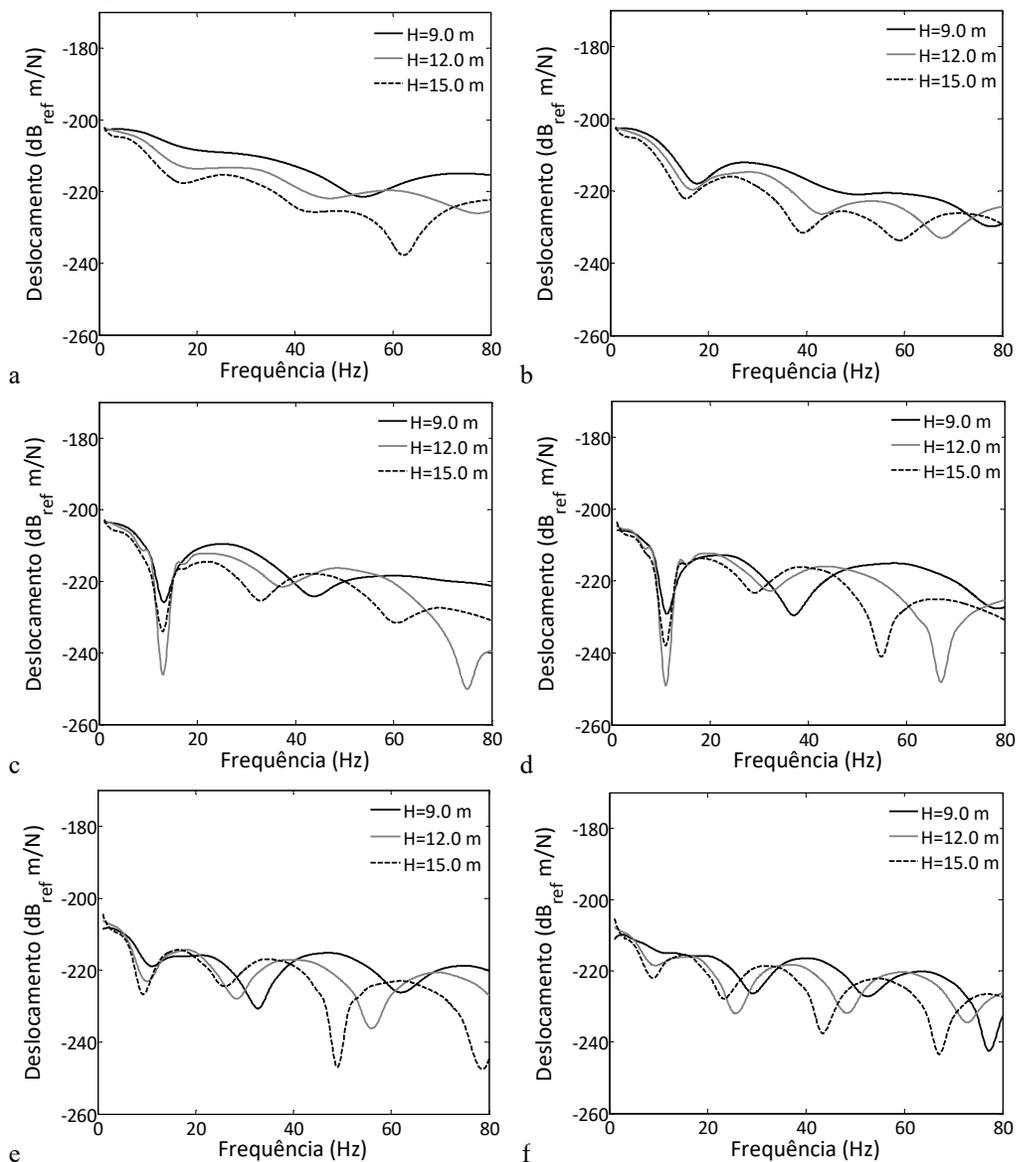


Fig. 14 – Amplitude do deslocamento vertical para profundidades distintas do túnel em diferentes pontos de observação: a) ponto A; b) ponto B; c) ponto C; d) ponto D; e) ponto E; f) ponto F

Analisando agora a resposta dinâmica do ponto localizado sob a carga aplicada, verifica-se que a profundidade do túnel teve um efeito negligenciável. Como se pode observar na Fig. 15, apenas ligeiras diferenças podem ser observadas nos resultados obtidos, sobretudo se a atenção se encontrar

direcionada para os túneis mais profundos. Esta conclusão é bastante importante do ponto de vista das vibrações induzidas pelo tráfego ferroviário. De facto, as cargas dinâmicas geradas durante a passagem do comboio são dependentes do comportamento dinâmico da base da via (Lombaert e Degrande, 2009; Alves Costa et al., 2012 a). Assim, uma vez que a resposta dinâmica do túnel parece ser muito semelhante, principalmente se a espessura de solo acima do túnel for superior a 1,5 vezes o seu diâmetro, o problema da interacção dinâmica entre o comboio e o resto do sistema (via-túnel-macico) deve ser independente da profundidade do túnel. Deste modo, as cargas/forças dinâmicas de interacção geradas pelo tráfego ferroviário num túnel com uma certa profundidade podem ser usadas como fonte de excitação (dado de entrada) para o estudo das vibrações geradas num túnel com uma profundidade diferente.

