MODELO CONSTITUTIVO MCC HIPERPLÁSTICO COM DANO ACOPLADO APLICADO A SOLOS ESTRUTURADOS

MCC Hyperplastic constitutive model with coupled damage applied to structured soils

Rogério Francisco Küster Puppi*
Mildred Ballin Hecke**
Celso Romanel***

RESUMO – Este trabalho apresenta um modelo constitutivo elasto-plástico com dano acoplado derivado a partir da definição de potenciais termodinâmicos aplicado à modelagem do comportamento tensão-deformação-resistência de solos estruturados. O modelo pertence à família dos modelos Cam-Clays Modificados e emprega variáveis internas de plasticidade e dano na sua formulação. O trabalho apresenta simulações de ensaios triaxiais e oedométricos em solos. A incorporação do efeito de dano permite a representação dos efeitos de destruição da estrutura dos solos.

SYNOPSIS – This paper presents an elasto-plastic constitutive model with coupled damage derived from definition of thermodynamic potential functionals applied to the modeling of the stress-strain-strength behavior of structured soils. The model belongs to the family of Modified Cam-Clay models and employs internal variables of plasticity and damage in its formulation. The paper presents simulations of triaxial and oedometric tests in soils. The incorporation of damage allows it to represent the effects of soil structure destruction.

Palavras Chave – Modelo Cam-Clay, modelo hiperplástico, dano.

Keywords – Cam-Clay model, hiperplastic model, damage.

1 – INTRODUÇÃO

Neste artigo é apresentado modelo constitutivo que pode variar de forma contínua entre o modelo Cam-Clay Modificado (MCC) e modelo com dano. A possibilidade de incorporar o dano a modelo Cam-Clay permite, de certa forma, controlar a excessiva variação volumétrica que ocorre para materiais com estrutura e materiais com alto grau de pré-adensamento, no "lado seco" do MCC. O modelo aqui descrito pode ser aplicado na simulação de comportamento tensão-deformação de solos residuais e de solos argilosos pré-adensados desde que a envoltória de trajetórias de tensão q x p, além do ponto crítico, possa ser representada por uma reta passante pela origem do gráfico q x p.

* Professor D.Sc. PPGEC – UTFPR Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, Paraná, Brasil, E-mail: rfkpuppi@gmail.com
** Professora D.Sc. CESEC – PPGMNE – UFPR Universidade Federal do Paraná, Curitiba, Paraná, Brasil, E-mail: mildredhecke@gmail.com
*** Professor PhD. PPGEC – PUC-RIO –Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brasil, E-mail: romanel@civ.puc-rio.br

http://dx.doi.org/10.24849/j.geot.2018.142.02

O modelo é derivado usando o enquadramento de hiperplasticidade de Houlsby e Puzrin (2000) e desta forma obedece às leis da Termodinâmica. Como apontam Osman e Birchall (2015), neste enfoque toda a relação constitutiva pode ser derivada de dois potenciais escalares de energia. Um potencial de energia livre que provê a lei de elasticidade, e um potencial de dissipação que provê a função de escoamento, a direção de fluxo plástico e a evolução das variáveis internas de dano.

De acordo com Einav *et al*. (2007), o comportamento inelástico de materiais tem sido modelado com êxito através da utilização de duas abordagens distintas: teoria da plasticidade e mecânica do dano. Teorias de plasticidade, incluindo princípios termodinâmicos, deram origem ao que é chamado de Hiperplasticidade (Houlsby e Puzrin, 2000).

Para o desenvolvimento do modelo foi empregada a formulação dos potenciais de energia apresentados por Einav *et al*. (2007), que combinam os conceitos de hiperplasticidade e dano mecânico (CDM) (Kachanov, 1958) dentro de uma única teoria. Da definição destes dois potenciais é possível obter a lei de escoamento do material e suas relações constitutivas, por derivação direta aplicada sobre as funções de potenciais.

Os dois potenciais consistem de uma função potencial de energia, que reflete a quantidade de energia armazenada no material, expressa por meio de uma função potencial de Gibbs e uma função potencial de dissipação, que representa a maneira como o material dissipa energia, à medida que sofre carregamento e deformação.

A expressão destes potenciais faz uso de estados de tensão, de estados de deformação e de um conjunto de variáveis internas. Estas variáveis internas são variáveis de tipo escalar, vetorial ou tensorial e devem ser escolhidas de forma conveniente. Variáveis internas não podem ser determinadas de forma direta, como é o caso das deformações plásticas de um material, que só podem ser determinadas após o descarregamento do mesmo. No modelo aqui descrito foram empregadas como variáveis internas, deformações plásticas e variáveis internas de dano, estas últimas associadas à redução da área resistente útil de uma seção transversal total, como descrito na formulação apresentada no Apêndice.

Os modelos desenvolvidos dentro da teoria da plasticidade pressupõem a existência de uma função ou superfície de escoamento. No caso deste modelo de hiperplasticidade, a superfície de escoamento deriva de uma transformação aplicada sobre a função potencial de dissipação, enquanto que a evolução das variáveis internas é estabelecida a partir das propriedades da função potencial de dissipação. Em alguns modelos, a evolução das variáveis internas de dano são descritas por meio de regras de fluxo distintas das regras de fluxo associadas à evolução dos incrementos de deformação plástica. Estes modelos correspondem a modelos mencionados por Einav *et al*. (2007), que sugerem que uma função de dissipação desacoplada possa ser apropriada para representar modelos de superfícies cinemáticas múltiplas para plasticidade com endurecimento. O emprego de funções de dissipação desacoplada para modelos de plasticidade-dano pode resultar em dano antes do surgimento de deformações plásticas, ou da ocorrência de deformações plásticas antes da ocorrência de dano.

O uso de um modelo de plasticidade com dano acoplado implica que dano e plasticidade sempre ocorrem simultaneamente e, neste caso apresentado, vinculados a um único critério de escoamento.

2 – MODELO CAM-CLAY MODIFICADO DE PLASTICIDADE COM DANO ACOPLADO

Einav *et al*. (2007) apresentaram uma formulação de modelo MCC de plasticidade com dano acoplado, que foi posteriormente usada por Puppi (2008) para implementar um modelo para solo estruturado.

Einav *et al.* (2007) empregaram, além das variáveis internas de plasticidade, também duas variáveis escalares internas de dano para modelar comportamento de argilas sensíveis: uma associada ao modo de deformação volumétrica e outra ao modo de deformação por cisalhamento.

O modelo é derivado a partir dos potenciais de energia livre de Gibbs e de dissipação. Na expressão da função potencial de Gibbs $g = g(\boldsymbol{\sigma},\Im)$, o tensor geral de tensões $\boldsymbol{\sigma}$ é substituído pelo vetor de tensões p e q utilizado para representar estados triaxiais axissimétricos de tensões de ensaios de solos. Nos ensaios triaxiais $p = (\sigma_1 + 2\sigma_3)/3$ e $q = (\sigma_1 - \sigma_3)$, representam a tensão normal média efetiva e a tensão desviadora, respectivamente.

Função potencial de energia livre de Gibbs (Einav *et al.*, 2007):

$$g = -\left(\frac{\kappa^* p}{1-\alpha_d^v}\right)\left(\log\left(\frac{p}{p_0}\right)-1\right) - \frac{q^2}{6G\left(1-\alpha_d^s\right)} - p.\alpha_p^v - q.\alpha_p^s \tag{1}$$

onde:
κ^* – índice de recompressão relacionado com o módulo elástico volumétrico;
p_0 – a pressão isotrópica de referência para a qual é assumido deformação volumétrica $\varepsilon_v = 0$;
G – módulo cisalhante ;
p_0 – a pressão isotrópica de referência para a qual é assumido deformação volumétrica $\varepsilon_v = 0$;
α_p^v – variável interna de plasticidade associada ao modo de deformação volumétrica;
α_p^s – variável interna de plasticidade associada ao modo de deformação por cisalhamento;
α_d^v – variável interna de dano associada ao modo de deformação volumétrica;
α_d^s – variável interna de dano associada ao modo de deformação por cisalhamento.

Função potencial de dissipação de energia (Einav *et al.*, 2007):

$$d = \left(\frac{p_y}{2}\right)\left(\dot{\alpha}_p^v + R_d^v\dot{\alpha}_d^v + \sqrt{\left(r_p\dot{\alpha}_p^v\right)^2 + \left(r_d R_d^v\dot{\alpha}_d^v\right)^2 + \left(r_p M\dot{\alpha}_p^s\right)^2 + \left(r_d M R_d^s\dot{\alpha}_d^s\right)^2}\right) \geq 0 \tag{2}$$

onde:
p_y – tensão de pré-adensamento isotrópica corrente;
r_p – fator de influência devido à plastificação;
r_d – fator de influência devido ao dano.

onde

$$R_d^v\left(p,\alpha_d^v\right) = \frac{\kappa^*}{\left(1-\alpha_d^v\right)^2}\left(\log\left(\frac{p}{p_0}\right)-1\right) \tag{3}$$

$$R_d^s\left(q,\alpha_d^s\right) = \frac{q}{6G\left(1-\alpha_d^s\right)^2} \tag{4}$$

A relação entre o efeito de dano e o efeito de plasticidade é regulada pela proporção entre os parâmetros r_p/r_d, que estão relacionados pela expressão:

$$\frac{1}{r_p^2} + \frac{1}{r_d^2} = 1 \tag{5}$$

A função de escoamento y (em termos de tensões generalizadas de dissipação) é expressa por:

$$y=\left(\frac{\chi_p^v-p_y/2}{r_p}\right)^2+\left(\frac{\chi_d^v-R_d^v p_y/2}{r_d R_d^v}\right)^2+\left(\frac{\chi_p^s}{r_p M}\right)^2+\left(\frac{\chi_d^s}{r_d M R_d^s}\right)^2-\left(\frac{p_y}{2}\right)^2=0 \tag{6}$$

onde

χ_p^v – tensão generalizada de plastificação associada à variável interna α_p^v;

χ_p^s – tensão generalizada de plastificação associada à variável interna α_p^s;

χ_d^v – tensão generalizada de dano associada à variável interna α_d^v;

χ_d^s – tensão generalizada de dano associada à variável interna α_d^s;

M – declividade da linha de estado crítico.

A função de escoamento no espaço real de tensões é obtida tendo em conta o princípio de ortogonalidade de Ziegler, que implica que $\chi_p^v=\overline{\chi}_p^v$, $\chi_p^s=\overline{\chi}_p^s$, $\chi_d^v=\overline{\chi}_d^v$ e $\chi_d^s=\overline{\chi}_d^s$, onde:

$$\overline{\chi}_p^v=-\frac{\partial g}{\partial \alpha_p^v}=p \tag{7}$$

$$\overline{\chi}_d^v=-\frac{\partial g}{\partial \alpha_d^v}=\frac{\kappa^* p}{\left(1-\alpha_d^v\right)^2}.\left(\log\left(\frac{p}{p_0}\right)-1\right) \tag{8}$$

$$\overline{\chi}_p^s=-\frac{\partial g}{\partial \alpha_p^s}=q \tag{9}$$

$$\overline{\chi}_d^s=-\frac{\partial g}{\partial \alpha_d^s}=\frac{q^2}{6G\left(1-\alpha_d^s\right)^2} \tag{10}$$

Substituindo as expressões de (7) a (10) em (6), obtém-se a expressão da função de escoamento y, em termos de tensões triaxiais p e q:

$$y=\left(p-\frac{p_y}{2}\right)^2+\left(\frac{q}{M}\right)^2-\left(\frac{p_y}{2}\right)^2\leq 0 \tag{11}$$

onde a pressão corrente de pré-adensamento (p_y) pode ser escrita de forma geral como uma função da pressão inicial de pré-adensamento (p_{y0}) e das variáveis internas de plasticidade e dano:

$$p_y=p_{y0}\left(\alpha_p^v,\alpha_d^v,\alpha_d^s\right)=p_{y0}.\Pi\left(\alpha_p^v\right)\sqrt{\Gamma\left(\alpha_d^v\right)\Gamma\left(\alpha_d^s\right)} \tag{12}$$

Na expressão (26) foram assumidas, por Einav *et al.* (2007), como funções convenientes:

$$\Pi\left(\alpha_p^v\right)=\exp\left(\alpha_p^v/\left(\lambda^*-\kappa^*\right)\right) \tag{13}$$

$$\Gamma\left(\alpha_d^v\right) = \delta_{rem} + \left(1 - \delta_{rem}\right).\exp\left(-3.\left(\alpha_d^v / \left(1 - \alpha_d^v\right)\right).\left(\left(1 - D_{95}\right)/D_{95}\right)\right) \qquad (14)$$

$$\Gamma\left(\alpha_d^s\right) = \delta_{rem} + \left(1 - \delta_{rem}\right).\exp\left(-3.\left(\alpha_d^s / \left(1 - \alpha_d^s\right)\right).\left(\left(1 - D_{95}\right)/D_{95}\right)\right) \qquad (15)$$

onde:
δ_{rem} – fator de pressão de pré-adensamento residual remanescente após o dano atingir o limite;
D_{95} – fator correspondente ao estado em que é alcançado 95% do dano sobre o decaimento do intervalo de p_{y0} a $p_{y\text{-}rem}$ (D_{95} = 0,93[1]).

