

# ACERCA DO FUNCIONAMENTO DOS SISTEMAS FLEXÍVEIS USADOS NA ESTABILIZAÇÃO DE TALUDES EM MACIÇOS ALTERADOS

Behaviour of flexible surface stabilization systems applied in weathered rock masses

António Silva Cardoso\*

**RESUMO** – Em maciços rochosos alterados, na estabilização de taludes de escavação têm vindo a ser usados sistemas flexíveis constituídos por redes, associadas a cabos de aço e a pregagens. Teoricamente podem conceber-se 3 modos diferentes de funcionamento desses sistemas: i) um modo “ativo”, resultante da aplicação de pré-esforço às pregagens; ii) um modo “reativo”, em que as redes reagem a qualquer movimento do maciço para o exterior; iii) um modo “preventivo”, em que a função do sistema é tão-somente a de impedir a queda de massas que se desprendam. No artigo apreciam-se e discutem-se esses modos de funcionamento teóricos, o que permite chegar a algumas conclusões que contribuem para o esclarecimento do comportamento do sistema.

**ABSTRACT** – In the stabilization of excavation slopes cut in weathered rock masses flexible systems consisting of mesh, steel cables and nailing have been used. Theoretically it is possible to conceive three different modes of operation of such systems: i) an “active” mode, resulting from the application of pre-stressing to the nails, ii) a “reactive” mode, in which the mesh reacts to any outward movement of the rock mass, iii) a “preventive” mode, in which the system's function is merely to prevent the fall of masses. These theoretical modes are appreciated and discussed, which provides some conclusions that contribute to the understanding of the system behaviour.

**PALAVRAS CHAVE** – Estabilização de taludes de escavação, sistemas flexíveis constituídos por redes, cabos e pregagens, modos de funcionamento.

## 1 – INTRODUÇÃO

Em maciços rochosos alterados, na estabilização de taludes de escavação, com inclinações relativamente acentuadas ( $V/H > 1/1$ ) e, por vezes, com alturas elevadas, têm vindo a ser usados sistemas flexíveis constituídos por redes, associadas a cabos de aço e a pregagens.

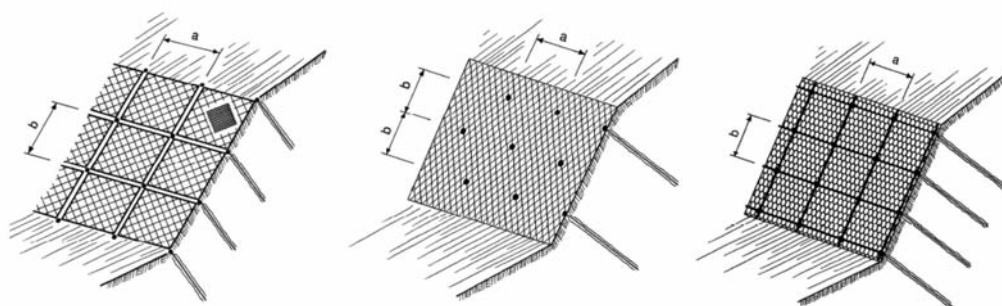
Há no mercado diversos sistemas deste tipo. Em alguns deles os respetivos componentes estão protegidos, total ou parcialmente, por patentes; estes sistemas são genericamente mais sofisticados. Seja como for, em termos gerais os diversos sistemas são basicamente constituídos pelos seguintes elementos principais (ver Fig. 1):

- rede em arame de aço galvanizado, por vezes de alta resistência; alguns sistemas integram dispositivos especiais de aperto da rede contra o terreno que permitem o seu tensionamento;
- cabos de reforço em aço galvanizado, posicionados com afastamentos entre si, geralmente, entre 3 a 5m, em ambas as direções do plano do talude (direção horizontal e direção da linha de maior declive); há sistemas que não necessitam de cabos de reforço ou em que são colocados cabos apenas na direção horizontal;

---

\* Professor, Faculdade de Engenharia, Universidade do Porto. E-mail: scardoso@fe.up.pt

- pregagens, geralmente em aço e dimensionadas atendendo à corrosão, com diâmetros em regra superiores a 25mm, tipicamente posicionadas com afastamentos da ordem dos 3 a 5m nas duas direções e com comprimentos variáveis em função das características geométricas e mecânicas dos taludes, mas que, em muitos casos, são da ordem dos 5 a 7m; as pregagens devem ser aplicadas tanto quanto possível ortogonalmente às principais famílias de descontinuidades quando se verifique a possibilidade de deslizamentos planares ou perpendicularmente à superfície do talude no caso de suporte de rocha fragmentada e instável na zona superficial; complementarmente, podem também ser instaladas de forma aleatória pregagens para melhorar o ajuste das redes ao terreno;
- placas, geralmente de aço, que constituem a cabeça das pregagens e onde amarram os cabos de aço de reforço, sobre os quais, por sua vez, apoia a rede; alguns sistemas incluem placas de concepção especial;
- outros dispositivos como, por exemplo, elementos especiais para fazer a ligação entre os vários rolos de rede, etc..



**Fig. 1** – Sistemas flexíveis usados na estabilização de taludes de escavação em maciços alterados (CEN TC288, 2009).



**Fig. 2** – Talude após a execução da estabilização e um ano depois (Farrand e Teen, 2008).

Os projetos devem especificar concretamente as medidas construtivas relativas ao acabamento das superfícies dos taludes, as regras executivas respeitantes à disposição das redes e dos cabos sobre as superfícies dos taludes e ao seu tensionamento, a metodologia de aplicação de pré-esforço às pregagens ou a quaisquer outros elementos, quando tal for considerado conveniente, e quaisquer outras regras executivas definidas em função das características específicas de cada projeto. Saliente-se que, de forma a minimizar a descompressão do maciço, sempre que possível, as prega-

gens devem ser executadas imediatamente após a abertura da escavação nos troços correspondentes, sem esperar pela colocação da rede, ainda que a placa da cabeça das pregagens só seja montada depois da instalação daquela e dos cabos.

A Fig. 2 mostra um talude no qual se aplicou um sistema do tipo dos considerados no presente artigo. Estas soluções de estabilização facultam a possibilidade de uma adequada integração paisagística, como a figura bem ilustra.

