

ESTUDO NUMÉRICO DE PROBLEMAS DE ESTABILIDADE AXISSIMÉTRICOS EM GEOTECNIA VIA ANÁLISE LIMITE

Numerical study of axisymmetric stability problems in geotechnical engineering by limit analysis

Wagner Nahas Ribeiro*

Luiz Gonzaga de Araújo**

Christianne de Lyra Nogueira***

RESUMO – Este artigo apresenta uma formulação numérica mista de análise limite, baseada no método dos elementos finitos (MEF), para problemas de estabilidade axissimétricos em geotecnia. O problema de programação matemática resultante é tratado por métodos não lineares. O solo pode ser modelado como meio contínuo ou reforçado. Para discretização do contínuo são empregados elementos quadriláteros de 4 nós. As interfaces (solo-estrutura e solo-reforço) podem ser modeladas através de elementos de interface sem espessura de 4 nós. O reforço pode ser discretizado através de elementos especiais, sem espessura, de 2 nós. O solo e as interfaces são idealizados como materiais rígido-plásticos perfeitos, na hipótese de validade da teoria plasticidade associada. Para o solo é empregado o critério de escoamento de Mohr-Coulomb e a condição de escoamento das interfaces é descrita pelo critério de Coulomb. Os exemplos estudados pela implementação numérica realizada (fundação superficial em solo homogêneo ou reforçado, escavação circular e estaca sujeita à tração) mostram um desempenho adequado da metodologia apresentada no trabalho para a solução de problemas axissimétricos de Engenharia Geotécnica.

SYNOPSIS – This work presents a mixed formulation for limit analysis using the finite element method (FEM) to solve stability problems in geotechnical engineering under axisymmetric conditions, where the obtained mathematical programming problem is treated by non linear methods. The soil can be modeled as continuous or reinforced medium. The continuum is discretized using 4-node quadrilateral elements. The interfaces (soil-structure and soil-reinforcement) can be modeled using 4-node zero-thickness elements. The reinforcement can be discretized through special 2-node elements, without thickness. The soil and the interfaces are idealized as perfect rigid-plastic materials and the associated rule of plasticity is obeyed. For the soil description, the Mohr-Coulomb yield criterion is used. The yield condition for the interfaces is described by the Coulomb criterion. The examples studied by the numerical implementation (shallow footing in homogeneous or reinforced soil, circular excavation and pile under traction) reveal a relevant performance of the methodology presented in this paper for the solution of geotechnical problems under axisymmetric conditions.

1 – INTRODUÇÃO

Problemas de estabilidade em geotecnia são aqueles que tratam da ruptura de massas de solo, solos reforçados ou maciços rochosos.

* Aluno do Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil Escola de Minas/UFOP – Ouro Preto.
E-mail: nahas@rdc.puc-rio.br

** D.Sc. Professor do Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil - Escola de Minas/UFOP – Ouro Preto. E-mail: luiz@em.ufop.br

*** D.Sc. Professora do Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil - Escola de Minas/UFOP – Ouro Preto. E-mail: chris@em.ufop.br

Na prática da engenharia civil, a solução destes problemas é mais comumente obtida através do método do equilíbrio limite (ver, por ex., Terzaghi, 1943; Taylor, 1948; Bowles, 1982). A solução destes problemas pode também ser obtida pela análise limite com base nos Teoremas Limites da plasticidade (Drucker et al., 1952). A demonstração destes teoremas é fundamentada nas seguintes hipóteses: material elastoplástico ideal com lei de fluxo associada, convexidade da superfície de escoamento e validade da teoria das pequenas deformações.

Finn (1967) e Chen (1975) empregam os Teoremas Limites (superior e inferior) para a solução de um grande número de problemas geotécnicos.

Em vários trabalhos, os problemas de estabilidade em geotecnia são formulados pelo método dos elementos finitos, obtendo-se um problema de programação matemática não linear (Casciaro e Cascini, 1982; Tamura et al., 1987; Borges, 1991; Singh e Basudhar, 1993; Jiang, 1995 e Fáfán, 2000).