A função (12) deve ser ajustada a partir de ensaios de compressão isotrópica de solos. Esta função contém as informações essenciais de endurecimento/amolecimento e de deformabilidade do material.

A Figura 1 mostra a curva de tensão de pré-adensamento p_y, expressa de forma genérica pela equação (26), que representa a evolução de p_y após ser atingido o escoamento em p_{y0}. Na Figura 1 κ^* é o índice de recompressão relacionado com o módulo elástico volumétrico e λ^* é o índice de compressão, relacionado com a inclinação da reta virgem, do ensaio de compressão isotrópica.

Na Figura 1 pode ser observado que o dano afeta os módulos de elasticidade, reduzindo-os à medida que o dano aumenta. As equações (A26) e (A27), apresentadas no apêndice, mostram a variação do módulo de compressibilidade volumétrica κ^* e do módulo cisalhante G, com a evolução do dano.

A constatação da presença do dano, no ensaio de compressão isotrópica, é indicada pela curvatura da reta virgem e pelo aumento da inclinação do trecho de descarregamento em relação ao trecho de recarregamento inicial.

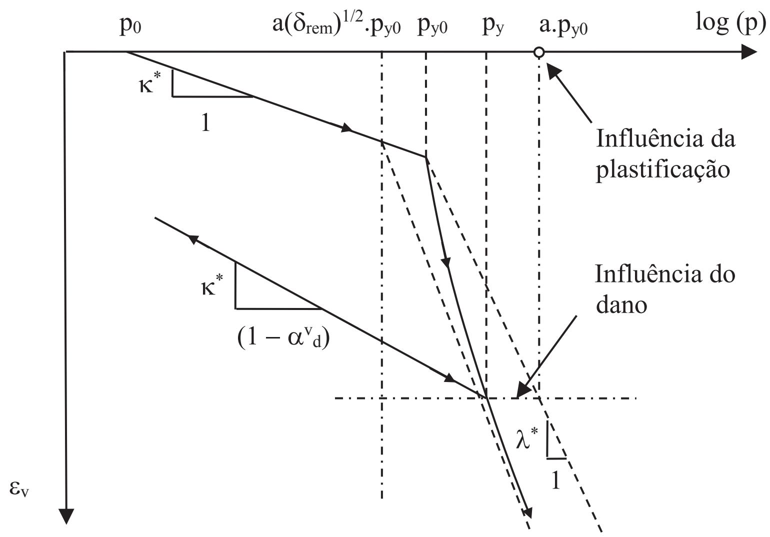

Fig. 1 – Comportamento tensão-deformação do modelo hiperplástico MCC com dano acoplado sob compressão isotrópica.

[1] O valor correspondente a D_{95} deve ser 0,95 e não 0,93, como indicado no artigo de Einav *et al.*(2007).

A adoção de valor $r_p = 1,0$ (e $r_d = \infty$, pela equação (5)) implica em comportamento elasto-plástico perfeito com comportamento retilíneo do trecho de compressão de "reta" virgem após ser atingida tensão de pré-adensamento isotrópica p_{y0}. O adotar $r_p > 1,0$ implica em curvatura no trecho de "reta" virgem (Fig. 1) decorrente de dano, e redução de rigidez do material com o aumento de tensão de compressão isotrópica. E à medida que aumenta o valor de r_p aumenta a declividade da assíntota ao trecho final de nova compressão. Como a menor inclinação da reta virgem corresponde a $r_p = 1,0$, se a curva de ensaio mostrar curvatura indicará presença de dano, e neste caso o ajuste dos parâmetros $r_p > 1,0$ e λ^* deve ser feito por tentativas para ajustar a função p_y (12) à curva de ensaio de compressão isotrópica.

A função p_y (12) permite representar a variação de índice de vazios estudada por Liu e Carter (2006), com o emprego das variáveis internas de dano, realizando o mesmo efeito que o parâmetro de desestruturação b introduzido por estes autores. Nesta abordagem direta basta determinar o comportamento de compressão isotrópica para o solo em estado natural. Não é necessário o ensaio adicional para determinar a reta ICL*, de variação de índices de vazios sob compressão isotrópica para material completamente remoldado.

A formulação do modelo é concluída com a especificação da segunda condição de escoamento em função da resistência última ao cisalhamento, que no MCC é a condição de estado crítico, $q_u = M.p$, que pode ser reescrita como:

$$y = q - M.p = 0 \tag{16}$$

A esta função de escoamento corresponde uma função de dissipação conjugada, que apresenta a seguinte forma geral (Puppi, 2008):

$$d^r = \overline{\chi}_p^v.\dot{\alpha}_p^v + \overline{\chi}_p^s.\dot{\alpha}_p^s \tag{17}$$

Na definição da equação (17) assume-se que ao ser atingida condição de estado crítico, não haja mais dissipação de energia por efeito de dano e que a continuação do processo só dissipe energia por efeito de plastificação continuada, que deve implicar também em incrementos de variável interna de modo volumétrico tendente a zero.

A operação de derivação direta sobre a função de energia potencial (1) permite estabelecer expressões para as deformações ε_v e ε_s, relacionadas com as tensões triaxiais p e q:

$$\varepsilon_v = -\frac{\partial g}{\partial p} = \frac{\kappa^*}{(1-\alpha_d^v)}\log\left(\frac{p}{p_0}\right) + \alpha_p^v \tag{18}$$

$$\varepsilon_s = -\frac{\partial g}{\partial q} = \frac{q}{3G(1-\alpha_d^s)} + \alpha_p^s \tag{19}$$

Essas expressões representam deformações finitas correspondentes ao estado de tensão (p, q) e permitem a construção de curvas de ensaios triaxiais.

Expressões para os incrementos de deformação volumétrica e de distorção foram determinadas visando a implementação do modelo a métodos numéricos incrementais (Puppi, 2008). Tais expressões foram obtidas por derivação de (18) e (19), em relação ao "tempo", ou seja:

$$\dot{\varepsilon}_v = \frac{\kappa^*}{(1-\alpha_d^v)}.\left[\frac{\dot{\alpha}_d^v}{(1-\alpha_d^v)}.\log\left(\frac{p}{p_0}\right) + \left(\frac{\dot{p}}{p}\right)\right] + \dot{\alpha}_p^v \tag{20}$$

$$\dot{\varepsilon}_s = \frac{1}{3G.\left(1-\alpha_d^s\right)}\left[\dot{q} + \left(q.\frac{\dot{\alpha}_d^s}{\left(1-\alpha_d^s\right)}\right)\right] + \dot{\alpha}_p^s \tag{21}$$

É importante mencionar que a derivação em relação ao tempo deve ser lida como incrementos diferenciais. Por exemplo, $\dot{\varepsilon}_v \rightarrow d\varepsilon_v$, $\dot{\alpha}_p^v \rightarrow d\alpha_p^v$, e assim por diante, desde que os incrementos são proporcionais aos incrementos de tempo considerados.

Os incrementos das variáveis internas de plasticidade e de dano: $\dot{\alpha}_p^v, \dot{\alpha}_p^s, \dot{\alpha}_d^v$ e $\dot{\alpha}_d^s$, que aparecem nas expressões (20) e (21), podem ser obtidos a partir da regra de fluxo aplicada à função de escoamento. As expressões para sua determinação estão apresentadas no Apêndice.

Do exposto no apêndice é mostrado que a simulação de ensaios triaxiais pode ser construída de forma incremental, utilizando para relações entre incrementos de deformação e de tensão em regime elástico as equações:

$$\dot{\varepsilon}_v = \frac{\kappa^*}{\left(1-\alpha_d^v\right)}.\left(\frac{\dot{p}}{p}\right) \tag{22}$$

$$\dot{\varepsilon}_s = \frac{\dot{q}}{3G.\left(1-\alpha_d^s\right)} \tag{23}$$

E para as relações entre incrementos de deformação e de tensão em regime elasto-plástico a cada incremento de tensão, ou de deformação, deve ser resolvido o sistema de equações:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{\varepsilon}_v \\ \dot{\varepsilon}_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \end{Bmatrix} \tag{24}$$

As expressões dos coeficientes A_{ij} do sistema de equações estão descritas no Apêndice.

A Figura 2 ilustra casos de incrementos de tensão no diagrama q x p.

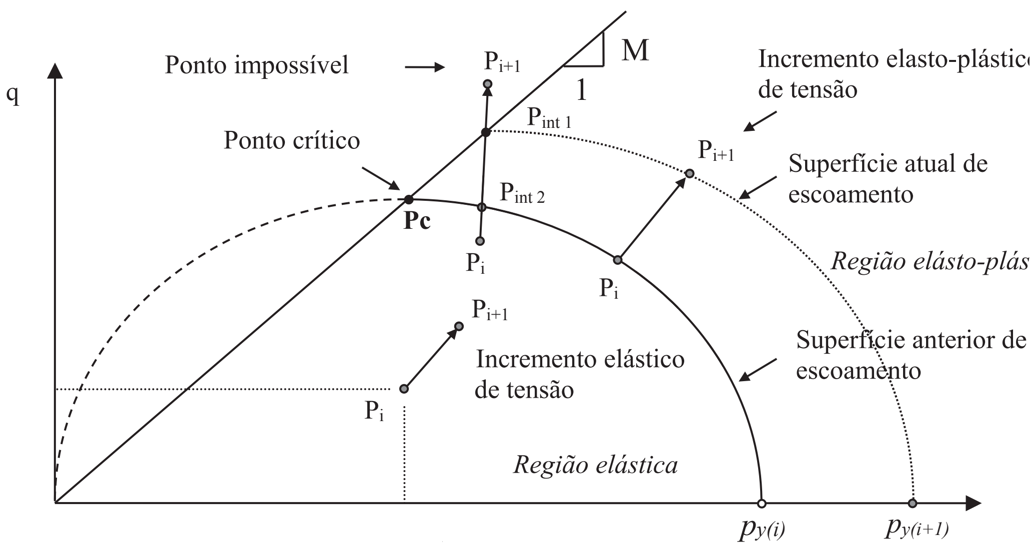

Fig. 2 – Casos de incrementos de tensão.

Segundo Liu e Carter (2006), se o solo atinge a superfície de escoamento no "lado seco", ocorre amolecimento caso as condições de contorno permitam um ajuste adequado ao estado de tensão. Em caso contrário, pode-se prever ruptura catastrófica. Durante o processo de amolecimento, a estrutura do solo vai sendo destruída, e a superfície de escoamento contrai com o estado de tensão atual, permanecendo sempre sobre ele. Em tais casos, a superfície de escoamento contrai até o solo atingir um estado crítico de deformação, onde a estrutura do solo é completamente removida.

A influência do dano pode ser entendida, em termos de dissipação de energia aplicada a um volume de solo, como processo em que que parte da energia é dissipada por trabalho associado às deformações plásticas e parte é dissipada na destruição da estrutura do solo.