Convém ter presente que o sistema em apreço não exerce nenhuma função primordial no que respeita à estabilização global (profunda) do maciço. O sistema visa o controlo dos problemas de estabilidade localizada (superficial), envolvendo massas relativamente pequenas face às que podem estar em jogo na estabilidade global.

Alguns fabricantes referem na sua documentação que os seus sistemas têm capacidade para suportar pressões até 20kN/m<sup>2</sup>. Nestes casos, preconizam que a avaliação da carga atuante nas pregagens seja feita multiplicando simplesmente a sua área de influência pela pressão que supostamente se viria a mobilizar sobre a rede. A pressão atuante sobre a rede é transferida para os cabos de aço onde aquela apoia e, destes, para as pregagens (ou diretamente para estas caso não haja cabos) através das placas localizadas na cabeça destas, acabando evidentemente por ser reposta no maciço ao longo do comprimento de amarração das pregagens. Acresce que, por vezes, o comprimento de amarração das pregagens é considerado praticamente igual ao seu comprimento total; como o comprimento de amarração tem que estar situado numa zona estável do maciço, aquela suposição significa implicitamente que se considera potencialmente instável apenas a zona mais superficial do talude. Em suma, conclui-se que o sistema em consideração tem por objetivo fundamental o controlo dos problemas associados à estabilidade superficial dos taludes de escavação.

No presente artigo apreciam-se e discutem-se os modos de funcionamento teóricos do sistema de estabilização em causa, o que permite chegar a algumas conclusões que contribuem para o esclarecimento do seu funcionamento em obra.

## 2 – MODOS DE FUNCIONAMENTO

Podem teoricamente conceber-se 3 modos diferentes de funcionamento dos sistemas em apreço:

- um modo “ativo”, em que, por efeito da aplicação de pré-esforço aos elementos de amarração do sistema ao maciço (pregagens ou, neste caso, preferivelmente ancoragens), os cabos, que passam pelas placas instaladas nas cabeças daqueles elementos, são “empurrados” contra o maciço, “empurrando” subsequentemente os panos de rede que neles apoiam; portanto, por efeito do pré-esforço, o sistema, através dos cabos e da rede, aplica à superfície do maciço uma certa pressão que contribui para a sua estabilização;
- um modo “reativo”, em que as redes, colocadas nas superfícies dos taludes, reagem a qualquer movimento do maciço para fora – motivado pela sua descompressão ou pela aplicação de alguma solicitação externa –, ficando sujeitas à tração e, ao mesmo tempo, mobilizando uma pressão de “amparo” sobre o maciço; subsequentemente, as redes transferem as ações para os cabos que as suportam e estes para os elementos de amarração ao maciço, através das placas colocadas nas cabeças destes;
- um modo “preventivo”, em que a função do sistema é tão somente a de impedir a queda das massas que, por qualquer motivo, venham a perder a sua estabilidade, impedindo que elas se espalhem sobre a via, com eventuais consequências perigosas e prejudiciais.

Como é evidente, a possibilidade de funcionamento de acordo com os dois primeiros modos exige que, à partida, as redes e os cabos se disponham sobre as superfícies dos taludes de uma forma apropriada, isto é, bem esticados, ainda que a tração a que estejam inicialmente sujeitos seja

muito pequena, praticamente desprezável. Em contrapartida, no aspeto construtivo, o terceiro modo de funcionamento é viável com exigências construtivas muito menos apertadas.

No que se segue procura-se analisar teoricamente a viabilidade dos dois primeiros modos de funcionamento. Nos cálculos efetuados consideram-se as seguintes características, relativamente usuais (L, comprimento, b, largura ou diâmetro, A, área da secção transversal, e E, módulo de deformabilidade do material que constitui as redes ou os cabos):

- para as redes,  $L = 3\text{m}$ ,  $b = 1\text{m}$ ,  $E A = 2000\text{kN}$  e  $T_{\text{rot}} \cong 160\text{kN}$ ;
- para os cabos,  $L = 3$  ou  $5\text{m}$ ,  $b = 18\text{mm}$ ,  $A = 111,6\text{mm}^2$ ,  $\sigma_{\text{rot}} = 1760\text{MPa}$  (pelo que,  $T_{\text{rot}} = 196\text{kN}$ ) e  $E = 200\text{GPa}$ .

### 3 – MODO “ATIVO” DE FUNCIONAMENTO

No Anexo A deduzem-se as expressões que permitem estudar o comportamento do sistema funcionando de modo “ativo”, isto é, quando as pregagens/ancoragens são puxadas e, conseqüentemente, “empurram” contra o maciço, suposto com comportamento elástico, os cabos ligados às suas cabeças, suscitando a mobilização de pressões proporcionais ao deslocamento em cada ponto,  $p_y = k y$ , sendo  $k$  o módulo de reação do terreno, expresso em  $\text{kN/m}^3$ , e  $y$  o deslocamento. Como se demonstra no Anexo A, devido à deformação causada pelas ações, o cabo adquire a forma de uma catenária, dependente dos parâmetros geométricos ( $L$ ,  $b$  e  $A$ ) e mecânicos ( $E$  e  $k$ ).

Nos cálculos realizados admitiu-se o afastamento entre cabos igual a  $S = 3\text{m}$  e o valor médio da pressão que se pretende mobilizar da ordem de  $p = 10$  ou  $20\text{kPa}$ .

Em primeira aproximação mas, segundo alguns autores, com suficiente precisão, pode considerar-se  $k b \cong E_s$ , sendo  $E_s$  o módulo de deformabilidade do terreno. Num estudo de campo realizado recentemente em maciços rochosos coreanos, no qual se fizeram mais de 2300 medições experimentais, é proposta a correlação apresentada no Quadro 1 (Kang *et al.*, 2012).