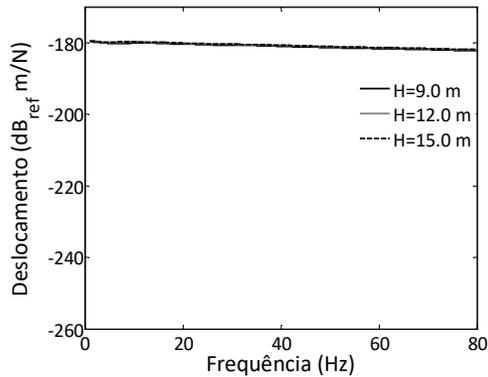


Fig. 15 – Amplitude do deslocamento vertical no ponto de aplicação da carga para profundidades distintas do túnel.

4.3 – Influência da espessura do revestimento do túnel

A espessura do revestimento do túnel é um dos parâmetros que afectam o comportamento dinâmico do túnel no plano, bem como a sua rigidez à flexão na direcção longitudinal e, por conseguinte, o mecanismo de interacção túnel-macico. Com o intuito de investigar o efeito deste parâmetro no comportamento dinâmico global do sistema, são considerados dois novos cenários, com as seguintes espessuras do revestimento: $d=0,5$ m e $d=0,7$ m. O raio exterior do túnel assume-se constante sendo o seu valor apresentado na Fig. 12. Embora os valores assumidos para a espessura do revestimento possam parecer exagerados quando comparados com o diâmetro do túnel, do ponto de vista teórico, é importante considerar um contraste elevado dos valores a fim de realçar a influência deste parâmetro.

A Fig. 16 ilustra os deslocamentos verticais dos pontos de observação situados à superfície do macico em função da frequência de excitação e para os três cenários considerados.

Uma primeira observação da Fig. 16 sugere a divisão dos resultados em dois grupos principais: i) resposta dinâmica para distâncias até 8 m (Fig. 16a, b, c); ii) resposta dinâmica para distâncias superiores a 8 m (Fig. 16d, e, f). No caso do primeiro grupo, verifica-se que o aumento da rigidez do túnel através do aumento da espessura do seu revestimento não afecta substancialmente os deslocamentos verticais à superfície do macico. Contudo, nas Fig. 16b e c, observa-se que o primeiro pico invertido se desloca para frequências mais elevadas com o aumento da rigidez do túnel. Este efeito pode dever-se ao aumento das frequências próprias dos modos de flexão do túnel livre no plano, induzido pelo aumento da espessura do seu revestimento. Atentando agora na resposta dinâmica para distâncias superiores a 8 m, a tendência geral aponta para a redução dos deslocamentos verticais à superfície com o aumento da espessura do revestimento, principalmente para frequências superiores a aproximadamente 35 Hz. Este efeito, mais notório com o aumento da distância fonte-receptor deve-se em grande medida ao aumento da rigidez de flexão longitudinal do

túnel, o que, por sua vez, permite uma maior degradação da carga aplicada e consequente minimização da resposta. Como é evidente, este efeito será mais notório para comprimentos de onda mais curtos, ou seja, frequências mais elevadas.

Um outro aspecto curioso, e muito enfatizado nas Fig. 16d, e, f, prende-se com o aumento da frequência de ocorrência dos picos invertidos acompanhando a evolução da espessura do revestimento, o que denota bem a influência de rigidez do túnel no mecanismo de interação túnel-macço. Com efeito, o aumento de espessura do revestimento conduz a um acréscimo das frequências naturais do túnel, tanto no plano como na direcção longitudinal, conduzindo a um aumento das frequências em que tal efeito se verifica.