2.1 – Modelo hiperplástico MCC com dano acoplado aplicado a solos estruturados

O efeito da estrutura do solo é refletido nos solos pré-adensados e solos residuais estruturados pela presença de resistência de pico de cisalhamento, que tende a um valor residual com o aumento da deformação e destruição da estrutura do material. A Figura 3 ilustra esta situação comumente observada em testes de cisalhamento direto.

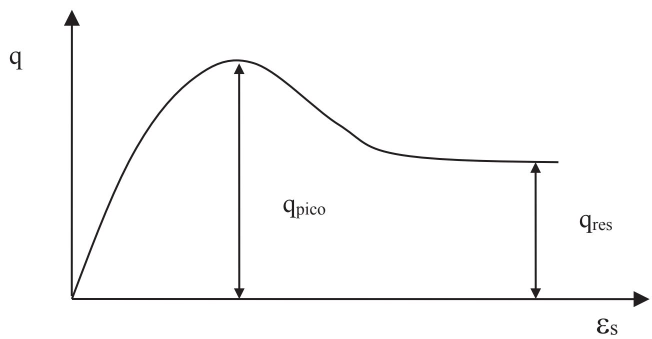

Fig. 3 – Comportamento tensão-deformação típico de solos pré-adensados e de solos residuais estruturados em ensaios de cisalhamento direto.

Para modelo de solo sem estrutura, a superfície elíptica de escoamento dos modelos Cam-Clay existe apenas abaixo da linha de estado crítico (*LEC*), como mostrado na Figura 4(a), e pode sofrer expansão ou, eventualmente, contração. Por outro lado, modelos para solos estruturados aceitam a existência da superfície de escoamento acima da linha de estado crítico para trajetórias de tensão que atingem a superfície elíptica à esquerda do ponto médio, isto é, do ponto *A* na Figura 4(b). Neste caso a tentativa de continuar o carregamento deve induzir contração da superfície até um estado final de tensão sobre a linha de estado crítico, ou um estado linite de dano ser atingido. A contração da superfície de escoamento é obrigatória por refletir o comportamento expansivo do solo, com o desenvolvimento de incrementos de deformação plástica volumétrica negativa (de expansão) e que pode estar associado ao processo de destruição da estrutura por dano. Por outro lado, se a trajetória de tensão atinge ponto à direita do ponto *A*, sobre a superfície elíptica de escoamento, esta poderá sofrer contração ou expansão, dependendo de efeito prevalescente de dano ou de plastificação sobre a estrutura do solo.

Como a formulação aqui adotada utiliza critério de escoamento único para plastificação e dano, quando é utilizado $r_p > 1{,}0$ ocorrerão plastificação e dano simultaneamente. O emprego de valor $r_p = 1{,}0$ reproduz o modelo MCC, com consideração unicamente de plasticidade.

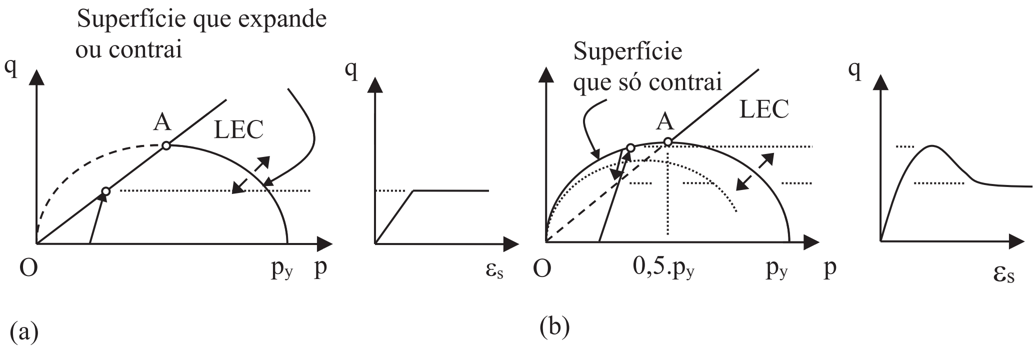

Fig. 4 – Superfícies de ruptura e escoamento em solos: (a) sem estrutura e (b) com estrutura.

3 – RESULTADOS DE MODELAGEM COM O MCC

Para testar as rotinas de simulação para testes de tensão e deformação controlada, foram utilizados valores semelhantes aos usados por Einav *et al*. (2007) para uma argila sensível: módulo de recompressão $\kappa^* = 0{,}005$, módulo de compressão virgem $\lambda^* = 0{,}090$, módulo cisalhante $G = 20.000$ kPa, tensão de pré-adensamento isotrópica $p_{y0} = 400$ kPa, $M = 1{,}2$ (inclinação da linha de estado crítico), $p_0 = 25$ kPa, $\delta_{rem} = 0{,}50$ e $D_{95} = 0{,}93$.

No trabalho de Puppi (2008) foram simuladas trajetórias de tensão de ensaios de compressão triaxial convencional, compressão sob tensão hidrostática constante, bem como extensão axial, para quatro valores iniciais de pressão hidrostática de consolidação: $p_{ini} = 100$, 200, 300 e 400 kPa, que correspondem a OCR's isotrópicos iguais a 4, 2, 4/3 e 1, respectivamente. Também foram feitas simulações para obtenção de curvas tensão-deformação para ensaios de compressão não-drenada e compressão confinada (ensaio oedométrico).

A fim de verificar a influência da proporção plasticidade/dano, definida pela relação r_p/r_d, foram utilizadas três funções de tensão isotrópica de escoamento p_y, para valores de $r_p = 1{,}0$, $r_p = 1{,}1$ e $r_p = 1{,}414$, representadas na Figura 5. As deformações específicas são representadas em valores decimais.

3.1 – Simulação de ensaios de compressão hidrostática

A Figura 5 mostra simulações de ensaios de compressão hidrostática obtidas com o emprego do modelo estruturado MCC (Puppi, 2008).

As curvas mostradas na Figura 5 mostram que para aumento de efeito de dano em relação ao efeito de plastificação, representado por r_p crescente (ou r_d decrescente) ocorre um aumento da inclinação da "reta virgem", tendendo a uma assíntota vertical para $r_p \rightarrow \infty$. A interseção do prologamento das tangentes às retas virgens com o trecho de recarregamento determina o ponto da tensão de pré-adensamento residual remanescente, que é função do fator δ_{rem} escolhido. Para solos a situação indicada de assíntotal vertical, obtida para $r_p \rightarrow \infty$, e mesmo de $r_p = 1{,}414$, já não tem significado físico real, por implicarem em redução de volume com redução de tensão isotrópica. Desta forma, para uso prático o valor limite de r_p não deve produzir tangente que ultrapasse a direção vertical no ponto inicial de carregamento virgem, limitando a faixa de variação de r_p entre 1,0 e 1,2.

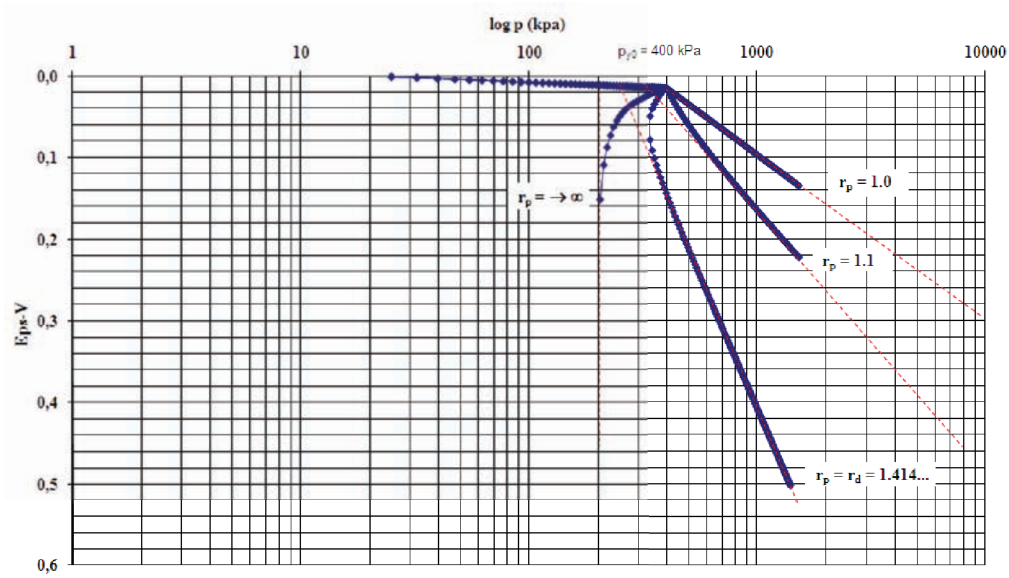

Fig. 5 – Curvas de compressão isotrópica ε_v x log p– (Puppi, 2008).

3.2 – Simulação de ensaios CTC

A Figura 6 mostra as trajetórias de tensão de solo adensado até tensão p_{y0} = 400 kPa e submetido a ensaio drenado de compressão triaxial sob tensões confinantes de 50 a 400 kPa. Nestas simulações, para as tensões de confinamento de 50, 75 e 100 kPa, o escoamento é inicialmente alcançado logo acima da envoltória de ruptura, à esquerda do ponto crítico. Para as tensões de confinamento de 200, 300 e 400 kPa, a condição de escoamento sobre a superfície elíptica é alcançada, à direita do ponto crítico. No caso mostrado na Figura 6, para r_p = 1,1, ocorre efeito de endurecimento, por plastificação e efeito de amolecimento por dano. Neste caso, o efeito de endurecimento por plastificação é predominante sobre o efeito de dano e ocorre aumento da tensão de pré-adensamento corrente p_y, o que implica na expansão da superfície elíptica de escoamento com o carregamento. Para as tensões confinantes de 50, 75 e 100 kPa, pelo contrário, o efeito combinado de plastificação e dano produz diminuição da tensão de pré-adensamento corrente p_y que leva a contração da superfície elíptica de escoamento.

A Figura 7 mostra as curvas tensão-deformação em gráfico q x ε_s, correspondentes às trajetórias de tensão apresentadas na Figura 6.

A Figura 7 mostra curvas para deformações que excedem os limites aceitáveis para pequenas deformações ($\varepsilon_s \approx 0{,}1$), mas que foram computadas para avaliar a estabilidade das funções utilizadas no modelo.

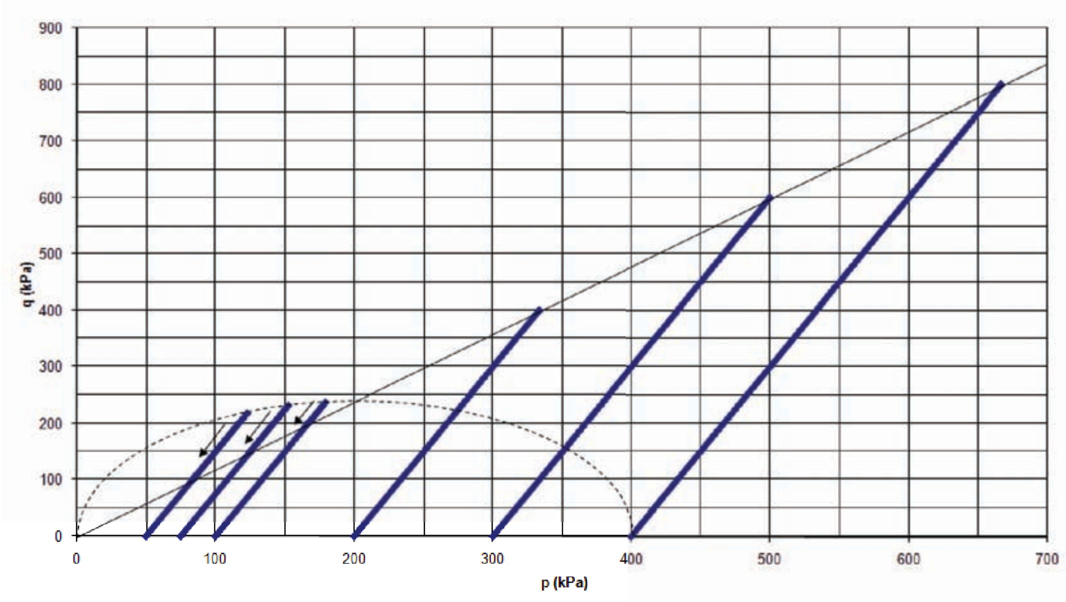

Fig. 6 – Trajetórias de tensão de ensaios CTC drenados, para $r_p = 1,1$ (Puppi, 2008).