**Quadro 1** – Módulos de deformabilidade do maciço em função do grau de alteração (Kang *et al.*, 2012).

Grau de alteração do maciço rochoso	Módulo de deformabilidade <i>in situ</i> (MPa)
Muito alterado	70 a 430
Moderadamente alterado	430 a 1380
Pouco alterado	1380 a 3720
São	3720 a 16 600

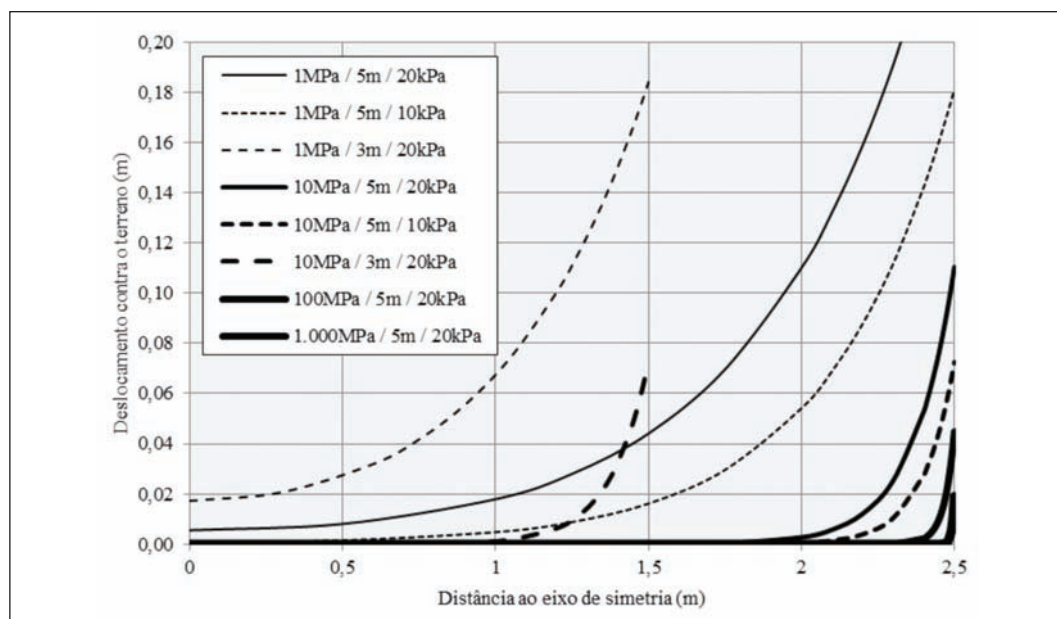
Pressupondo um maciço muito alterado a moderadamente alterado, adotaram-se três valores distintos para o módulo de reação do terreno,  $k b = 10, 100$  e  $1000\text{MPa}$ . Resolveu-se considerar ainda um valor significativamente inferior aos anteriores,  $k b = 1\text{MPa}$ .

Em resumo, procedeu-se à realização de um conjunto de cálculos fazendo variar o módulo de reação do terreno ( $k b$ ), o comprimento dos cabos ( $L$ ) e o valor da pressão média que se pretende mobilizar ( $p$ ). No Quadro 2 apresenta-se alguns dos resultados obtidos e na Figura 3 mostra-se os deslocamentos contra o maciço dos cabos devido ao pré-esforço, para as várias situações teóricas consideradas.

Quanto  $k b$  possui valores baixos, designadamente quando  $k b = 1\text{MPa}$ , pouco realistas, como se viu, é necessário um grande deslocamento para se conseguir a mobilização da pressão média requerida. Tal implica que os cabos sejam muito estirados, o que significa que a tensão neles instalada é muito elevada, podendo mesmo conduzir à sua cedência (tenha-se presente que  $T_{\text{rot}} = 196\text{kN}$ ).

**Quadro 2** – Resultados dos cálculos supondo um modo de funcionamento “ativo”.

k b (MPa)	1			10			100	1000
L (m)	5	5	3	5	5	3	5	5
p (kPa)	20	10	20	20	10	20	20	20
$\Delta L$ , aumento de comprimento (cm)	6,7	3,9	3,3	4,2	2,4	2,1	2,5	1,4
Deslocamento contra o maciço (cm): $y_0$ , a meio vão $y_{apoio}$ , das cabeças das pregagens	0,6 27,5	0,1 18,1	1,7 18,4	0,0 11,0	0,0 7,3	0,0 7,3	0,0 4,5	0,0 1,9
$\theta_{apoio}$ , ângulo com a horizontal da força nos apoios (°)	27	24	20	39	35	31	53	68
Tensões no cabo (kN): $T_{min}$ , a meio vão $T_{max}$ , nos apoios	297 333	171 187	241 258	185 238	107 131	153 177	112 187	62 162



**Fig. 3** – Deslocamentos contra o terreno, supondo um modo de funcionamento “ativo”  
[ $o 1^o$  número representa o valor do módulo de reação ( $k_b$ ),  $o 2^o$  o do comprimento dos cabos ( $L$ )  
e  $o 3^o$  o da pressão média que se pretende atingir ( $p$ )].

Sem embargo, o aspeto mais relevante dos resultados obtidos é o seguinte: devido à baixa rigidez do sistema, em contraste com a rigidez do terreno ( $k_b$  entre 10 e 1000MPa), a pressão mobilizada concentra-se essencialmente sobre os apoios, sendo praticamente impossível mobilizar uma pressão minimamente uniforme sobre a superfície do talude. Realce-se que esta conclusão ganha ainda maior relevo se se tiver presente que é em consequência do deslocamento dos cabos contra o maciço que é possível ocorrer a mobilização das pressões sobre a rede que apoia neles; como aquele deslocamento não tem possibilidade de ocorrer, então a mobilização dessas pressões fica prejudicada. Esta concentração das pressões mobilizadas na zona dos apoios é também reconhecida por Flum e Rüeggger (2002).

Uma conclusão que deriva da anterior é que, se a rede e os cabos não estiverem bem estirados sobre a superfície do talude, é praticamente impossível fazê-lo à custa do pré-esforço, pelo que o efeito deste sobre o maciço se torna ainda mais localizado. Ou seja, o não estiramento corresponde portanto a uma ainda menor rigidez do sistema.

Atendendo às conclusões a que se chegou, compreende-se que as pequenas concavidades, que alguns autores propõem que se executem para albergar as cabeças das pregagens/ancoragens, desempenham a função primordial de facultar o estiramento dos cabos e das redes, tendo um efeito muito limitado sobre o maciço. Ao apertar os cabos e as redes na zona da cabeça das pregagens/ancoragens, a existência das concavidades permite absorver, pelo menos parcialmente, algumas folgas inevitáveis.