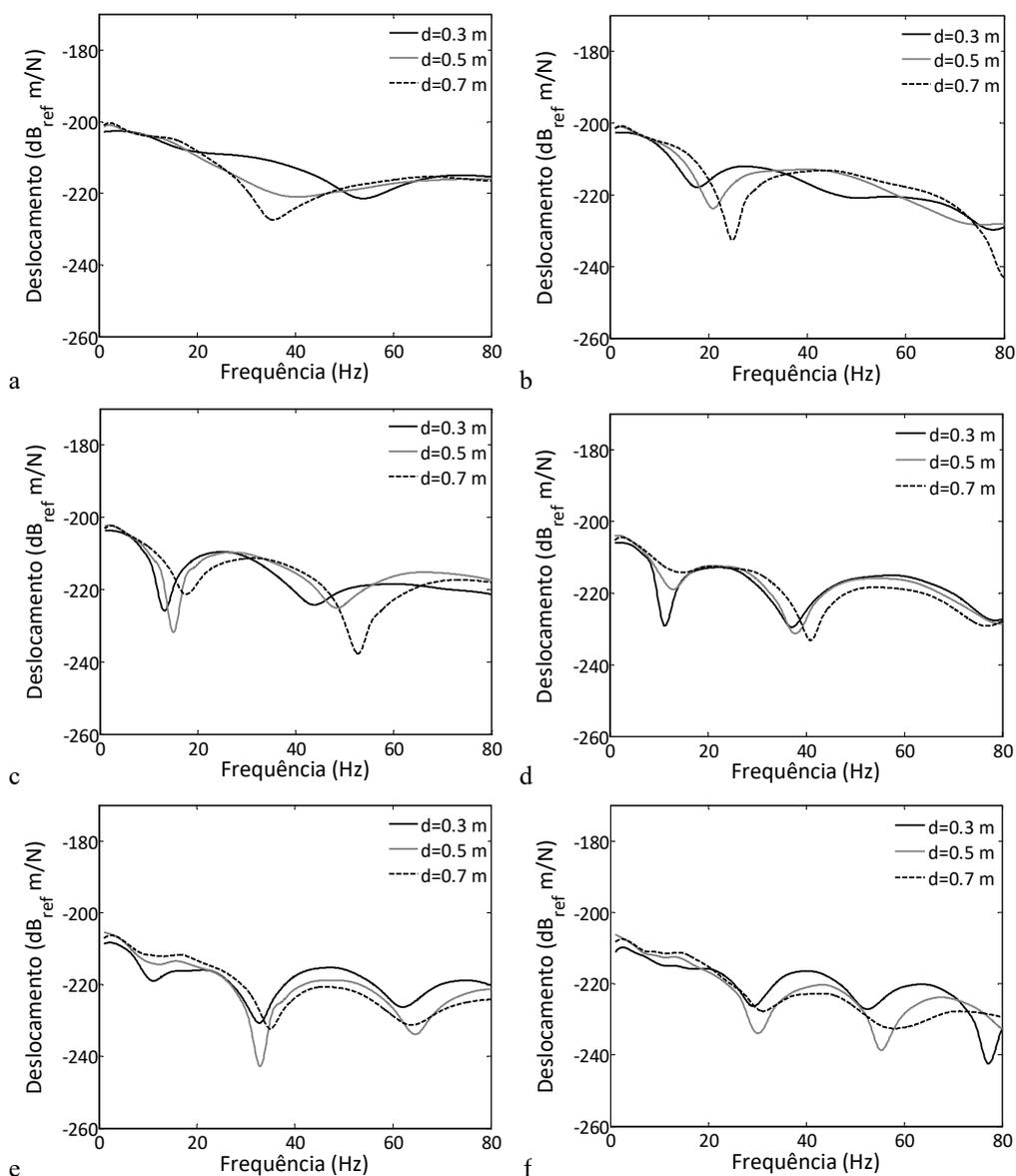


Fig. 16 – Amplitude do deslocamento vertical em diferentes locais para espessuras do revestimento do túnel distintas: a) ponto A; b) ponto B; c) ponto C; d) ponto D; e) ponto E; f) ponto F

Face ao anteriormente exposto, pode pois concluir-se que o aumento da rigidez do revestimento do túnel pode ser encarado como uma medida de mitigação para a redução das vibrações induzidas pelo tráfego, quando a distância entre a fonte e o receptor é superior a 1,5 vezes o diâmetro do túnel, sendo pouco eficaz para distâncias menores do que a referida.

No que diz respeito à influência da espessura do revestimento na resposta dinâmica do próprio túnel, a Fig. 17 compara os deslocamentos verticais do ponto situado sob a carga aplicada para os três cenários considerados.

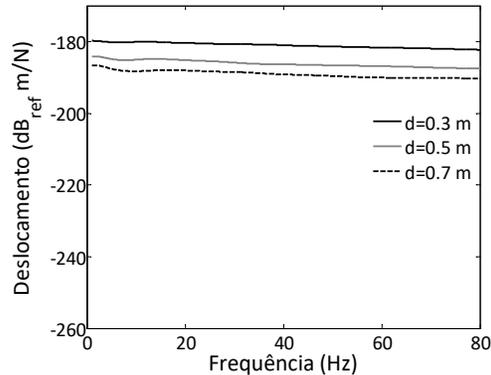


Fig. 17 – Amplitude do deslocamento vertical no ponto de aplicação da carga para diferentes espessuras do revestimento do túnel.