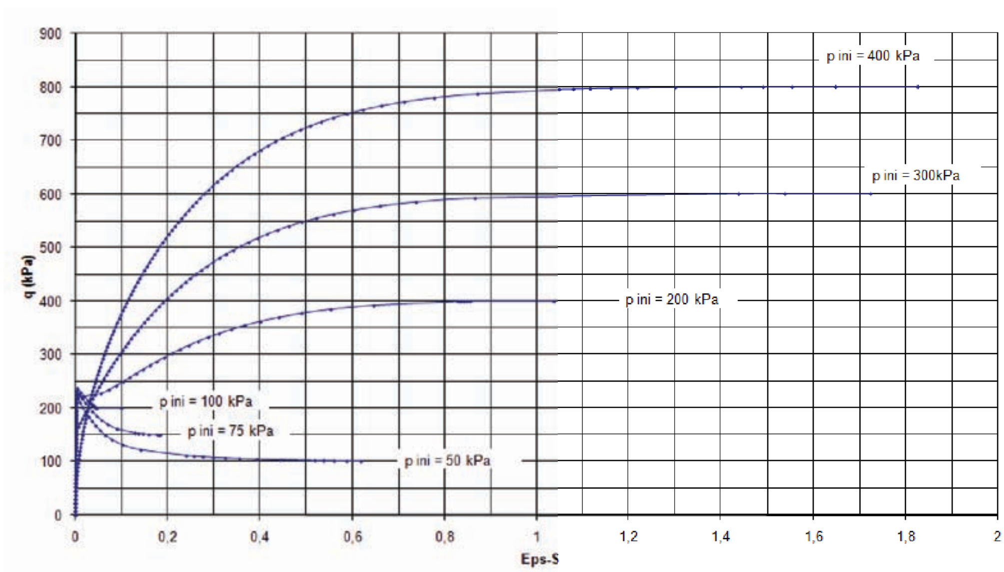

Fig. 7 – Curvas tensão-deformação de simulação de ensaios – q x ε_s para $r_p = 1,1$ – (Puppi, 2008).

Na Figura 8 é apresentada a relação ε_v x ε_s. Para as tensões confinantes de 50 a 100 kPa ocorre trecho inicial de compressão volumétrica, até ser atingida a superfície de escoamento correspondente à tensão inicial de pré-adensamento, e a seguir ocorre expansão até ser atingida condição de estado crítico.

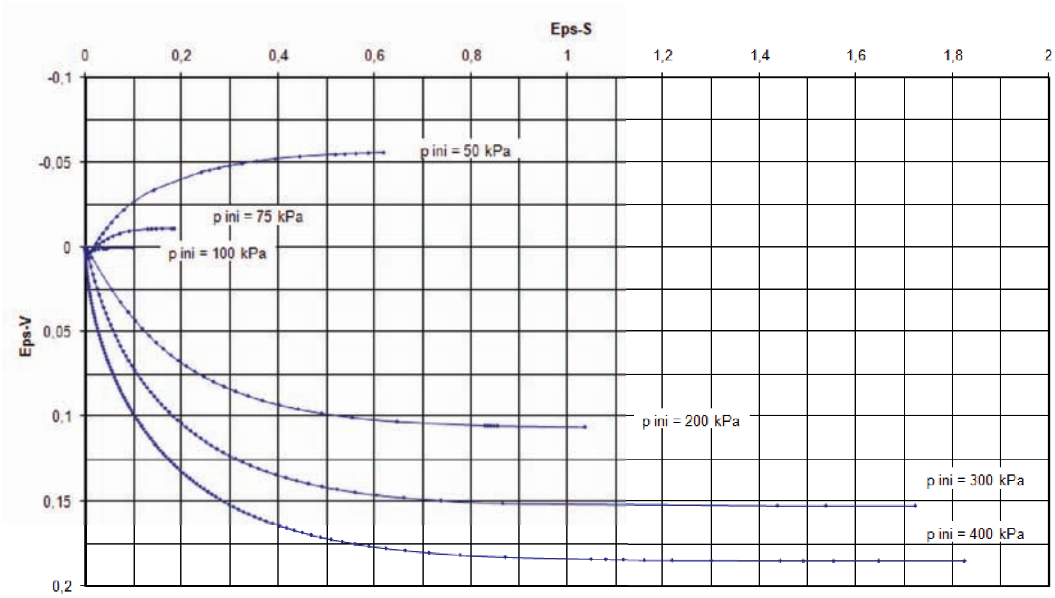

Fig. 8 – Curvas ε_v x ε_s para r_p = 1,1 de simulação de ensaios CTC – (Puppi, 2008).

Para as tensões confinantes de 200 a 400 kPa todo o carregamento se processa com redução de volume, que estabiliza ao ser atingida condição de estado crítico.

Para efeito de comparação do efeito de dano apresenta-se simulação de ensaio CTC para caso de r_p = 1,0. Neste caso, mostrado na Figura 9, o modelo corresponde ao MCC tradicional, com comportamento elasto-plástico, sem dano.

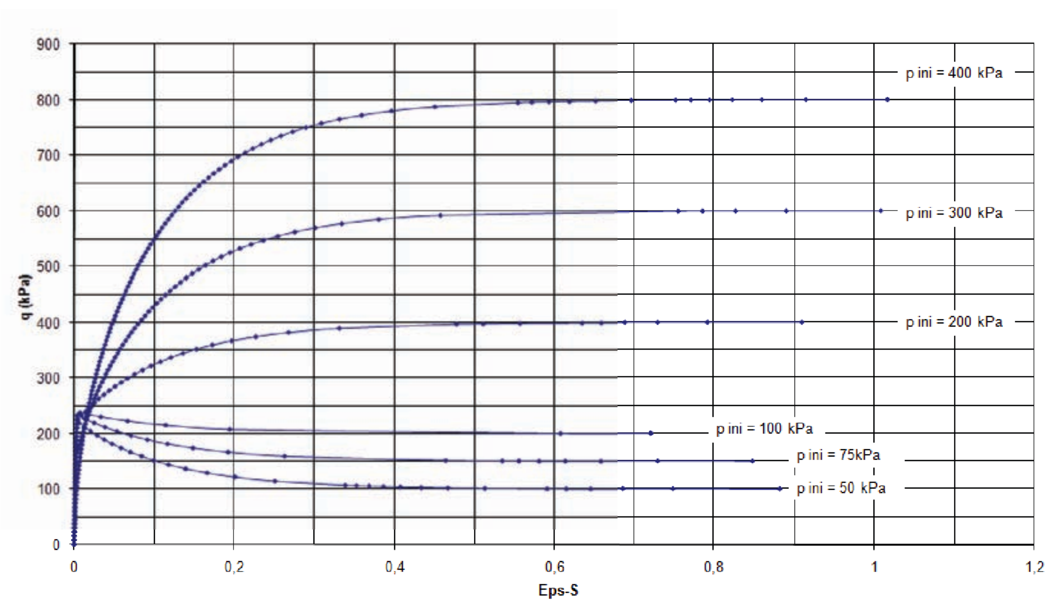

Fig. 9 – Curvas tensão-deformação de simulação de ensaios – q x ε_s para r_p = 1,0 – (Puppi, 2008).

Para solo normalmente adensado, com p_{ini} = 400 KPa, a curva da Fig. 9 (r_p = 1,0) mostra que o valor de q para ε_s = 0,1 é da ordem de 550 kPa e para a curva da Fig. 7 (r_p = 1,1) o valor de q para ε_s = 0,1 é da ordem de 380 kPa. A incorporação do efeito de dano reduz a inclinação das curvas, o que é o resultado da redução de rigidez do material, traduzido pela redução das suas constantes elásticas.

3.3 – Simulação de ensaios de compressão confinada

A Figura 10 reproduz curvas de trajetórias de tensão q x p de testes de compressão confinada, para casos de OCRs isotrópicos iguais a 4, 2 e 4/3 e r_p = 1,0.

Durante a fase de recompressão do solo, que ocorre sob regime elástico, as trajetórias de tensão são não-lineares. Após ser atingida condição de escoamento sobre a superfície elíptica correspondente à tensão de pré-adensamento p_{y0} = 400 kPa, as trajetórias de tensão para a fase elasto-plástica tendem para uma trajetória retilínea única de tensões, cujo prolongamento passa pela origem. Esta trajetória única corresponde a estado de argila normalmente adensada.

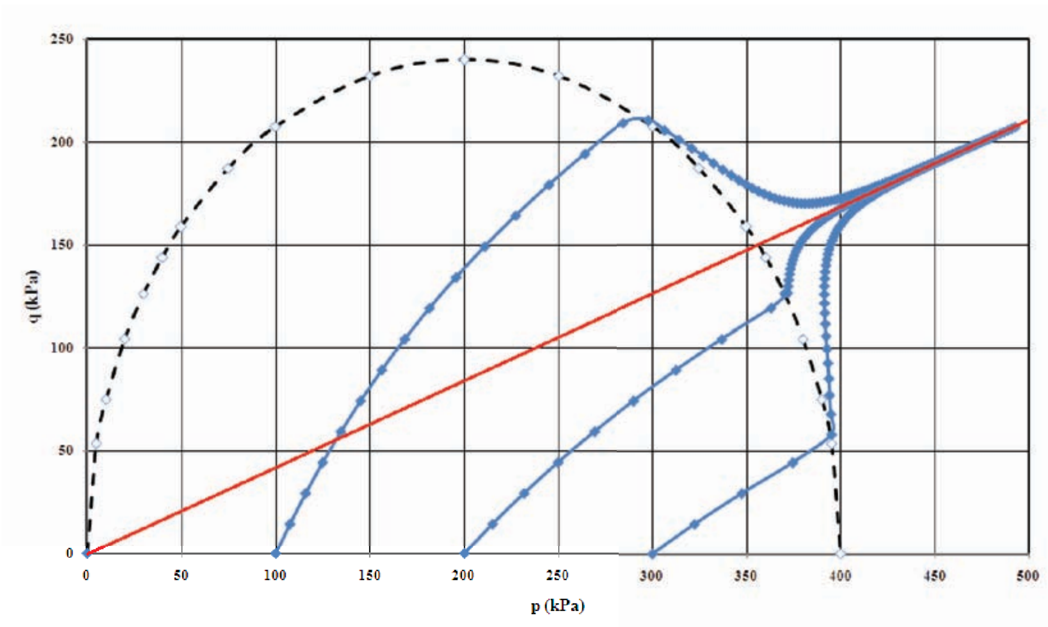

Fig. 10 – Trajetórias de tensão q x p, para compressão confinada (ensaio oedométrico) – (Puppi, 2008).

Na Figura 11 são apresentadas as curvas de simulação de ensaio de compressão confinada ε_v x log σ'_v para argila de tensão de pré-adensamento p_{y0} = 400 kPa correspondentes às trajetórias de tensões mostradas na Figura 10. Às tensões de compressão inicial isotrópica de 100, 200 e 300 kPa, correspondem OCRs isotrópicos iguais a 4, 2 e 4/3, respectivamente.

Cabe observar, do exame da Figura 11, que para a tensão de pré-adensamento isotrópica de p_{y0} = 400 kPa, nas simulações de compressão confinada os valores determinados da maneira habitual nos ensaios de solos indicariam tensões de pré-adensamento $\sigma'_{vm} \approx$ 450 kPa. Na Figura 10, pode-se determinar as coordenadas dos pontos em que as trajetórias de tensão atingem a envoltória de escoamento. Com o valor de p da Figura 10 e com o valor de σ'_{vm} da Figura 11, pode-se estimar ainda o valor da tensão normal horizontal σ'_h no instante do escoamento, já que $p = (\sigma'_{vm}+2\sigma'_h)/3$.