Note-se, enfim, que as protuberâncias, mais usuais em maciços rochosos não demasiado fraturados, também podem ter algum efeito localizado, de qualquer modo de difícil controlo e previsão. Em contrapartida, na vizinhança da protuberância a malha ou o cabo afasta-se da superfície do talude.

#### **4 – MODO “REATIVO” (OU “PASSIVO”) DE FUNCIONAMENTO**

Definiu-se na Secção 2 o que se entende ser o modo “reativo” de funcionamento: as redes, colocadas nas superfícies dos taludes, reagem a qualquer movimento do maciço para fora – motivado pela sua descompressão ou pela aplicação de alguma solicitação externa –, ficando sujeitas à tração e, ao mesmo tempo, mobilizando uma pressão de “amparo” sobre o maciço; subsequentemente, as redes transferem as ações para os cabos que as suportam e estes para os elementos de amarração ao maciço, através das placas colocadas nas cabeças destes.

Com o objetivo de analisar este modo de funcionamento, no Anexo B deduzem-se as expressões correspondentes. Como se demonstra nesse anexo, as redes, colocadas nas superfícies dos taludes, reagindo aos movimentos do maciço para fora, ficam sujeitas à tração e, devido às pressões do maciço, supostas uniformes, adquirem uma forma parabólica, dependente dos parâmetros geométricos ( $L$ ,  $b$  e  $A$ ) e mecânicos ( $E$ ) e do valor da pressão ( $p$ ).

No Quadro 3 apresenta-se alguns dos resultados obtidos e na Figura 4 mostra-se os deslocamentos para fora da rede e dos cabos, necessários para mobilizar a pressão  $p = 10$  ou  $20\text{kPa}$ .

O aspeto mais relevante é o seguinte: devido à baixa rigidez do sistema e como a mobilização das pressões de interação com o maciço está diretamente relacionada com essa rigidez, só se mobilizam as pressões requeridas quando ocorrem deslocamentos muito significativos das redes e cabos. Convém ter presente que ambos os deslocamentos, os das redes e os dos cabos, se têm que compor para que ocorram as condições necessárias à mobilização da pressão estipulada, o que, face aos valores do Quadro 3 e às deformadas mostradas na Figura 4, leva à conclusão de serem necessários deslocamentos, cujas grandezas dependem das características geométricas e mecânicas, mas que, em boa parte do maciço, têm que ser superiores a 30-40cm, especialmente para pressões superiores a 10 kPa.

É relevante salientar que, no caso dos cabos, as trações instaladas ultrapassam a resistência à tração (largamente no caso de a pressão ser de 20kPa ou de os cabos terem 5m de comprimento), o que significa que o elemento mais delicado não é a rede mas os cabos onde se apoia.

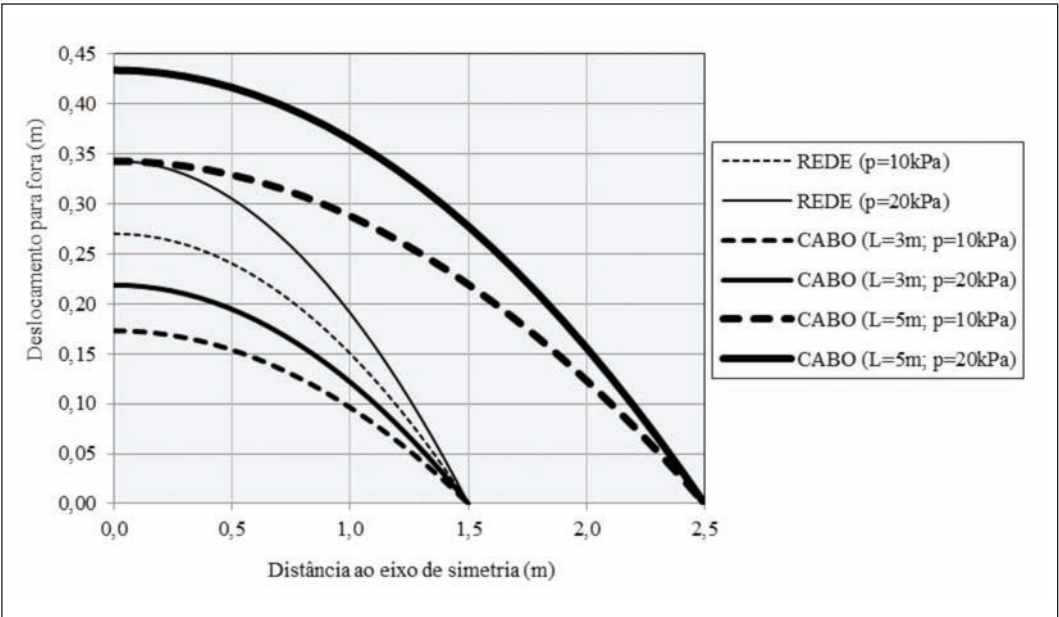
Para tornar mais clara a grande dependência da mobilização das pressões em relação aos deslocamentos, na Figura 5 traça-se a dependência da flecha com a pressão que se pretende mobilizar. Constata-se que essa dependência é fortemente não linear, sendo de relevar o facto de, para pressões tão baixas como 1 e 4kPa, as respetivas flechas corresponderem já a cerca de 35 e 60%, respetivamente, das que estão associadas à pressão de 20kPa.