O emprego do método dos elementos finitos para a solução de problemas de estabilidade confere ao método da análise limite um potencial de aplicação a problemas com considerável complexidade (geometria e carregamento), apresentando perspectiva de solução de problemas tridimensionais (Pachás, 2004).

A literatura técnica apresenta três classes de formulação numérica pelo método dos elementos finitos para problemas de estabilidade geotécnicos:

- a) formulação de equilíbrio;
- b) formulação cinemática;
- c) formulação mista.

Na formulação de equilíbrio, o sistema discreto deve satisfazer às condições do teorema do limite inferior (equilíbrio, admissibilidade das tensões e condição de contorno em tensões). Uma característica fundamental destas formulações é que somente as tensões são interpoladas no domínio do elemento. Exemplos de aplicação desta metodologia a problemas planos de deformação são os trabalhos de Lysmer (1970) e Sloan (1987-a).

Na formulação cinemática, o sistema discreto deve satisfazer às condições do teorema do limite superior (compatibilidade das deformações, condição de escoamento do material, condição de contorno em deslocamentos). Uma característica fundamental destas formulações é que somente as velocidades são interpoladas no domínio do elemento finito. Os trabalhos de Sloan (1987-b) e Jiang (1995) podem ser citados como exemplos de aplicação deste procedimento a problemas planos de deformação.

Na formulação mista, o sistema discreto satisfaz de forma aproximada à condição de equilíbrio e às condições de compatibilidade e obedece exatamente à condição de escoamento do material. Nestas formulações, os campos de velocidade e de tensão são interpolados no domínio do elemento. A solução numérica obtida, em geral, perde as características de limites fornecidos pelas formulações anteriores.

O formato geral do problema está indicado na seção 5, onde se observa que na formulação mista a equação de equilíbrio é linear e a não linearidade do problema é devida ao critério de escoamento do material.

Para a condição de deformação plana, vários autores fazem uma aproximação linear da condição de escoamento do solo para a obtenção de um problema de programação linear (PL). Os trabalhos de Lysmer (1970), Christiansen (1981), Sloan (1987-a, 1987-b), Faria (1992) e Sousa (2001) são exemplos de aplicação desta metodologia.

A formulação mista de análise limite tem sido empregada por vários autores. Os trabalhos de Christiansen (1981), Casciari e Cascini (1982), Faria (1992), Araújo (1997), Lemos (2002), Vargas Jr. et al. (2004) e Pachás (2004) são exemplos de sua aplicação.

Vargas Jr. et al. (2004) apresentam formulação mista para problemas de estabilidade geotécnicos para solos, solos reforçados e maciços fraturados na condição de deformação plana.

O presente trabalho apresenta uma formulação mista de análise limite pelo método dos elementos finitos (MEF) para problemas de estabilidade em meios contínuos ou reforçados, em condição axissimétrica, empregando técnicas de otimização não lineares.

Na formulação a ser apresentada nas próximas seções, o contínuo é discretizado através de elementos quadrilaterais de 4 nós, bilineares em velocidade e tensão constante. As interfaces (solo-reforço, solo-estrutura) são modeladas por meio de elementos de interface (junta) de 4 nós, sem espessura, lineares em velocidade e tensão constante. O reforço é modelado através de elementos especiais de 2 nós, sem espessura, lineares em velocidade e tensão constante.

A condição de escoamento do solo é descrita pelo critério de Mohr-Coulomb e para as interfaces é empregado o critério de Coulomb.

O problema de programação matemática não linear (PNL) obtido pela formulação é resolvido pelo otimizador LINGO (Lindo Systems, 2001).

No final do trabalho, a metodologia proposta é aplicada a problemas de fundação superficial em solo homogêneo ou reforçado, escavação circular e estaca sujeita à tração.