Constata-se que, para o ponto onde a carga é aplicada, a tendência geral da amplitude do deslocamento vertical é semelhante para os três cenários considerados. Contudo, o aumento da espessura do revestimento conduz a uma redução considerável da amplitude dos deslocamentos. Assim, contrariamente ao observado na última sub-seção, a espessura do revestimento do túnel é um parâmetro que pode desempenhar um papel não negligenciável no mecanismo de interação comboio-via-túnel. Com efeito o aumento da espessura do revestimento conduz a um aumento da rigidez do suporte da via que poderá ter reflexo no mecanismo de geração de vibrações induzidas pelo tráfego ferroviário, tanto mais que o referido mecanismo resulta da interacção dinâmica entre o veículo e o sistema remanescente (via-túnel-macizo). Porém a magnitude de tal influência é dependente das propriedades resilientes da via.

4.4 – Influência do amortecimento material do solo

O problema das vibrações induzidas no interior de túneis é bastante complexo, envolvendo não só as propriedades mecânicas do túnel mas também as propriedades do maciço, como, por exemplo, a sua rigidez, estratificação e amortecimento. Este último parâmetro, de difícil quantificação *in-situ*, merece uma atenção especial dada a sua relevância na minoração da amplitude das vibrações com o aumento da distância fonte-receptor. De modo a ilustrar a influência do amortecimento material do solo um estudo paramétrico é agora apresentado, sendo, para além do cenário de referência onde $\xi=0,04$, analisadas duas outras situações com coeficientes de amortecimento de 0,02 e 0,06.

A atenuação dos níveis de vibração é devida a dois mecanismos distintos: ao amortecimento geométrico e ao amortecimento material. No que concerne ao amortecimento geométrico compete referir que não corresponde a uma perda de energia do sistema, mas sim ao seu espalhamento devido à propagação da onda. Desse modo é apenas dependente da geometria da frente de onda, e, conseqüentemente, do tipo de onda, e da distância do ponto de observação à fonte de geração. No presente estudo apenas se abordará a influência do amortecimento material, dado que o amortecimento geométrico não é mais do que uma característica intrínseca à configuração própria do sistema. O amortecimento material está associado a uma efectiva dissipação de energia. O seu

efeito é tanto mais evidente quanto mais elevada for a frequência de excitação (menor comprimento de onda) e a distância entre a fonte e o receptor. Este efeito está bem patente na Fig. 18, onde estão representadas as amplitudes dos deslocamentos verticais dos pontos situados à superfície do maciço em função da frequência de excitação.