Ora é sabido que são necessárias deformações muito pequenas, muito inferiores às acima calculadas e comentadas, para se atingir o estado limite ativo num maciço natural. Quer isto dizer que,



**Quadro 3** – Resultados dos cálculos supondo um modo de funcionamento “reativo”.

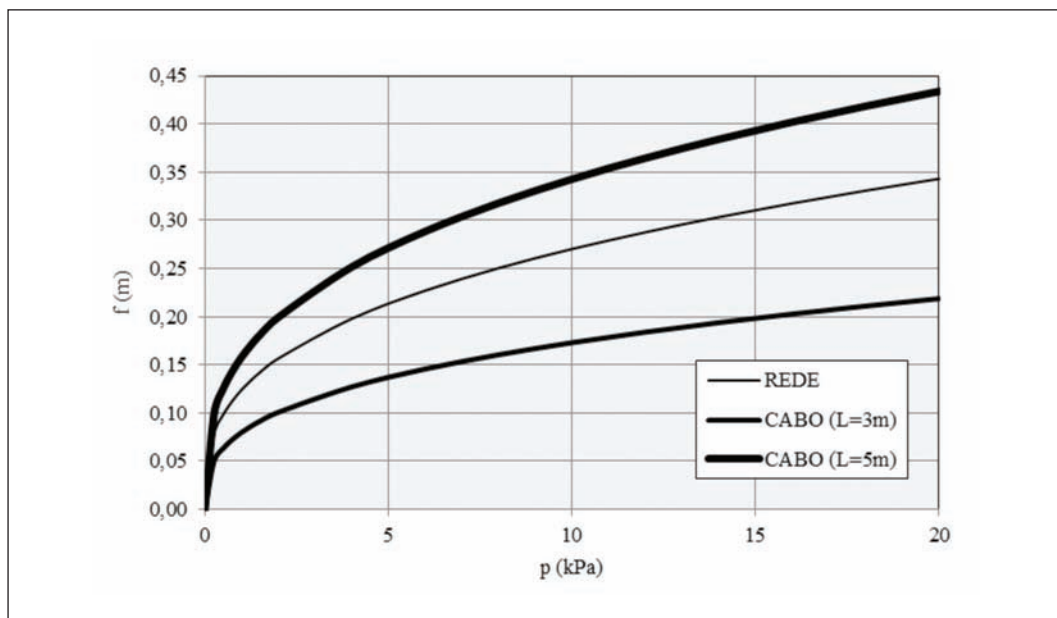
	Rede		Cabo [L=3m]		Cabo [L=5m]	
Pressão atuante (kPa)	10	20	10	20	10	20
$\Delta L$ , aumento de comprimento do cabo (cm)	6,4	10,2	2,6	4,2	6,2	9,9
f, flecha do deslocamento para fora (cm)	27,0	34,3	17,3	21,9	34,3	43,4
$\theta_{\text{apoio}}$ , ângulo com a horizontal da força nos apoios (°)	19	25	13	16	15	19
Trações no cabo (kN):						
$T_{\text{mín}}$ , a meio vão	42	66	195	308	273	432
$T_{\text{máx}}$ , nos apoios	44	72	200	321	284	457



**Fig. 4** – Deslocamentos para fora, supondo um modo de funcionamento “ativo”.

se o maciço tiver tendência para colapsar, tal ocorrerá para deslocamentos muito inferiores aos referidos, logo o maciço desmoronar-se-á. Consequentemente, entende-se que, devido à falta de rigidez do sistema em apreço, muito dificilmente ele poderá exibir um modo de funcionamento “reativo”, visto que os grandes deslocamentos associados a esse modo de funcionamento implicam um anterior desmoronamento local do maciço.

Enfim, o sistema tenderá a funcionar de acordo com o modo acima designado por “preventivo”: a função do sistema é tão-somente a de impedir a queda das massas que, por qualquer motivo, venham a perder a sua estabilidade, impedindo que elas se espalhem sobre a via, com eventuais consequências perigosas e prejudiciais. Naturalmente, esta conclusão é tanto mais inequívoca e indiscutível quanto menos estirados sobre a superfície do talude ficarem as redes e os cabos que as suportam.



**Fig. 5** – Flechas associadas a diferentes valores da pressão, supondo um modo de funcionamento “ativo”.

## 5 – CONSIDERAÇÕES FINAIS. CONCLUSÕES

O sistema analisado no artigo não exerce nenhuma função primordial no que respeita à estabilização global (profunda) do maciço. O sistema visa o controlo dos problemas de estabilidade localizada (superficial), envolvendo massas relativamente pequenas face às que podem estar em jogo na estabilidade global.

Mostrou-se que a aplicação de pré-esforço aos elementos de amarração do sistema ao maciço tem um efeito muito localizado, em volta da cabeça desses elementos, visto que os cabos e a rede, face à rigidez do maciço, não têm nenhuma possibilidade de transferir cargas para a zona interior, entre os pontos onde se localizam as pregagens/ancoragens.

Uma conclusão que deriva da anterior é que, se a rede e os cabos não estiverem bem estirados sobre a superfície do talude, é praticamente impossível fazê-lo à custa do pré-esforço. Para tal, desempenham um papel importante as pequenas concavidades que alguns autores propõem que se executem para albergar as cabeças das pregagens/ancoragens; ao apertar os cabos e as malhas na zona da cabeça das pregagens/ancoragens, a existência das concavidades permite absorver, pelo menos parcialmente, algumas folgas inevitáveis.

Demonstrou-se que, atendendo aos valores da deformabilidade dos elementos constituintes (rede e cabos) e ao afastamento entre os pontos de apoio (pregagens) nas direções vertical e horizontal, isto é, numa palavra, atendendo à pequena rigidez do sistema em apreço, ele não tem possibilidade de mobilizar pressões de “amparo” do maciço para deformações suficientemente baixas, compatíveis com o não desmoronamento deste. Ou seja, a mobilização de valores significativos da pressão implica a ocorrência de deformações e de deslocamentos do maciço demasiado elevados, pelo que, antes de estes níveis serem alcançados, já o maciço se desmoronou localmente, nas zonas interiores, entre pontos de apoio.

Tal significa, portanto, que o modo de funcionamento do sistema acaba por ser fundamentalmente “preventivo”, controlando a queda das massas que, por alguma razão, venham a perder a sua



estabilidade. Para que não seja assim é imprescindível que o sistema seja mais rígido: menores afastamentos entre as pregagens/ancoragens, redes e cabos menos deformáveis, medidas construtivas apertadas de controlo da disposição e do estiramento das redes e dos cabos sobre as superfícies dos taludes, etc..