2 – FORMULAÇÃO PARA MEIOS CONTÍNUOS

A Fig. 1 apresenta um elemento de solo na condição axissimétrica e as componentes de tensão σ_r , σ_z , σ_θ e τ_{rz} atuantes neste elemento. Nesta situação as componentes de tensão $\sigma_{r\theta}$ e $\sigma_{z\theta}$ são nulas. Logo o estado de tensão pode ser representado pelo vetor

$$\sigma^T = [\sigma_r \quad \sigma_z \quad \tau_{rz} \quad \sigma_\theta].$$

O estado de deformação associado a este estado de tensão é definido pelo vetor de deformação e tal que:

$$\varepsilon^T = [\varepsilon_r \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{rz} \quad \varepsilon_\theta], \text{ considerando-se } \gamma_{z\theta} = \gamma_{r\theta} = 0.$$

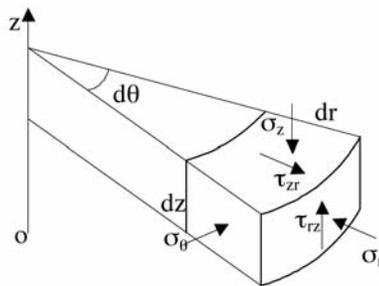


Fig. 1 – Elemento de solo na condição axissimétrica.

Para a discretização do meio contínuo são utilizados elementos quadrilaterais bidimensionais de 4 nós com a interpolação do campo de velocidades bilinear e do campo de tensões constante no interior do elemento, elemento Q_4^c . A Fig. 2 mostra um arranjo de elementos quadrilaterais de 4 nós para o caso de tensão constante.

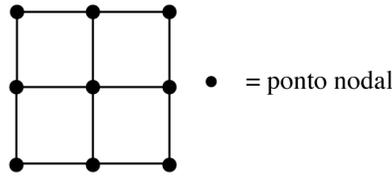


Fig. 2 – Representação esquemática de um arranjo de elementos Q_4^c .

2.1 – Equilíbrio do elemento finito

O equilíbrio de um elemento finito pode ser representado pela equação a seguir (Araújo, 1997):

$$\int_V \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} dV = \mathbf{f}_e ; \quad (1)$$

em que \mathbf{f}_e é o vetor de carregamento nodal equivalente do elemento.

A matriz \mathbf{B} que relaciona as deformações com deslocamentos é dada por:

$$\mathbf{B} = \nabla \mathbf{H}_u$$

em que:

$$\nabla = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{1}{r} & 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

é o operador diferencial para o caso axissimétrico e

$$\mathbf{H}_u = [\mathbf{N}_1 \mathbf{I} \mid \mathbf{N}_2 \mathbf{I} \mid \mathbf{N}_3 \mathbf{I} \mid \mathbf{N}_4 \mathbf{I}]$$

é a matriz que contém as funções N_k ($k=1, \dots, 4$) de interpolação do deslocamento (ver, p. ex., Cook, 1989).

Para o caso do elemento de tensão constante, $\boldsymbol{\sigma} = \hat{\boldsymbol{\sigma}}$ a equação (1) fornece a seguinte equação de equilíbrio:

$$\mathbf{C}_e^T \hat{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{f}_e ; \quad (3)$$

em que:

$$\mathbf{C}_e^T = \int_V \mathbf{B}^T dV$$

é a matriz de equilíbrio do elemento e

$$\hat{\sigma}^T = [\sigma_r \quad \sigma_z \quad \sigma_{rz} \quad \sigma_\theta]$$

é o vetor das componentes de tensão do elemento.

A obtenção da matriz de equilíbrio do elemento, C_e^T , pode ser feita pelo método de integração numérica de Gauss (ver, p. ex., Bathe, 1982), em que $dV=2\pi r dr dz$.

2.2 – Condição de admissibilidade das tensões

O critério de escoamento de Mohr-Coulomb pode ser colocado, em termos das tensões principais, sob a forma:

$$(\sigma_1 - \sigma_3) = (\sigma_1 + \sigma_3) \text{sen}(\varphi) + 2c \text{cos}(\varphi). \quad (4)$$

O critério de Mohr-Coulomb envolve somente as tensões principais extremas σ_1 e σ_3 , não considerando a tensão intermediária σ_2 .