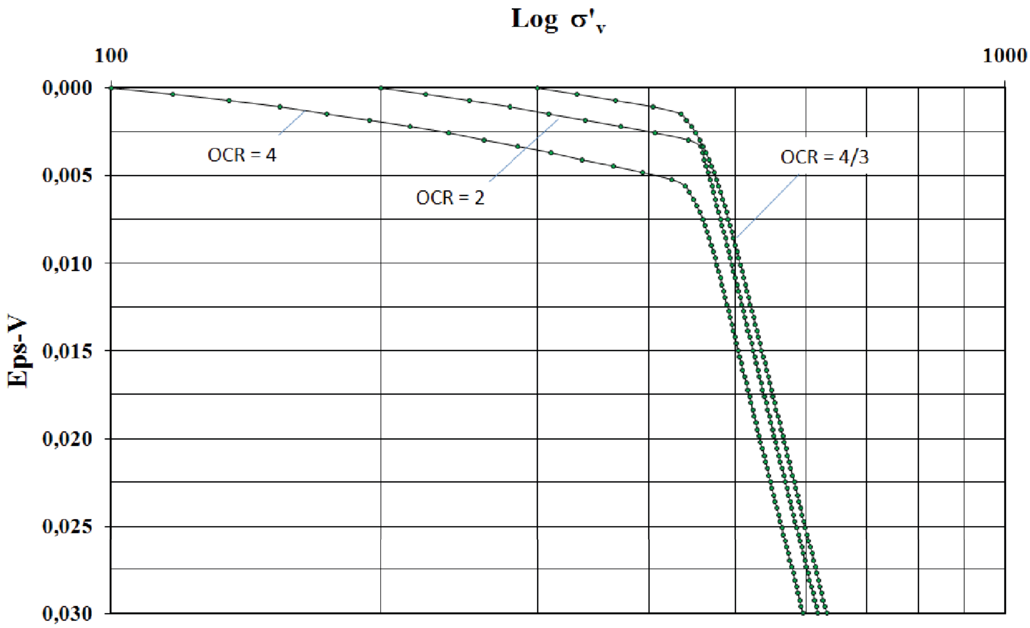

Fig. 11 – Simulação de ensaios de compressão confinada ε_v x log σ'_v – (Puppi, 2008).

A comprovação das trajetórias de tensão exige o uso de célula de adensamento em que se possa medir a tensão horizontal atuante, o que não é usual nos ensaios de adensamento.

4 – MODELAGEM DE SOLO RESIDUAL ESTRUTURADO

O modelo foi aplicado a um solo residual saprolítico de basalto, da cidade de Teutônia, no estado do Rio Grande do Sul, no sul do Brasil, estudado por Denardin (2005). Os parâmetros para calibrar o modelo foram determinados a partir de ensaios de compressão isotrópica e de compressão triaxial. Os ensaios de compressão isotrópica permitem a determinação do índice de recompressão (κ^*), índice de compressão (λ^*) e tensão de pré-adensamento (p_{y0}). Os ensaios de compressão triaxial permitem a definição do parâmetro M, função do ângulo de atrito interno ϕ', e do módulo cisalhante G. Os outros dois parâmetros δ_{rem} e D_{95} foram escolhidos de forma a modelar a evolução conveniente de p_y com a variação das variáveis internas.

A Figura 12 mostra resultados de ensaios de compressão isotrópica plotados em termos de índice de vazios x log p'.

A fim de determinar os parâmetros de compressibilidade κ^* e λ^* para a amostra de solo indeformado, o gráfico e x log p' da Figura 12 foi replotado em termos de deformação volumétrica ε_v x log p', como mostrado na Figura 13.

As declividades das tangentes (em linhas tracejadas) ao trecho de recompressão e à reta virgem na Figura 13 conduzem aos valores $\kappa^* = 0{,}00415$ e $\lambda^* = 0{,}10598$. Estas declividades são calculadas tomando dois pontos A e B sobre as retas e determinando a razão $\Delta\varepsilon_v/(\log \sigma_B - \log\sigma_A)$. O ponto onde as tangentes se interceptam define o valor da tensão de escoamento isotrópica tomado igual a p_{y0} = 350 kPa, como indicado por Denardin (2005). O aspecto linear da reta virgem indica que não há decaimento em p_{y0}, de forma que δ_{rem} foi tomado igual a 1,0 e D_{95} foi mantido igual a 0,93. A limitação do valor da variável de dano, que varia de 0 a 1,0, em valor máximo próximo de 1,0 tem como objetivo evitar divisão por zero em (14), (15), (18), (19), (22) e (23).

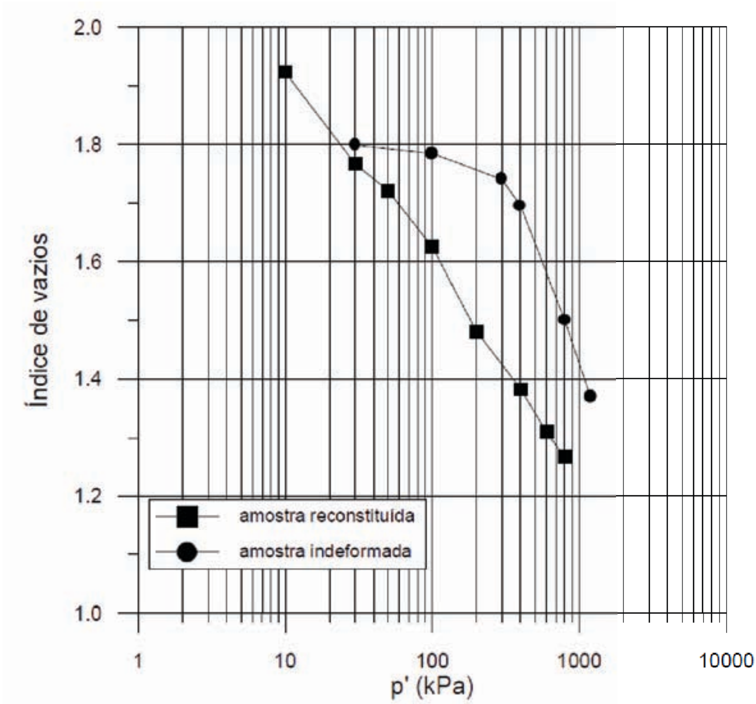

Fig. 12 – Curvas *e* x log *p*’ de ensaios de compressão isotrópica, para amostra indeformada e amostra reconstituída (Denardin, 2005).

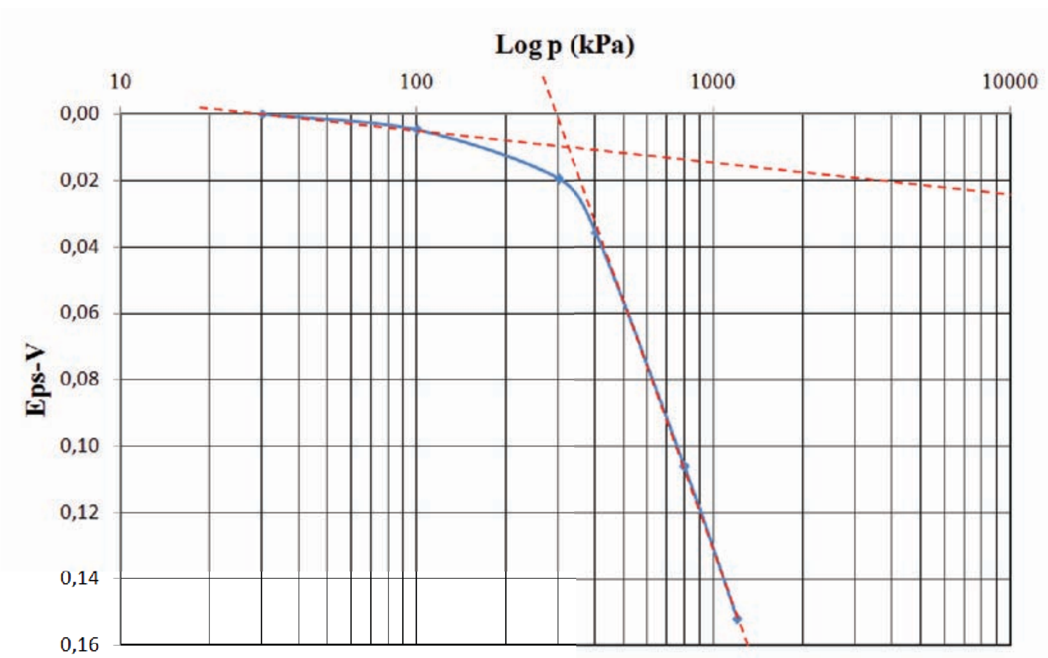

Fig. 13 – Curvas ε_v x log *p*’ de ensaios de compressão isotrópica, para uma amostra indeformada, adaptado de Denardin (2005).

Em ensaios CID (ensaios de compressão triaxial drenada com consolidação isotrópica) Denardin (2005) observou valores de deformações axiais iniciais iguais a 0,25% para $\Delta\sigma_1$ = 150 kPa e 0,30% para $\Delta\sigma_1$ = 250 kPa, para ensaios com tensões confinantes de 800 e 1200 kPa, respectivamente. Para estes valores correspondem módulos de Young de 60 MPa e 83,3 MPa, respectivamente. Para determinar G foi tomado um valor médio de E =70 MPa e valor do módulo volumétrico K = 12,9 MPa, obtido do ensaio de compressão isotrópica. Finalmente, empregando a relação entre os parâmetros da elasticidade, $G = 3.K.E/(9K - E)$, foi obtido valor de G = 58 MPa.

A determinação do parâmetro M, está baseada na Figura 14. A declividade da envoltória q x p é igual a 1:M. Este solo residual mostra envoltória aproximadamente linear passando pela origem (linha azul). A figura mostra trajetória de tensões de ensaio CIU (ensaio de compressão triaxial não-drenada com consolidação isotrópica), começando em p = 350 kPa. Esta tensão corresponde à tensão de escoamento determinada por Denardin (2005). Esta trajetória de tensões ajusta-se bem a uma elipse passante pela origem. Para completar as hipóteses do modelo, foi escolhida uma linha passando pela origem e pelo ponto médio da elipse. Esta linha difere pouco da envoltória p x q até p = 600 kPa. Para níveis mais elevados de tensão o modelo torna-se menos confiável, e as resistências ao cisalhamento passam a ser superestimadas. Com base nestas considerações, foi determinado valor de M = 1,0984.

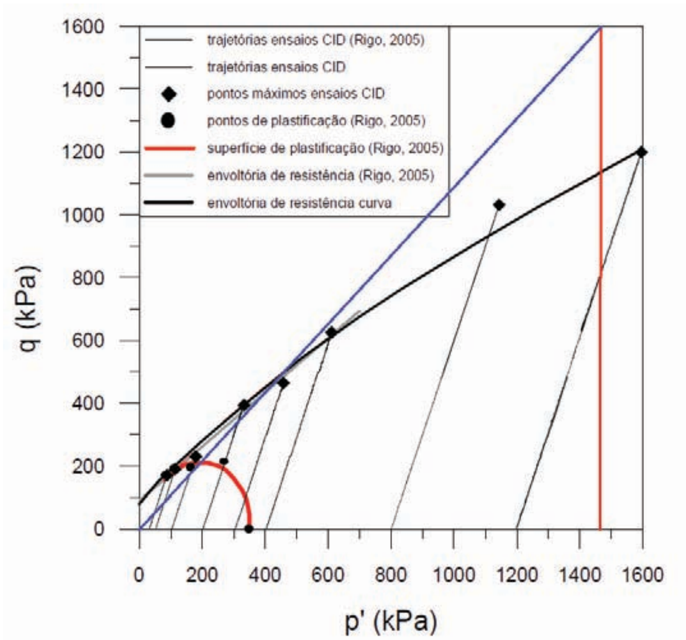

Fig. 14 – Envoltória q x p de ensaios triaxiais, para amostras indeformadas, adaptado de Denardin (2005).