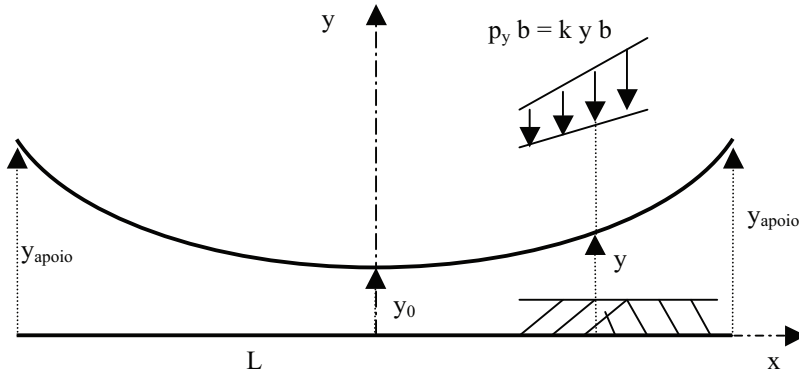
Em abono desta tese milita também o facto de a premissa de partida das hipóteses de funcionamento “ativo” ou “reativo”, a saber, o “encosto perfeito” das redes e dos cabos às superfícies dos taludes, ser nas obras reais praticamente impossível de alcançar. Desde logo porque o peso próprio das malhas e, sobretudo, dos cabos dificulta esse desiderato, mas principalmente por causa das praticamente inevitáveis imperfeições das superfícies dos taludes, por causa das concavidades e dos blocos salientes, por causa dos trechos côncavos, etc.. Quer isto dizer, que por maiores que sejam os cuidados na execução e acabamento dos taludes, o sistema em apreço tem que “vencer as folgas” antes de entrar em funcionamento, acabando por possuir uma rigidez global ainda menor do que a que lhe foi atribuída teoricamente, já de si pequena, como se viu.

## 6 – REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Castro Fresno, D.; Ballester Muñoz, F. (2001). *Las membranas flexibles como elemento de soporte para la estabilización de taludes y laderas*. Área Temática: Ingeniería Civil y Planeamiento Urbanístico, XVII Congreso Nacional de Ingeniería de Proyectos, Murcia.
- CEN TC288 (2009). *Execution of Special Geotechnical Works - Soil Nailing*. European Standard – Final Draft prEN 14490, Technical Committee 288 – Working Group 9.
- Farrand, S.; Teen, A. (2008). *Seismically induced landslide mitigation using flexible slope stabilisation systems*. 2008 Conference of the New Zealand Society for Earthquake Engineering.
- Flum, D.; Rüegger, R. (2002). *The dimensioning of flexible surface stabilization systems made from high-tensile wire meshes in combination with nailing and anchoring in soil and rock*. 3. Kolloquium “Bauen in Boden + Fels”.
- Kang, S.S.; Kim, H.Y.; Jang, B.A. (2012). *Correlation of in situ modulus of deformation with degree of weathering, RMR and Q-system*. Environmental Earth Sciences, Springer, November 2012.
- Santamaría Arias, J.; Alonso Berrio-Atehortúa, N.; León Buendía, C. (2005). *Cálculo de sostenimientos flexibles*. VI Simposio Nacional sobre Taludes y Laderas Inestables, Valencia.

## ANEXO A – MODO DE FUNCIONAMENTO “ATIVO”. DEDUÇÃO DAS EXPRESSÕES

Suponha-se um elemento estrutural sem rigidez à flexão, capaz de suportar apenas esforços de tração. Sejam  $L$  o seu comprimento inicial (retilíneo), que é igual à distância entre os apoios situados nas suas extremidades,  $b$  a sua largura,  $A$  a área da sua secção transversal e  $E$  o módulo de deformabilidade do material que o constitui. Admita-se que apoia de forma contínua sobre um material com comportamento elástico, transferindo-se entre ambos ações distribuídas,  $p_y$ , normais ao eixo (retilíneo) inicial e proporcionais ao deslocamento,  $p_y = k y$ , sendo  $k$  o módulo de reação, expresso em  $\text{kN/m}^3$ , e  $y$  o deslocamento normal ao eixo inicial (ver Fig. A.1).



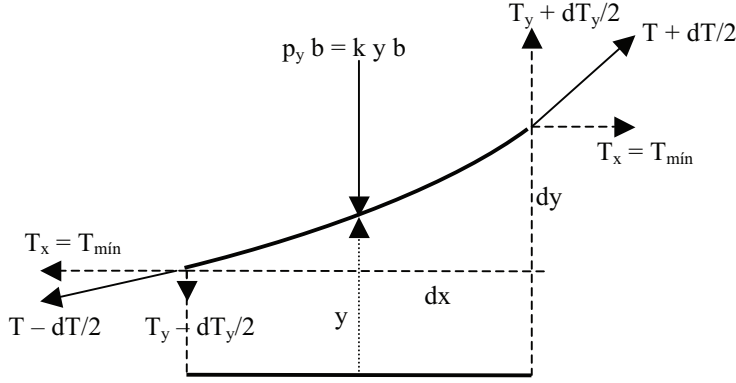
**Fig. A.1** – Modo de funcionamento “ativo” de um elemento estrutural sem rigidez à flexão.

Suponha-se, ainda, que os apoios localizados nos extremos do elemento estrutural são “empurrados” contra o material elástico de suporte, da forma mostrada na Fig. A.1, suscitando a mobilização das pressões  $p_y b = k y b$ , expressas em  $\text{kN/m}$ . Como se verá em seguida, tal implica que, devido à deformação causada pelas ações, o elemento estrutural em consideração adquira a forma de uma catenária, dependente dos parâmetros geométricos,  $L$ ,  $b$  e  $A$ , e mecânicos,  $E$  e  $k$ .

Considere-se o elemento infinitesimal representado na Fig. A.2. Sendo  $T$  a tração numa dada secção do elemento estrutural, então  $T_x$  e  $T_y$  representam as componentes nas direções  $x$  e  $y$ , respetivamente. Como a ação  $p_y$  atua apenas na direção  $y$ , a componente  $T_x = T_{\min}$  é constante em todas as secções e corresponde ao valor mínimo da tração (variável) a que o elemento está sujeito, ocorrendo esse valor nas secções verticais, cujas normais têm a direção  $x$ . Para garantir o equilíbrio é necessário que:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow T_y + dT_y/2 = T_y - dT_y/2 + p_y \cdot b \cdot dx \Rightarrow dT_y = k \cdot y \cdot b \cdot dx \quad (\text{A.1})$$

$$\sum M = 0 \Rightarrow T_y \cdot dx = T_x \cdot dy \Rightarrow T_y = T_{\min} \frac{dy}{dx} \quad (\text{A.2})$$