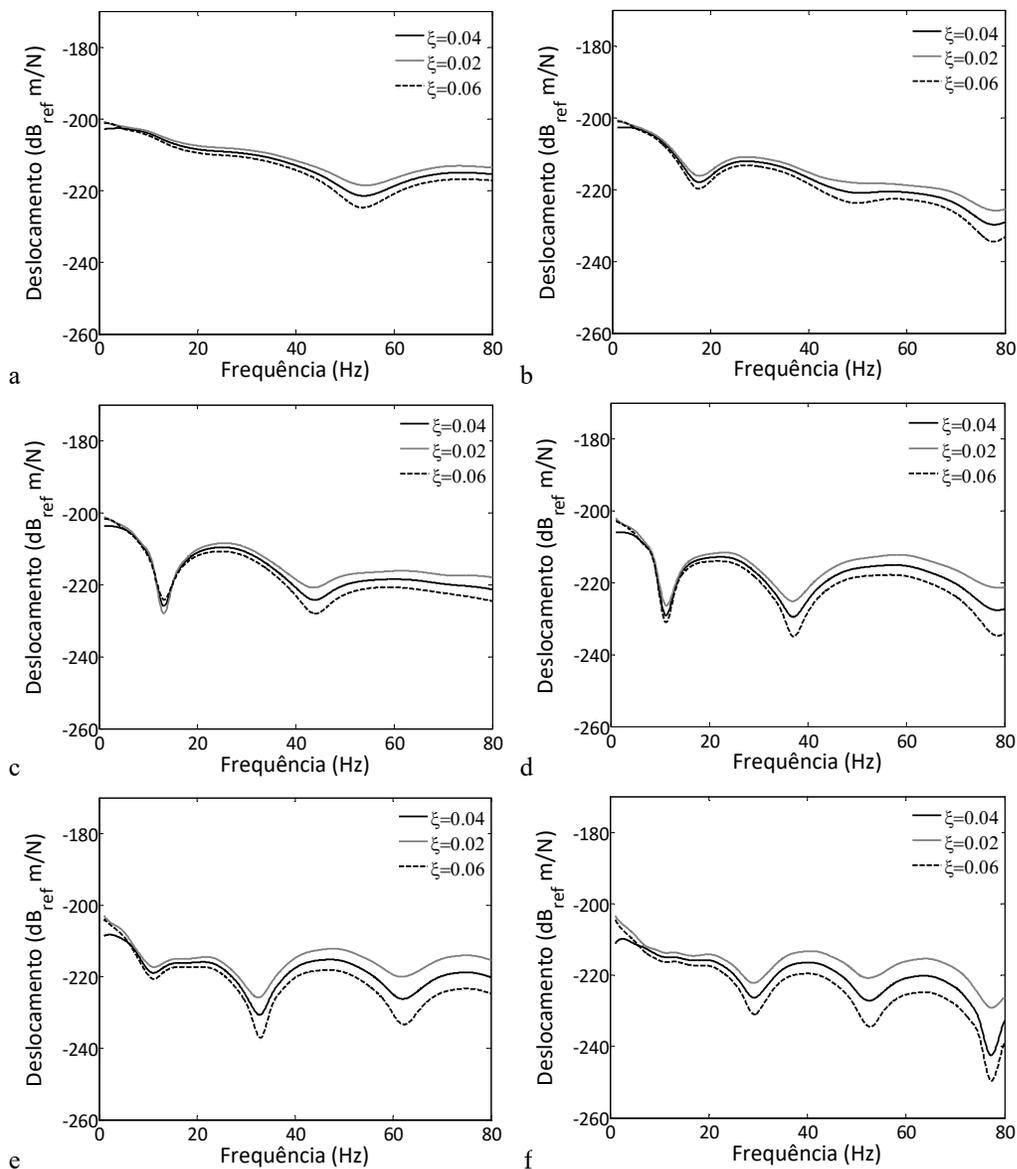


Fig. 18 – Amplitude do deslocamento vertical em diferentes locais para valores do amortecimento material do solo distintos: a) ponto A; b) ponto B; c) ponto C; d) ponto D; e) ponto E; f) ponto F.

Observando a Fig. 18 podem tecer-se algumas considerações: i) como esperado, o aumento do amortecimento está associado a uma diminuição dos níveis de vibração; ii) o efeito do amortecimento é tanto mais notório quanto maior for a frequência de excitação, independentemente da distância fonte-receptor; iii) o efeito de redução na amplitude devido ao amortecimento material é bastante relevante quando a distância fonte-receptor é elevada (ver Fig. 18f). Estes efeitos

justificam-se pela dependência do efeito do amortecimento em relação ao número de ciclos de vibração a que o material foi submetido. Para frequências mais elevadas, ou seja, comprimentos de onda menores, pode alcançar-se uma redução considerável dos níveis de vibração quando a distância fonte-receptor implica um número significativo de ciclos a que o material fica sujeito.

Relativamente à influência do amortecimento do solo sobre a resposta dinâmica do ponto na soleira túnel, cujos resultados estão representados na Fig. 19, conclui-se que o amortecimento material é um parâmetro mais ou menos negligenciável para a avaliação dos deslocamentos do próprio túnel. Embora não tenha sido analisado no presente trabalho, as conclusões aqui encontradas permitem avançar que o amortecimento material tem uma pequena influência no mecanismo de interação dinâmica comboio-via, não sendo por isso apreciável o seu efeito no processo de geração de vibrações, contrariamente ao que ocorre no processo de propagação.

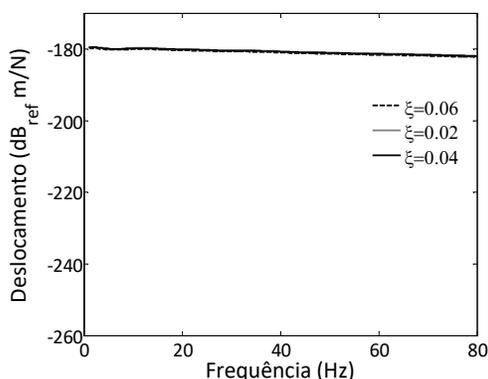


Fig. 19 – Amplitude do deslocamento vertical no ponto de aplicação da carga para diferentes valores do amortecimento material do solo.

5 – CONCLUSÕES

No presente artigo um modelo 2.5D MEF-PML foi apresentado e validado. Esta ferramenta de cálculo é especialmente adequada para a análise da resposta dinâmica de estruturas com desenvolvimento infinito, como, por exemplo, túneis e outras infraestruturas de transporte.

Atendendo a que as equações que servem de base à formulação dos PML são bastante semelhantes às equações frequentemente utilizadas numa análise baseada em elementos finitos, a incorporação de uma formulação 2.5D PML numa aplicação numérica baseada no MEF 2.5D é relativamente simples. O aspecto basilar de tal incorporação consiste na definição das funções de mudança de referencial, tendo sido sugeridas e adoptadas funções de mudança de referencial capazes de lidar com ondas evanescentes e propagantes ao longo da secção transversal do domínio.