A Figura 15 mostra o resultado da calibração do modelo com a simulação do ensaio de compressão isotrópica. Foi aqui empregado um processo iterativo que levou ao valor de r_p = 1,025 para ajustar o modelo aos dados experimentais. Como o aumento do valor de r_p produz aumento da declividade da reta virgem, o valor foi sendo aumentado, a partir de 1, até produzir aproximação com a curva de ensaio mostrada na Figura 15. E à medida que o valor de r_p vai crescendo a influência do dano vai se tornando mais pronunciada sobre o comportamento tensão-deformação. Entretanto, para este solo, em função do valor utilizado para r_p = 1,025 ser muito próximo de 1,0, o comportamento simulado foi muito próximo do modelo MCC tradicional.

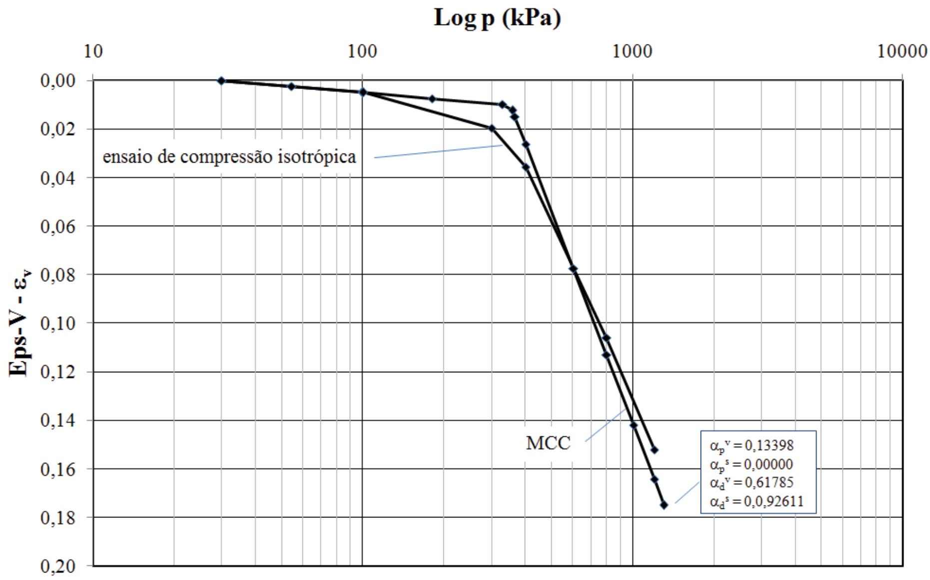

Fig. 15 – Ensaio de compressão isotrópica para amostra indeformada e curva de simulação obtida com o MCC, adaptado de Denardin (2005).

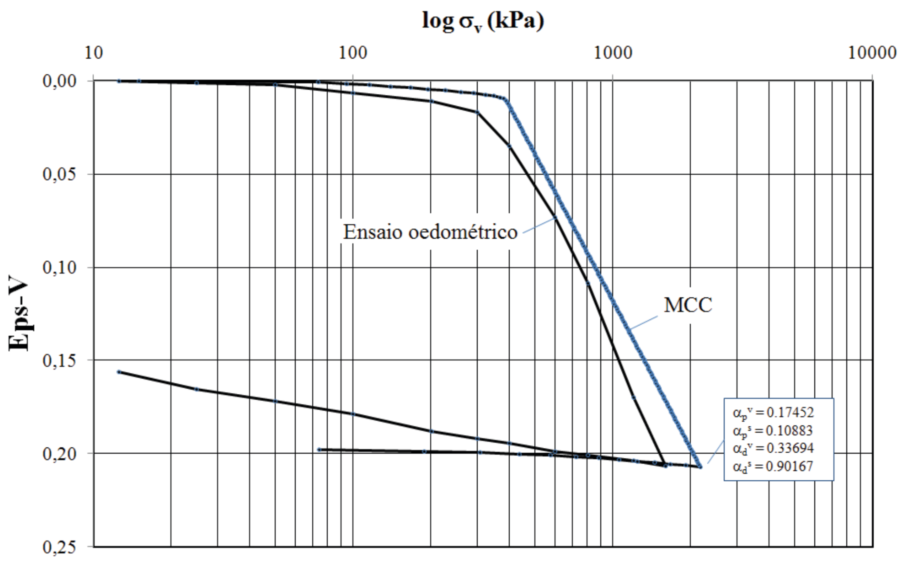

Fig. 16 – Curvas ε_v x log σ_v de ensaios oedométricos sobre amostra indeformada e curva de simulação determinada com o MCC, adaptado de Denardin (2005).

O ajuste da curva calculada para o ensaio isotrópico poderia ser melhorado se o ensaio de compressão isotrópica tivesse trecho de descarregamento. Infelizmente o ensaio realizado por Denardin (2005) mostra apenas o processo de carregamento. O trecho de descarregamento é mais favorável para capturar o comportamento elástico do solo e permite obter melhor definição do índice de recompressão κ^*.

Finalmente, a Figura 16 mostra resultados de ensaio de compressão confinada (ensaio oedométrico) e de simulação obtida com o uso do MCC.

Os trechos de carregamento inicial (recompressão) e de descarregamento, na simulação de ensaio oedométrico por meio do MCC, são controlados pelo parâmetro κ^*, determinados pelo trecho de recompressão e pelo valor da variável interna de dano α_d^v, acumulada até o início do descarregamento. Se o parâmetro κ^* houvesse sido determinado com o emprego de dados de descarregamento no ensaio de compressão isotrópica, os resultados mostrados na Figura 16 provavelmente mostrariam melhor ajuste.

O caso apresentado, de solo residual saprolítico de basalto, teve por fim mostrar a maneira de determinação dos parâmetros de ajuste do modelo e os ensaios envolvidos na calibração. Como este solo mostrou comportamento de consolidação isotrópica com trecho de reta virgem retilíneo o comportamento não mostra influência de dano e a simulação é praticamente a do modelo MCC tradicional.

5 – CONCLUSÕES

O modelo apresentado neste artigo é desenvolvido com base em dois potenciais de energia, ou seja, um potencial de energia livre e outro para a dissipação de energia, ambos estabelecidos por Einav *et al*. (2007) e retrata caso de modelo Cam-Clay Modificado associando plasticidade e dano.

São apresentados resultados de modelagem de ensaios para argila com os parâmetros utilizados por Einav *et al*. (2007), para simulação de ensaios de compressão isotrópica, ensaios drenados de compressão triaxial convencional (ensaios CTC), e de trajetórias de tensão e curvas de variação de ε_v x log σ'_v, para ensaios de compressão confinada. As simulações foram feitas para diferentes razões de pré-adensamento e parâmetro $r_p = 1{,}1$, o que implica em consideração de alguma influência de dano associado. A comparação de resultados de ensaios CTC simulados com parâmetro $r_p = 1{,}0$, mostra que a consideração de dano permite modelar a redução de rigidez do solo, que decorre do efeito de redução das constantes elásticas.

No item 4 estão apresentados os resultados de aplicação do modelo para reprodução de curvas de ensaio para um solo residual saprolítico de basalto, de Teutônia, RS. As curvas reproduzidas são as de ensaio de compressão isotrópica e de compressão confinada (ensaio oedométrico). A curva de compressão isotrópica é utilizada para a avaliação de parâmetros do modelo, e a de compressão confinada foi determinada a partir dos parâmetros determinados inicialmente.

Os resultados da simulação com os dados do solo residual saprolítico, não evidenciaram efeito de dano e a simulação apresentou resultados similares aos de modelo MCC tradicioanal.

6 – AGRADECIMENTOS

O primeiro autor deste trabalho, Puppi, agradece imensamente ao apoio recebido nas disciplinas do curso de doutorado no PPGMNE do CESEC da UFPR, e na orientação do seu trabalho de tese aos seus orientadores: professora Mildred Ballin Hecke e professor Celso Romanel.

7 – REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Basan, R.; Marohnić, T. (2016). *Constitutive Modeling and Material Behavior*. Interim Report, University of Rijeka, Croatia.

Chaboche, J. L. (1988). *Theoretical and Applied Mechanics*. Proceedings of the XVIIth International Congress of Theoretical and Applied Mechanics, Grenoble, France, p. 41-53, 21-27.

Collins, I. F.; Tai, A. (2005). *What has Thermo-mechanics to offer Geo-mechanics?* The 11th Int. Conf. of IACMAG, Turin - Italy, June, pp. 19-24.

Collins, I. F.; Houlsby, G. T. (1997). *Application of thermomechanical principles to the modeling of geotechnical materials*. Proc. Royal. Soc. Lond, Londres, nº 453, pp. 1975-2001.

Denardin, A. P. (2005). *Estudo do comportamento mecânico de um solo saprolítico de basalto de Teutônia, RS*. Dissertação de mestrado, UFRGS, Porto Alegre, Brasil.

Einav, I.; Houlsby, G. T.; Nguyen, G. D. (2007). *Coupled damage and plasticity models derived from energy and dissipation models*. Int. Journal of Solids and Structures, Ed. Elsevier, V. 44, pp. 2487-2508.

Houlsby, G.T.; Puzrin, A.M. (2000). *A Thermomechanical Framework for Constitutive Models for Rate-Independent Dissipative Materials*. Int. Jnl. Plast, V.16, nº 9, pp. 1017-1047.

Kachanov, L. M. (1958). *Time of the Rupture Process under Creep Conditions*. IVZ Akad. Nauk, S.S.R., Otd. Tech. Nauk, 8, pp. 26-31.

Lemaitre, J. (1985). *Coupled Elasto-Plasticity and Damage Constitutive Equations*. Comput. Mech. Appl. Eng. nº 51, pp. 31-49.

Liu, M. D.; Carter, J. P. (2006). *A Structured Cam-Clay Model*. Research Report No. R 814, Centre for Geotechnical Research, Australia.

Osman, A. S.; Birchall, T. J. (2015). *Modelling tertiary creep in geomaterials using a continuum damage mechanics approach*. Geomechanics from Micro to Macro, Soga et al. (Eds.), Taylor & Francis Group, London, ISBA 978-1-138-02707-7, pp. 705-708.

Puppi, R. F. K. (2008). *Implementação de modelo constitutivo hiperplástico com dano acoplado aplicado a solos residuais.* Tese de doutorado, PPGMNE Cesec-UFPR, Brasil.

Ziegler, H. (1983). *An introduction to thermomechanics.* 2a. Ed. Amsterdam, North-Holland.

APÊNDICE

A.1. FORMULAÇÃO

A descrição a seguir apresenta abordagem usada por Einav *et al.* (2007) para derivar a formulação de um modelo consitutivo termomecânico. Esta abordagem foi originalmente usada por Puzrin e Houlsby (2000) para derivar modelos elasto-plásticos dentro da hiperplasticidade. Os processos de tensão-deformação dos solos são idealizados como processos independentes do tempo, isotérmicos, e envolvendo apenas pequenas deformações. A formulação é inicialmente apresentada em termos de um número arbitrário de variáveis internas. Admite-se que o estado local do material pode ser completamente definido através do conhecimento de: (a) um tensor de deformações $\boldsymbol{\varepsilon}$, (b) um conjunto de variáveis internas $\tilde{\alpha}_i$, $\Im = \Im(\tilde{\alpha}_1, \ldots, \tilde{\alpha}_N)$, e (c) a entropia s, embora esta não entre na formulação, para casos isotérmicos.

A primeira e a segunda lei da termodinâmica foram expressas de forma combinada por Collins e Tai (2005), para representar processo de tensão-deformação isotérmico de um contínuo sujeito a pequenas deformações, como:

$$\tilde{W} = \dot{U} + \tilde{\Phi} \quad \text{onde} \quad \tilde{W} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad \text{e} \quad \tilde{\Phi} \geq 0 \tag{A1}$$

$U(\boldsymbol{\varepsilon}, \Im, s)$ – função de energia livre e $\dot{U} = dU / dt$ sua derivada em relação ao tempo;

$\tilde{W}$ – taxa de trabalho realizado por unidade de tempo $\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij}.\left(d\varepsilon_{ij} / dt\right)$;

$\tilde{\Phi}$ – taxa de dissipação de energia.