**Fig. A.2** – Elemento infinitesimal.

Derivando a equação (A.2) e atendendo à (A.1), obtém-se sucessivamente:

$$T_{\min} \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dT_y}{dx} \Rightarrow \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{k \cdot y \cdot b}{T_{\min}} \Rightarrow \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{1}{a^2} y = 0 \quad (\text{A.3})$$

sendo a constante  $a$  (unidimensional) definida do seguinte modo  $a^2 = T_{\min} / k b$ . Considerando o sistema de eixos representado na Figura A.1, que implica que  $y(0) = y_0$  e  $y'(0) = 0$ , a solução da equação diferencial (A.3) é a seguinte:

$$y = y_0 \cdot \cosh \frac{x}{a} \quad (\text{A.4})$$

Esta é a equação de uma catenária. Introduzindo (A.4), após derivação, em (A.2) obtém-se:

$$T_y = T_{\min} \cdot \frac{y_0}{a} \cdot \sinh \frac{x}{a} \quad (\text{A.5})$$

Como os deslocamentos contra o material elástico de apoio não são uniformes, também não o são as pressões mobilizadas (ver Figura A.1). Designe-se por  $p$  (em kPa) o valor médio da pressão mobilizada. Então, nas extremidades ( $x = L/2$ ), por razões de equilíbrio, a componente vertical da tração no elemento estrutural tem que ser igual a  $T_{y\text{-apoio}} = p b L / 2$ , donde se retira uma expressão para o cálculo de  $y_0$  (ver Figura A.1):

$$T_{y\text{-apoio}} = p \cdot b \cdot \frac{L}{2} = T_{\min} \cdot \frac{y_0}{a} \cdot \sinh \frac{L}{2a} \Rightarrow y_0 = \frac{p \cdot b \cdot L}{2 T_{\min} \cdot \sinh \frac{L}{2a}} \cdot a \quad (\text{A.6})$$

Considerando um elemento infinitesimal com comprimento inicial  $dx$ , por efeito das ações esse elemento vai experimentar um aumento de comprimento  $d(\Delta L)$ . O aumento total de comprimento do elemento estrutural pode ser avaliado por relações geométricas (ver Figura A.2):

$$dx + d(\Delta L) = \sqrt{dx^2 + dy^2} \Rightarrow L + \Delta L = \int_{-L/2}^{L/2} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \quad (\text{A.7})$$

Por outro lado, tendo presente que (atender a A.2):

$$T = \sqrt{T_{\min}^2 + T_y^2} \Rightarrow T = T_{\min} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \quad (\text{A.8})$$

e atendendo à lei de Hooke:

$$\sigma = E\varepsilon \Rightarrow \frac{T}{A} = E \frac{d(\Delta L)}{dx} \quad (\text{A.9})$$

substituindo (A.8) em (A.9), integrando e tendo presente (A.7) obtém-se uma expressão que permite calcular  $T_{\min}$ :

$$\begin{aligned} d(\Delta L) &= \frac{T_{\min}}{EA} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \Rightarrow \Delta L = \frac{T_{\min}}{EA} \int_{-L/2}^{L/2} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \Rightarrow \\ \Rightarrow \Delta L &= \frac{T_{\min}}{EA} (L + \Delta L) \Rightarrow T_{\min} = \frac{\Delta L}{L + \Delta L} EA \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Finalmente, retomando a expressão (A.7) e atendendo a (A.4), obtém-se uma expressão que permite determinar o aumento de comprimento do elemento estrutural traccionado,  $\Delta L$ , em função de  $L$ ,  $b$ ,  $A$ ,  $E$ ,  $k$  e  $p$ :

$$\Delta L = 2 \cdot \int_0^{L/2} \sqrt{1 + \left(\frac{y_0}{a} \cdot \sinh \frac{x}{a}\right)^2} dx - L \quad (\text{A.11})$$

Este integral pode ser resolvido numericamente e por tentativas (devido ao carácter implícito da expressão, visto que  $y_0$  e  $a$  dependem de  $T_{\min}$ , o qual é função de  $\Delta L$ ). Dividindo o semicomprimento  $L/2$  em  $n$  trechos iguais  $\Delta x = L/(2n)$ , o integral pode ser aproximado pelo seguinte somatório

$$\Delta L \approx 2 \cdot \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + \left(\frac{y_0}{a} \cdot \sinh \frac{(i-1/2) \cdot \Delta x}{a}\right)^2} \Delta x - L \quad (\text{A.12})$$

Dados  $L$ ,  $b$ ,  $A$ ,  $E$ ,  $k$  e  $p$ , a sequência de cálculo é então a seguinte:

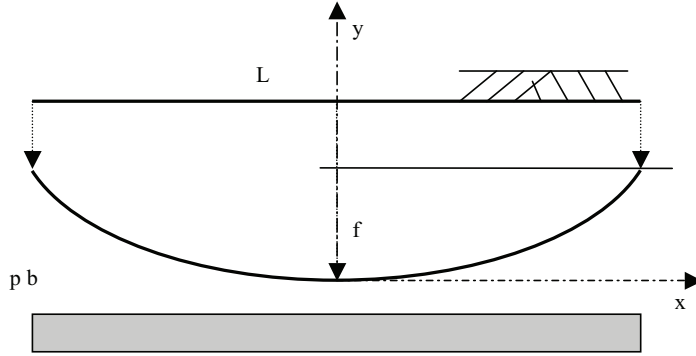
- 1) atribui-se um valor inicial a  $\Delta L$ ;
- 2) calcula-se  $T_{\min} = T_{\min}(\Delta L, L, A, E)$ , usando (A.10);
- 3) determina-se  $a = (T_{\min} / k b)^{1/2}$ ;
- 4) calcula-se  $y_0 = y_0(T_{\min}, a, L, b, p)$ , pela equação (A.6);
- 5) usa-se a expressão (A.12) para avaliar  $\Delta L$ ;
- 6) repete-se a sequência de cálculos até que o valor de  $\Delta L$  calculado no 5º passo coincida com o valor atribuído no 1º passo.