A validação do método foi realizada numa primeira fase por comparação entre os resultados numéricos e os resultados teóricos calculados através de funções de Green 2.5D. A partir desses exemplos simples demonstrou-se a elevada precisão que pode ser alcançada utilizando o modelo proposto. Na verdade, a concordância entre os resultados teóricos e os numéricos foi perfeita, permitindo inferir a supremacia da técnica dos PML, quando comparada com os procedimentos locais convencionais para absorção de ondas, como por exemplo as fronteiras absorventes ou os elementos infinitos. Para além disso, foi também demonstrado que os domínios ilimitados podem ser simulados com precisão até mesmo adoptando malhas de elementos finitos com dimensão reduzida.

Após a validação teórica preliminar, um segundo exemplo, que compreende a interacção dinâmica túnel-macço, foi simulado e a solução obtida foi comparada com as anteriormente

descritas por outros autores (Gupta et al., 2007). Apesar da simplicidade do exemplo proposto, ele tem a vantagem de ter sido adoptado por outros autores para validar as suas propostas para lidar com este problema complexo. A comparação entre a solução do modelo 2.5D MEF-PML e as soluções semi-analíticas revelaram um resultado quase perfeito, suplantando os resultados anteriormente obtidos através de um modelo periódico MEF-MEC. Na realidade, mesmo usando uma malha de elementos finitos reduzida, com dimensão igual ao domínio interesse, foi possível obter resultados com uma precisão muito elevada.

Com base na análise de validação teórica, é possível concluir, ou pelo menos sugerir, que a metodologia 2.5D MEF-PML pode ser encarada como uma alternativa interessante a procedimentos numéricos mais complexos como, por exemplo, o modelo 2.5D MEF-MEC. De facto, a abordagem proposta parece superar uma das principais desvantagens do procedimento com base em elementos finitos: a sua incapacidade para lidar com domínios ilimitados.

Por último, com o intuito de destacar as potencialidades da abordagem proposta, apresentou-se um estudo paramétrico, onde se avaliou a influência de alguns parâmetros relacionados com o túnel e com o solo nas vibrações induzidas à superfície, bem como no próprio túnel.

O estudo paramétrico realizado compreendeu a interacção dinâmica entre um túnel e o meio semi-indefinido onde este está integrado, tendo sido investigada a influência de três variáveis (profundidade do túnel, espessura do revestimento do túnel e amortecimento material do solo) nos deslocamentos verticais induzidos, devido à aplicação de uma carga vertical harmónica, não móvel, no interior do túnel. O estudo levado a cabo permitiu ilustrar a influência de cada variável, apresentando-se de seguida as conclusões que podem ser retiradas deste estudo de modo resumido: demonstra-se que há uma diminuição dos níveis de vibração à superfície com o aumento da profundidade do túnel; a influência da espessura do revestimento do túnel na redução de vibrações é apenas significativa para maiores distâncias fonte-receptor (e o efeito será mais notório para comprimentos de onda mais curtos, ou seja, frequências mais elevadas); a redução dos níveis de vibração induzidos por um aumento do amortecimento material do solo é tanto mais evidente quanto maior é a frequência de excitação e a distância fonte-receptor. Com base no estudo realizado foi também possível constatar que o amortecimento do solo e a profundidade do túnel são parâmetros com influência desprezível no mecanismo de interacção dinâmica comboio-via-túnel.

Uma observação final deve ser feita no que diz respeito às potencialidades da abordagem apresentada na previsão de vibrações induzidas pelo tráfego. Na realidade, embora a análise de cargas móveis não tenha sido apresentada no presente artigo, deve salientar-se que o actual modelo numérico foi desenvolvido a partir de uma ferramenta 2.5D MEF-MEC anterior, que permite o estudo da interacção comboio-via-macizo (Alves Costa et al., 2012a; Alves Costa et al., 2012c), estando estas mesmas potencialidades também disponíveis na presente proposta, ou seja, o modelo numérico é capaz de simular problemas com cargas móveis, bem como a interacção comboio-via, sendo, desse ponto de vista, uma ferramenta numérica abrangente para resolver problemas de vibrações induzidas pelo tráfego ferroviário em túneis.

6 – AGRADECIMENTOS

Este trabalho foi financiado pelos projectos POCI-01-0145-FEDER-007457 - CONSTRUCT – Instituto de I&D em Estruturas e Construções e POCI-01-0145-FEDER-029577, financiados pelo FEDER e pelo COMPETE2020 - Programa Operacional Competitividade e Internacionalização (POCI) – pelo PIDDAC e pela FCT - Fundação para a Ciência e a Tecnologia.