A função de energia livre U varia de acordo com as "variáveis de estado" que definem de forma única o estado atual do elemento contínuo. O uso de "~" para a taxa de trabalho e taxa de dissipação é utilizado para indicar que, diferentemente de $\dot{U}$, essas funções não são derivadas em relação ao tempo de uma função qualquer de estado, e que suas integrais em relação ao tempo são dependentes da trajetória de tensões ou de deformações.

A primeira lei da termodinâmica estabelece a existência de uma função de estado chamada energia interna U. Em condições isotérmicas, esta função pode ser substituída pela função de energia livre de Helmholtz $f = f(\boldsymbol{\varepsilon}, \Im)$, que depende apenas de variáveis de estado cinemáticas. Por meio de uma transformação de Legendre, aplicada sobre a função potencial de Helmholtz, pode-se obter a função potencial de energia livre de Gibbs $g = g(\boldsymbol{\sigma}, \Im)$, onde $\boldsymbol{\sigma}$ é o tensor de tensões. Os dois potenciais de energia, de Helmholtz e de Gibbs, estão relacionados um ao outro pela transformação.

$$g(\boldsymbol{\sigma}, \Im) = f(\boldsymbol{\varepsilon}, \Im) - \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} \tag{A2}$$

$\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij}.\varepsilon_{ij}$ – é uma forma de produto (interno) tensorial da Mecânica do Contínuo;

Da derivação da equação (A2) em relação às componentes de tensão, sendo definido o potencial de energia livre g de Gibbs, então:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = -\partial g / \partial \boldsymbol{\sigma} \quad \text{ou} \quad \varepsilon_{ij} = -\partial g / \partial \sigma_{ij} \tag{A3}$$

As variáveis internas tensoriais de primeira ordem $\tilde{\alpha}_i$ ou de segunda ordem $\tilde{\alpha}_{ij}$, são associadas a tensões generalizadas definidas respectivamente como (Einav *et al*., 2007):

$$\chi_i = -\frac{\partial g}{\partial \tilde{\alpha}_i} = -\frac{\partial f}{\partial \tilde{\alpha}_i} \quad \text{ou} \quad \chi_{ij} = -\frac{\partial g}{\partial \tilde{\alpha}_{ij}} = -\frac{\partial f}{\partial \tilde{\alpha}_{ij}} \tag{A4}$$

É aceito que a dissipação mecânica *d* é uma função estritamente não-negativa do estado de tensões e das variáveis internas e de suas taxas de variação, isto é: $d = d\left(\boldsymbol{\sigma}, \Im, \dot{\Im}\right) \geq 0$. A função *d* aqui referida é a mesma função $\tilde{\Phi}$ de (A1), ou seja, $d \equiv \tilde{\Phi}$. Em casos de processos independentes do tempo, a função de dissipação é uma função homogênea de primeira ordem das taxas de variáveis internas, o que pode ser expresso pela equação de Euler, para variáveis internas constituídas por tensores de primeira ou segunda ordem, respectivamente como:

$$d = \tilde{\Phi} = \sum_{i=1}^{N} \left(\partial d / \partial \dot{\tilde{\alpha}}_i\right) \bullet \dot{\tilde{\alpha}}_i = \sum_{i=1}^{N} \chi_i \bullet \dot{\tilde{\alpha}}_i \quad \text{ou} \quad d = \tilde{\Phi} = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial d}{\partial \alpha_{ij}} \bullet \dot{\alpha}_{ji} = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \chi_{ij} \bullet \dot{\alpha}_{ij} \tag{A5}$$

$\chi_i = \partial d / \partial \dot{\tilde{\alpha}}_i$, ou $\chi_{ij} = \partial d / \partial \dot{\tilde{\alpha}}_{ij}$ – tensão generalizada de dissipação;

Do princípio de ortogonalidade de Ziegler (1983), que estabelece condição mais restritiva do que a termodinâmica, é possível escrever que $\chi_i = \overline{\chi}_i$, ou $\chi_{ij} = \overline{\chi}_{ij}$ para qualquer $i, j \in [1, N]$. Esta escolha de tensor de tensões generalizadas de dissipação, baseado no princípio de Ziegler, implica na escolha do tensor que produz a mesma energia de dissipação e a máxima entropia.

Collins e Houlsby (1997) observam que é a tensão generalizada χ_{ij} que entra no produto interno com $\dot{\tilde{\alpha}}_{ij}$ na expressão da função de dissipação (A5) e não a tensão real. A diferença entre estes dois tensores é um tensor ρ_{ij} denominado de *tensor de arraste*.

$$\rho_{ij} = \sigma_{ij} - \chi_{ij} \tag{A6}$$

que é responsável pelo deslocamento da superfície de escoamento no espaço de tensões na plasticidade cinemática.

A função dissipativa *d*, pode então ser expressa de forma geral, para processos independentes do tempo, em função do estado de tensões e das taxas das variáveis internas, como:

$$d = d\left(\boldsymbol{\sigma}, \dot{\Im}\right) \geq 0 \tag{A7}$$

A função de dissipação *d* empregada neste modelo é associada a uma função única de escoamento *y* para plastificação e dano, por um caso particular de transformação degenerada de Legendre, através da equação:

$$\lambda y = \sum_{i=1}^{N} \overline{\chi}_i \bullet \dot{\tilde{\alpha}}_i - d = 0 \tag{A8}$$

y – função de escoamento $y = y\,(\boldsymbol{\sigma}, \Im, \Re)$;
$\Re$ – conjunto de tensões dissipativas $\Re \equiv \Re\left(\overline{\chi}_1, \ldots, \overline{\chi}_N\right)$;

E a partir da equação (A8) a *i*-ésima *tensão generalizada de dissipação* pode agora ser obtida por derivação da equação em relação às taxas de variação das variáveis internas, como:

$$\overline{\chi}_i = \partial d \big/ \partial \dot{\tilde{\alpha}}_i \quad \text{ou} \quad \overline{\chi}_{ij} = \partial d / \partial \dot{\tilde{\alpha}}_{ij} \tag{A9}$$

A função de escoamento y é uma função que deve ser expressa no espaço N-dimensional do conjunto de tensões dissipativas generalizadas $\Re$. Desta forma existem N regras de fluxo que correspondem à essa superfície única de escoamento, todas elas contendo um multiplicador λ comum, não-negativo, tal que os incrementos de variáveis internas obedecem a

$$\dot{\tilde{\alpha}}_i = \lambda \frac{\partial d}{\partial \overline{\chi}_i} \quad \text{ou} \quad \dot{\tilde{\alpha}}_{ij} = \lambda \frac{\partial d}{\partial \overline{\chi}_{ij}} \tag{A10}$$

A equação (A8) pode ser reescrita como $d = \sum_{i=1}^{N} \overline{\chi}_i \bullet \dot{\tilde{\alpha}}_i - \lambda y$. Esta equação representa condição onde o estado de tensões deve produzir a máxima dissipação de energia sujeita à restrição de que o estado de tensões atenda continuamente à função de escoamento y. Recai-se em problema de determinação de extremo de função $d = \sum_{i=1}^{N} \overline{\chi}_i \bullet \dot{\tilde{\alpha}}_i$ sujeita à restrição y, que é incluída no problema de máximo por meio de multiplicador λ de Lagrange. Como $\lambda \geq 0$ e $\lambda . y = 0$ na equação (A8), a aplicacão das condições suplementares de Kuhn-Tucker, para determinação de extremos sujeitos à restrições, leva à exigência de que $y = 0$. A condição $y = 0$ representa a função única de escoamento. Tal condição introduz um acoplamento entre variáveis internas, já que todas elas evoluem quando ocorre escoamento. Se $y = 0$ e $\lambda > 0$, existe apenas uma condição de consistência a ser introduzida, que pode ser expressa para uma função $y = y\left(\boldsymbol{\sigma}, \dot{\tilde{\alpha}}_i, \overline{\chi}_i\right)$ como (Einav *et al*., 2007):

$$\dot{y} = \left(\partial y / \partial \boldsymbol{\sigma}\right) : \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \sum_{i=1}^{N} \left(\partial y / \partial \dot{\tilde{\alpha}}_i\right) \bullet \dot{\tilde{\alpha}}_i + \sum_{i=1}^{N} \left(\partial y / \partial \overline{\chi}_i\right) \bullet \dot{\overline{\chi}}_i = 0 \tag{A11}$$

Esta condição deve ser atendida sempre que a superfície de escoamento, representada pela função $y = 0$, sofrer expansão ou contração, em processo que implique em carregamento.

7.1 – A.2. Efeito de Dano e Variáveis Internas de Dano

O conceito de dano escalar foi introduzido por Kachanov (1958), utilizando o conceito de tensão efetiva, baseado em um fundamento fenomenológico. A mecânica do dano utiliza dois enfoques Chaboche (1988), o primeiro deles emprega uma abordagem micro-mecânica e o segundo, referido como de abordagem fenomenológica, introduz um conjunto de variáveis internas de dano e define suas equações de evolução diretamente em uma macroescala. Outros modelos foram baseados no conceito de deformação efetiva. Em ambos os casos, o dano é representado por uma variável escalar, variando entre 0 e 1. Por exemplo, a variável de dano α_d associada com a tensão efetiva é:

$$\alpha_d = \frac{A_D}{A} = \frac{A - A_s}{A} \tag{A12}$$

A – a área total da seção transversal, dentro de uma célula unitária da estrutura do material;
A_s – área da matriz sólida contida em A;
A_D – área de vazio na seção transversal decorrente do dano.

A área da seção transversal total A e a área danificada A_D em uma seção transversal estão representadas na Figura A1.

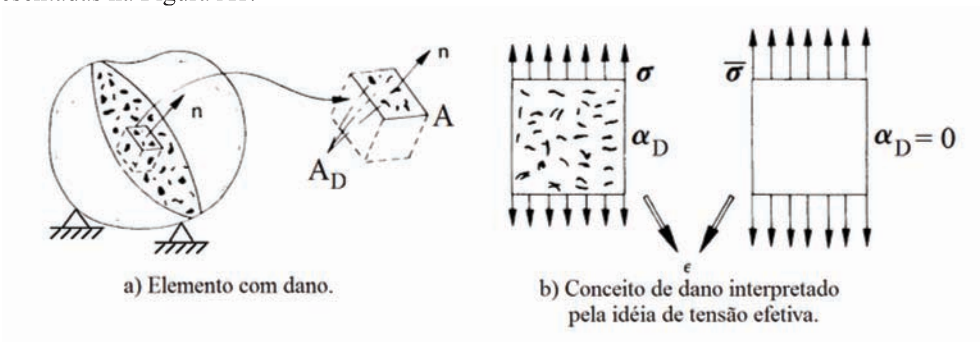

Fig. A1 – (a) Elemento com dano e área líquida A – A_D, (b) Conceito de tensão efetiva - adaptado de Chaboche (1988).

A tensão efetiva é aquela que deveria ser aplicada ao elemento de volume sem dano $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ para que ele se deformasse do mesmo modo que o elemento sujeito ao dano sob a tensão real σ

Usando a equivalência de deformação, Lemaitre (1985) expressou a relação entre a tensão macroscópica σ da Mecânica do Contínuo e a tensão efetiva correspondente, em função da variável de dano dada por (A12), como:

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\sigma}/(1-\alpha_d) \tag{A13}$$

$\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ – tensão efetiva.

A hipótese de equivalência de tensão usa o conceito de deformação efetiva, definida como:

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \boldsymbol{\varepsilon}(1-\alpha_d) \tag{A14}$$

$\bar{\varepsilon}$ – deformação efetiva.