O valor máximo da tração ocorre nas secções extremas, onde  $T_{y-\text{apoio}} = p b L / 2$  alcança o valor máximo. Então, substituindo na equação (A.8), vem:

$$T_{\max} = \sqrt{T_{\min}^2 + (p \cdot b \cdot L / 2)^2} \quad (\text{A.13})$$

## ANEXO B – MODO DE FUNCIONAMENTO “REATIVO”. DEDUÇÃO DAS EXPRESSÕES

Suponha-se um dado elemento estrutural sem rigidez à flexão, capaz de suportar apenas esforços de tração. Sejam  $L$  o seu comprimento inicial (retilíneo), que é igual à distância entre os apoios situados nas suas extremidades,  $b$  a sua largura,  $A$  a área da sua secção transversal e  $E$  o módulo de deformabilidade do material que o constitui.



**Fig. B.1** – Modo de funcionamento “reativo” de um elemento estrutural sem rigidez à flexão.

Como se mostra na Figura B.1, admita-se que esse elemento estrutural vai ser sujeito a ações uniformemente distribuídas,  $p$ , normais ao seu eixo (retilíneo) inicial; como se verá em seguida, tal implica que ele, devido à deformação causada pelas ações, adquira uma forma parabólica. Em alternativa pode supor-se que as ações são sempre normais ao eixo (não retilíneo após a aplicação das cargas), ou seja, que o elemento estrutural adquire a forma de um troço de circunferência. Apesar de as duas soluções conduzirem a resultados muito semelhantes (ver, por exemplo, Santamaría Arias *et al.*, 2005), considera-se que a solução parabólica traduz melhor a realidade. Por isso, no que se segue estuda-se apenas este caso.

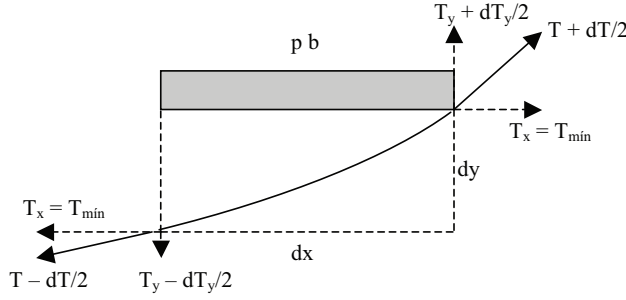
Considere-se o elemento infinitesimal representado na Figura B.2. De modo idêntico ao feito no Anexo A, sendo  $T$  a tração numa dada secção do elemento estrutural e  $T_x = T_{\min}$  e  $T_y$  as suas componentes nas direções  $x$  e  $y$ , respetivamente, por razões de equilíbrio pode escrever-se:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow T_y + dT_y/2 = T_y - dT_y/2 + p \cdot b \cdot dx \Rightarrow dT_y = p \cdot b \cdot dx \quad (B.1)$$

$$\sum M = 0 \Rightarrow T_y \cdot dx = T_x \cdot dy \Rightarrow T_y = T_{\min} \frac{dy}{dx} \quad (B.2)$$

Derivando a equação (B.2) e atendendo à (B.1), obtém-se sucessivamente:

$$T_{\min} \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dT_y}{dx} \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{p \cdot b}{T_{\min}} \Rightarrow y = \frac{p \cdot b}{2T_{\min}} x^2 + C_1 x + C_2 \Rightarrow y = \frac{p \cdot b}{2T_{\min}} x^2 \quad (B.3)$$



**Fig. B.2** – Elemento infinitesimal.

Esta é a equação de uma parábola. A última expressão resulta de se ter considerado a origem do sistema de eixos no ponto que, devido às ações, experimenta o maior deslocamento, como se mostra na Figura B.1, o que conduz a que  $y(0) = C_2 = 0$  e  $y'(0) = C_1 = 0$ . A flecha da parábola pode, então, ser calculada tomando  $x = L/2$ :

$$f = \frac{p \cdot b}{2T_{\min}} \left( \frac{L}{2} \right)^2 = \frac{p \cdot b \cdot L^2}{8T_{\min}} \quad (\text{B.4})$$

Considerando um elemento infinitesimal com comprimento inicial  $dx$ , por efeito das ações esse elemento vai experimentar um aumento de comprimento  $d(\Delta L)$ . O aumento total de comprimento do elemento estrutural pode ser calculado por relações geométricas (ver Figura B.2):

$$L + \Delta L = \int_{-L/2}^{L/2} \sqrt{1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2} dx \quad (\text{B.5})$$

Por relações mecânicas, atendendo à lei de Hooke, vem:

$$\sigma = E\varepsilon \Rightarrow \frac{T}{A} = E \frac{d(\Delta L)}{dx} \Rightarrow T_{\min} = \frac{\Delta L}{L + \Delta L} EA \quad (\text{B.6})$$

Tendo presente as expressões (B.3) e (B.6), tem-se que:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p \cdot b}{T_{\min}} x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \left( 1 + \frac{L}{\Delta L} \right) \frac{p \cdot b}{EA} x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \Psi(\Delta L) \cdot x \quad (\text{B.7})$$

Finalmente, introduzindo (B.7) em (B.5), obtém-se uma expressão implícita que permite determinar o aumento de comprimento do elemento estrutural traccionado,  $\Delta L$ , em função de  $L$ ,  $b$ ,  $A$ ,  $E$  e  $p$

$$\Delta L = 2 \int_0^{L/2} \sqrt{1 + (\Psi(\Delta L) \cdot x)^2} dx - L \quad (\text{B.8})$$

Este integral tem solução exata. Efetivamente,

$$\Delta L = \left( \Gamma(\Delta L) \cdot \sqrt{1 + (\Gamma(\Delta L))^2} + \ln \left( \Gamma(\Delta L) + \sqrt{1 + (\Gamma(\Delta L))^2} \right) \right) / \Psi(\Delta L) - L \quad (\text{B.9})$$



sendo

$$\Gamma(\Delta L) = \Psi(\Delta L) \cdot \frac{L}{2} \quad (\text{B.10})$$

Esta equação tem que ser resolvida por tentativas, devido ao seu carácter implícito. Como se viu no Anexo A, o valor máximo da tração ocorre nas secções extremas, sendo igual a:

$$T_{\text{máx}} = \sqrt{T_{\text{mín}}^2 + (p \cdot b \cdot L/2)^2} \quad (\text{B.11})$$