7 – REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Alves Costa, P., et al., *A 2.5D finite element model for simulation of unbounded domains under dynamic loading*, in *7th European Conference on Numerical Methods in Geotechnical Engineering*, T. Benz and S. Nordal, Editors. 2010: Trondheim. p. 782-790.
- Alves Costa, P., et al., *Influence of soil non-linearity on the dynamic response of high-speed railway tracks*. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 2010. 30(4): p. 221-235.
- Alves Costa, P., *Moving loads on the ground: a 2.5D transformed finite element code for train-track-soil interaction*, in (*Relatório interno*). 2008, FEUP: Porto.
- Alves Costa, P., R. Calçada, and A. Cardoso, *Track-ground vibrations induced by railway traffic: In-situ measurements and validation of a 2.5D FEM-BEM model*. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 2012a. 32: p. 111-128.
- Alves Costa, P., R. Calçada, and A. Silva Cardoso, *Ballast mats for the reduction of railway traffic vibrations. Numerical study*. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 2012b. 42(0): p. 137-150.
- Alves Costa, P., R. Calçada, and A. Silva Cardoso, *Track-ground vibrations induced by railway traffic*, in *Applications of Computational Mechanics in Geotechnical Engineering*, L. Sousa, et al., Editors. 2012c, Balkema. p. 125-159.
- Amado Mendes, P., L. Godinho, and P. Alves Costa, *2.5D modeling of soil-structure interaction using a coupled MFS-FEM formulation*, in *11th World Congress on Computational Mechanics (WCCM XI)*, E. Oñate, J. Oliver, and Huerta, Editors. 2014: Barcelona.
- Barbosa, J.M.d.O., J. Park, and E. Kausel, *Perfectly matched layers in the thin layer method*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2012. 217-220(0): p. 262-274.
- Basu, U. and A.K. Chopra, *Perfectly matched layers for time-harmonic elastodynamics of unbounded domains: theory and finite-element implementation*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2003. 192: p. 1337-1375.
- Basu, U., *Explicit finite element perfectly matched layer for transient three-dimensional elastic waves*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2009. 77: p. 151-176.
- Berenger, J., *A perfectly matched layer for absorption of electromagnetic waves*. Journal of computational physics, 1994. 114: p. 185-200.
- Bian, X., E. Zeng, and Y. Chen, *Ground motions generated by harmonic loads moving in subway tunnel*, in *Proceedings of the Third International Symposium on Environmental Vibrations: Prediction, Monitoring, Mitigation and Evaluation. ISEV 2007*. 2007: Taipei, Taiwan.
- Bian, X., W. Jin, and H. Jiang, *Ground-borne vibrations due to dynamic loading from moving trains in subway tunnels*. Journal of Zhejiang University - Science A (Applied Physics & Engineering), 2012. 13(11): p. 870-876.
- Chew, W. and Q. Liu, *Perfectly matched layers for elastodynamics: a new absorbing boundary condition*. Journal of Computational Acoustics, 1996. 4: p. 341-359.
- Clouteau, D., et al., *Free field vibrations due to dynamic loading on a tunnel embedded in a stratified medium*. Journal of Sound and Vibration, 2005. 283(1-2): p. 173-199.
- Domínguez, J., *Boundary Elements in Dynamics*. 1993: Elsevier Applied Science.
- Forrest, J. and H. Hunt, *A three-dimensional tunnel model for calculation of train-induced ground vibration*. Journal of Sound and Vibration, 2006. 294: p. 678-705.
- François, S., et al., *A 2.5D coupled FE-BE methodology for the dynamic interaction between longitudinally invariant structures and a layered halfspace*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2010. 199(23-24): p. 1536-1548.
- François, S., et al., *A 2.5D displacement-based PML for elastodynamic wave propagation*, in *IV European Conference on Computational Mechanics 2010*: Paris, France.
- François, S., *Nonlinear modelling of the response of structures due to ground vibrations*, in *Departement Burgerlijke Bouwkunde*. 2008, Katholieke Universiteit Leuven: Leuven.