A manifestação do dano (Basan e Marohnić, 2016), pode ocorrer segundo diferentes formas, embora em micro-escala corresponda sempre a um fenômeno de ruptura de ligações (debonding), em meso-escala, se evidencia nos materiais pelo surgimento de: ruptura frágil, ductilidade, creep, e fadiga produzida em ciclos de tensões altas ou baixas.

A.3. Determinação dos incrementos das variáveis internas de plasticidade e de dano

Da aplicação da regra de fluxo à função de escoamento resultam:

$$\dot{\alpha}_p^v = \lambda.(\partial y/\partial \chi_p^v) = \lambda.2.((\chi_p^v - (p_y/2))/r_p^2) \tag{A15}$$

$$\dot{\alpha}_d^v = \lambda.(\partial y/\partial \chi_d^v) = \lambda.2.((\chi_d^v - R_d^v p_y/2)/(r_d R_d^v)^2) \tag{A16}$$

$$\dot{\alpha}_p^s = \lambda.(\partial y/\partial \chi_p^s) = \lambda.2.\,\chi_p^s/(r_p M)^2 \tag{A17}$$

$$\dot{\alpha}_d^s = \lambda.\left(\partial y / \partial \chi_d^s\right) = \lambda.2.\chi_d^s / \left(r_d M R_d^s\right)^2 \tag{A18}$$

Aplicando a condição de ortogonalidade de Ziegler para as componentes de tensão que satisfazem à condição de escoamento, pode-se obter as expressões anteriores em termos de tensões generalizadas e, finalmente, em termos de tensões triaxiais reais p e q.

$$\dot{\alpha}_p^v = 2\lambda.\left(p - p_y / 2\right) / r_p^2 \tag{A19}$$

$$\dot{\alpha}_d^v = 2\lambda.\left(p - \frac{p_y}{2}\right) \Bigg/ \left\{ r_d^2.\left(\frac{\kappa^*}{\left(1-\alpha_d^v\right)^2}.\left[\log\left(\frac{p}{p_0}\right) - 1\right]\right)\right\} \tag{A20}$$

$$\dot{\alpha}_p^s = 2\lambda.q / \left(r_p M\right)^2 \tag{A21}$$

$$\dot{\alpha}_d^s = 2\lambda.6G\left(1-\alpha_d^s\right)^2 / \left(r_d M\right)^2 \tag{A22}$$

Como as variáveis internas de dano variam de 0 a 1, pode-se observar das expressões (A20) e (A22), que os incrementos das variáveis internas de dano tendem a zero quando as variáveis internas de dano tendem a 1.

A.4. Fator Multiplicador λ

Quando a condição de escoamento é alcançada, as componentes de tensão tornam $y = 0$ em (11). A continuidade do processo de carregamento implica que (11) tem de ser continuamente satisfeita, e desta forma dy = 0, o que pode ser expresso como:

$$\left(p - \left(p_y / 2\right)\right).dp - p.\left(dp_y / 2\right) + \left(q / M^2\right).dq = 0 \tag{A23}$$

Os incrementos de tensão, dp (ou $\dot{p}$) e dq (ou $\dot{q}$) em (A23), podem ser colocados em função dos incrementos das variáveis internas de deformação plástica e de dano, de (20) e (21), como segue:

$$\dot{p} = \frac{p}{\overline{\kappa}^*}.\left[\dot{\varepsilon}_v - \dot{\alpha}_p^v - \overline{\kappa}^*.\frac{\dot{\alpha}_d^v}{\left(1-\alpha_d^v\right)}.\log\left(\frac{p}{p_0}\right)\right] \tag{A24}$$

$$\dot{q} = 3\overline{G}\left[\dot{\varepsilon}_s - \dot{\alpha}_p^s - \frac{q}{3\overline{G}}.\frac{\dot{\alpha}_d^s}{\left(1-\alpha_d^s\right)}\right] \tag{A25}$$

onde o módulo de compressibilidade volumétrica e o módulo cisalhante são dados por:

$$\overline{\kappa}^* = \kappa^* / \left(1-\alpha_d^v\right) \tag{A26}$$

$$\overline{G} = G.\left(1-\alpha_d^s\right) \tag{A27}$$

Da expressão genérica para a tensão de adensamento isotrópica p_y, dada pela equação (12), $p_y\left(\alpha_p^v, \alpha_d^v, \alpha_d^s\right) = p_{y0}.\Pi\left(\alpha_p^v\right).\sqrt{\Gamma\left(\alpha_d^v\right)\Gamma\left(\alpha_d^s\right)}$, pode-se escrever a expressão para o incremento de tensão de adensamento isotrópica dp_y (ou $\dot{p}_y$), em função das variáveis internas, como:

$$\dot{p}_y = p_{y0}.\left[\Pi'\left(\alpha_p^v\right).\sqrt{\Gamma\left(\alpha_d^v\right)\Gamma\left(\alpha_d^s\right)}.\dot{\alpha}_p^v + \Pi\left(\alpha_p^v\right).\frac{1}{2}\frac{\Gamma'\left(\alpha_d^v\right)\Gamma\left(\alpha_d^s\right)}{\sqrt{\Gamma\left(\alpha_d^v\right)\Gamma\left(\alpha_d^s\right)}}\dot{\alpha}_d^v + \Pi\left(\alpha_p^v\right).\frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\alpha_d^v\right)\Gamma'\left(\alpha_d^s\right)}{\sqrt{\Gamma\left(\alpha_d^v\right)\Gamma\left(\alpha_d^s\right)}}\dot{\alpha}_d^s\right] \quad \text{(A28)}$$

Substituindo as expressões dos incrementos de variáveis internas de plasticidade e dano dados pelas equações (A19) a (A22) nas expressões (A24) e (A25) e por sua vez substituindo as expressões (A24) e (A25) e também a expressão (A28) em (A23), é possível isolar o fator multiplicador λ de forma analítica, a menos da expressão genérica (12) para p_y, que deve ser ajustada para cada solo específico, como:

$$\lambda = \frac{\left(p - \frac{p_y}{2}\right).\frac{p}{\overline{\kappa}^*}.\dot{\varepsilon}_v + 3\overline{G}.\frac{q}{M^2}.\dot{\varepsilon}_s}{\left\{\begin{array}{l} 2.\left(p - \frac{p_y}{2}\right)^2.\frac{p}{\overline{\kappa}^*}.\left[\frac{1}{r_p^2} + \frac{\log\left(\frac{p}{p_0}\right)}{\left(\log\left(\frac{p}{p_0}\right) - 1\right)}.\frac{1}{r_d^2}\right] + \frac{6\overline{G}}{M^2}.q.\left[\frac{q}{\left(r_p M\right)^2} + \frac{2q}{\left(r_d M\right)^2}\right] + \ldots \\ + p.p_{y0}.\left[\begin{array}{l} \Pi'\left(\alpha_p^v\right).\sqrt{\Gamma\left(\alpha_d^v\right)\Gamma\left(\alpha_d^s\right)}.\left(\frac{p - p_y/2}{r_p^2}\right) + \ldots \\ + \frac{\Pi\left(\alpha_p^v\right)}{2}\frac{\Gamma'\left(\alpha_d^v\right)\Gamma\left(\alpha_d^s\right)}{\sqrt{\Gamma\left(\alpha_d^v\right)\Gamma\left(\alpha_d^s\right)}}.\frac{\left(p - p_y/2\right)}{r_d^2\frac{\kappa^*}{\left(1-\alpha_d^v\right)^2}.\left(\log\left(\frac{p}{p_0}\right) - 1\right)} + \ldots \\ + \frac{\Pi\left(\alpha_p^v\right)}{2}\frac{\Gamma\left(\alpha_d^v\right)\Gamma'\left(\alpha_d^s\right)}{\sqrt{\Gamma\left(\alpha_d^v\right)\Gamma\left(\alpha_d^s\right)}}.\frac{6G.\left(1-\alpha_d^s\right)^2}{r_d^2.M^2} \end{array}\right] \end{array}\right\}} \quad \text{(A29)}$$

Com a determinação do fator multiplicador λ pode-se, então, determinar os incrementos de deformação volumétrica e de distorção. Substituindo as expressões (A19) e (A20) em (18) obtém-se:

$$\dot{\varepsilon}_v = \overline{\kappa}^*.\left(\frac{\dot{p}}{p}\right) + \lambda.2.\left(p - \left(\frac{p_y}{2}\right)\right)\left[\left(\frac{1}{r_d^2}\right).\log\left(\frac{p}{p_0}\right)\Big/\left(\log\left(\frac{p}{p_0}\right) - 1\right) + \left(\frac{1}{r_p^2}\right)\right] \quad \text{(A30)}$$

E substituindo as expressões (A21) e (A22) em (19), resulta:

$$\dot{\varepsilon}_s = \frac{\dot{q}}{3\overline{G}} + \lambda.\frac{2q}{M^2}.\left[\frac{2}{r_d^2} + \frac{1}{r_p^2}\right] \quad \text{(A31)}$$

As parcelas de incrementos de deformação, em (A30) e (A31), associadas com os termos contendo r_d estão relacionados com o efeito de deformação induzido por dano, ao passo que aquelas contendo r_p estão relacionados com o efeito de deformação induzido por plastificação.

A análise das expressões (A30) e (A31) mostra que sob regime elástico (como no caso de carregamento sem escoamento ou descarregamento), que implica em λ = 0, os incrementos de deformação volumétrica e distorção são dados por relações diretas:

$$\dot{\varepsilon}_v = \overline{\kappa}^*.(\dot{p}/p) \tag{A32}$$

$$\dot{\varepsilon}_s = \dot{q}/(3\overline{G}) \tag{A33}$$

A expressão do fator multiplicador λ dado pela equação (A29) pode ser sinteticamente escrita como:

$$\lambda = \frac{1}{\mathbf{D}}\left[\left(p - \left(\frac{p_y}{2}\right)\right).\left(\frac{p}{\overline{\kappa}^*}\right).\dot{\varepsilon}_v + 3\overline{G}.\left(\frac{q}{M^2}\right).\dot{\varepsilon}_s\right] \tag{A33}$$

D – é a expressão do denominador de (A29);

O módulo do denominador **D** de (A29) depende: do estado de tensão corrente (p, q); da pressão de pré-adensamento inicial p_{y0}; da pressão de pré-adensamento corrente p_y, e do módulo das variáveis internas acumuladas até o "momento" corrente.

A.5. Relação entre os incrementos de tensão e de deformação

Substituindo (A33) em (A30) e (A31) e, também, separando os termos, os resultados produzem o seguinte sistema de equações lineares, relacionando incrementos de deformação e incrementos de tensão em estado elasto-plástico:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{\varepsilon}_v \\ \dot{\varepsilon}_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \end{Bmatrix} \tag{A34}$$

onde

$$A_{11} = \frac{p}{\overline{\kappa}^*}\left\{1 - \frac{2}{\mathbf{D}}\left(p - \frac{p_y}{2}\right)^2 \frac{p}{\overline{\kappa}^*}\left[\frac{1}{r_d^2}.\frac{\log\left(\frac{p}{p_0}\right)}{\left[\log\left(\frac{p}{p_0}\right) - 1\right]} + \frac{1}{r_p^2}\right]\right\} \tag{A35}$$

$$A_{12} = -\frac{6\overline{G}}{\mathbf{D}}\frac{p}{\overline{\kappa}^*}\frac{q}{M^2}\left(p - \frac{p_y}{2}\right)\left[\frac{1}{r_d^2}.\frac{\log\left(\frac{p}{p_0}\right)}{\left[\log\left(\frac{p}{p_0}\right) - 1\right]} + \frac{1}{r_p^2}\right] \tag{A36}$$

$$A_{21} = -\frac{6\overline{G}}{\mathbf{D}} \frac{p}{\overline{\kappa}^*} \frac{q}{M^2} \left(p - \frac{p_y}{2} \right) \left[\frac{1}{r_d^2} + 1 \right] \tag{A37}$$

$$A_{22} = 3\overline{G} \left[1 - \frac{6\overline{G}}{\mathbf{D}} \frac{q^2}{M^4} \left(\frac{1}{r_d^2} + 1 \right) \right] \tag{A38}$$