- Galvín, P. and J. Domínguez, *Experimental and numerical analyses of vibrations induced by high-speed trains on Córdoba-Málaga line*. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 2009. 29(4): p. 641-657.
- Galvín, P., et al., *A 2.5D coupled FE-BE model for the prediction of railway induced vibrations*. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 2010. 30(12): p. 1500-1512.
- Godinho, L., et al., *A coupled MFS-FEM model for 2-D dynamic soil-structure interaction in the frequency domain*. Computers & Structures, 2013. 129(0): p. 74-85.
- Grundmann, H. and J. Dinkel, *Moving oscillating loads acting on a dam over a layered half space*, in *Wave 2000*, C. Schmid, Editor. 2000, Balkema: Bochum. p. 53-70.
- Gupta, S., et al., *A comparison of two numerical models for the prediction of vibrations from underground railway traffic*. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 2007. 27(7): p. 608-624.
- Gupta, S., et al., *Influence of tunnel and soil parameters on vibrations from underground railways*. Journal of Sound and Vibration, 2009. 327: p. 70-91.
- Gupta, S., et al., *Numerical modelling of vibrations from a Thalys high speed train in the Groene Hart tunnel* Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 2010. 30(3): p. 82-97.
- Hussein, M. and H. Hunt, *A computationally efficient software application for calculating vibration from underground railways*. Journal of Physics Conference Series, 2009. 181(1): p. 1-6.
- Hussein, M. and H. Hunt, *A numerical model for calculating vibration from a railway tunnel embedded in a full-space*. Journal of Sound and Vibration, 2007. 305(3): p. 401-431.
- Hwang, R. and J. Lysmer, *Response of buried structures to travelling waves*. Journal of Geotechnical Engineering Division, 1981. 107(2): p. 183-200.
- Johnson, S., *Notes on Perfectly Matched Layers (PMLs)*, L. notes, Editor. 2010, Massachusetts Institute of Technology.
- Jones, S. and H. Hunt, *Predicting surface vibration from underground railways through inhomogeneous soil*. Journal of Sound and Vibration, 2012. 331: p. 2055-2069.
- Jones, S. and H. Hunt, *Voids at the tunnel-soil interface for calculation of ground vibration from underground railways*. Journal of Sound and Vibration, 2011. 330: p. 245-270.
- Kausel, E. and J.M. de Oliveira Barbosa, *PMLs: A direct approach*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2012. 90(3): p. 343-352.
- Khani, M., *Dynamic Soil-Structure Interaction Analysis Using the Scaled Boundary Finite Elements Method* in *School of Civil and Environmental Engineering*. 2007, University of New South-Wales: Sidney.
- Kuo, K.A., H. Hunt, and M. Hussein, *The effect of a twin tunnel on the propagation of ground vibration from an underground railway*. Journal of Sound and Vibration, 2011. 330: p. 6203-6222.
- Liu, G. and S. Jerry, *A non-reflecting boundary for analyzing wave propagation using the finite element method*. Finite Elements in Analysis and Design, 2003. 39(5-6): p. 403-417.
- Lombaert, G. and G. Degrande, *Ground-borne vibration due to static and dynamic axle loads of InterCity and high-speed trains*. Journal of Sound and Vibration, 2009. 319(3-5): p. 1036-1066.
- Lopes, P., et al., *Análise numérica de vibrações induzidas por tráfego ferroviário em túneis baseada em modelos 2.5D*, in *12º Congresso Nacional de Geotecnia*, G. Correia, Editor. 2010: Guimarães. p. CD-ROM publication.
- Lopes, P., et al., *Modeling of infinite structures by 2.5D FEM-PML. Application to the simulation of vibrations induced in tunnels*, in *Railways 2012. The First International Conference on Railway Technology: Research, Development and Maintenance*, J. Pombo, Editor. 2012: Tenerife, Canarias.
- Lopes, P., et al., *Numerical Modeling of Vibrations Induced in Tunnels: A 2.5D FEM-PML Approach*, in *Traffic Induced Environmental Vibrations and Controls: Theory and Application*, H. Xia and R. Calçada, Editors. 2013, Nova. p. 133-166.

- Lysmer, J. and R.L. Kuhlemeyer, *Finite dynamic model for infinite media*. Journal of Engineering Mechanics Division, 1969. 95: p. 859-877.
- Muller, K., *Dreidimensionale dynamische Tunnel-Halbraum-Interaktion*, in *Lehrstuhl für Baumechanik*. 2007, Technische Universität München: München.
- Rieckh, G., et al., *A 2.5D-Fourier-BEM model for vibrations in a tunnel running through layered anisotropic soil*. Engineering Analysis With Boundary Elements, 2012. 36: p. 960-967.
- Sheng, X., C. Jones, and D. Thompson, *Prediction of ground vibration from trains using wavenumber finite and boundary element method*. Journal of Sound and Vibration, 2006. 293: p. 575-586.
- Sommerfeld, A., *Partial Differential Equations in Physics*. 1949, New York: Academic Press.
- Tadeu, A. and E. Kausel, *Green's functions for two-and-a-half-dimensional elastodynamic problems*. Journal of Engineering Mechanics, 2000. 126(10): p. 1093–1096.
- Wolf, J.P., *The Scaled Boundary Finite Element Method*. 2003: Wiley.
- Yang, Y. and H. Hung, *Soil Vibrations Caused by Underground Moving Trains*. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 2008. 134(11): p. 1633-1644.
- Yang, Y., S. Kuo, and H. Hung, *Frequency independent infinite elements for analyzing semi-infinite problems*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1996. 39: p. 3553-3569.
- Yang, Y.B. and H.H. Hung, *A 2.5D finite/infinite element approach for modelling visco-elastic body subjected to moving loads*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2001. 51: p. 1317-1336.
- Yaseri, A., M.H. Bazyar, and N. Hataf, *3D coupled scaled boundary finite-element/finite-element analysis of ground vibrations induced by underground train movement*. Computers and Geotechnics, 2014. 60(0): p. 1-8.