σ_1 , σ_2 e σ_3 são as tensões principais organizadas em ordem decrescente e c e φ são, respectivamente, a coesão e o ângulo de atrito do solo.

A relação (4) pode ser colocada sob a forma:

$$\sigma_1 = \sigma_3 m + cn; \quad (5)$$

em que:

$$m = \frac{1 + \text{sen}(\varphi)}{1 - \text{sen}(\varphi)} \quad e \quad n = 2 \frac{\text{cos}(\varphi)}{1 - \text{sen}(\varphi)}. \quad (6)$$

Em problemas axissimétricos, a tensão circunferencial σ_θ é uma tensão principal. Portanto, as outras duas tensões principais podem ser definidas pelas expressões abaixo:

$$\sigma_a = \frac{(\sigma_r + \sigma_z)}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_r - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{rz}^2}, \quad (7)$$

$$\sigma_b = \frac{(\sigma_r + \sigma_z)}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_r - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{rz}^2}. \quad (8)$$

Portanto, as tensões principais são σ_a , σ_b e $\sigma_c = \sigma_\theta$.

Assim, as tensões principais devem satisfazer às seguintes hipóteses:

1) Hipótese 1

$$\sigma_a \leq \sigma_c \leq \sigma_b \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \sigma_3 = \sigma_a \\ \sigma_2 = \sigma_c \\ \sigma_1 = \sigma_b \end{cases}$$

2) Hipótese 2

$$\sigma_a \leq \sigma_b \leq \sigma_c \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \sigma_3 = \sigma_a \\ \sigma_2 = \sigma_b \\ \sigma_1 = \sigma_c \end{cases}$$

3) Hipótese 3

$$\sigma_c \leq \sigma_a \leq \sigma_b \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \sigma_3 = \sigma_c \\ \sigma_2 = \sigma_a \\ \sigma_1 = \sigma_b \end{cases}$$

Empregando-se as tensões principais σ_1 e σ_3 definidas nas hipóteses 1, 2 e 3 e a relação (5), obtém-se a condição de admissibilidade das tensões definida pelas relações:

$$\frac{(\sigma_r + \sigma_z)}{2}(1-m) + \sqrt{\left(\frac{\sigma_r - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{rz}^2}(1+m) - cn \leq 0; \quad (9)$$

$$\sigma_\theta - \left(\frac{(\sigma_r + \sigma_z)}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_r - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{rz}^2} \right) m - cn \leq 0; \quad (10)$$

$$\left(\frac{(\sigma_r + \sigma_z) + \sqrt{(\sigma_r - \sigma_z)^2 + 4\tau_{rz}^2}}{2} \right) - \sigma_\theta m - cn \leq 0. \quad (11)$$

Para o caso particular de material de Tresca, $\varphi = 0^\circ$, a relação (6) fornece $m = 1$ e $n = 2$. Substituindo-se estes valores nas relações (9), (10) e (11), estas relações se tornam as mesmas apresentadas por Turgeman e Pastor (1982).

3 – FORMULAÇÃO PARA O ELEMENTO DE REFORÇO

A Fig. 3 apresenta esquematicamente um elemento de reforço e as tensões atuantes.

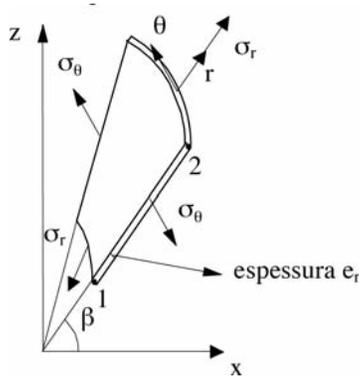


Fig. 3 – Elemento de reforço.

3.1 – Equilíbrio do elemento de reforço

A Fig. 4 ilustra a intersecção do elemento de reforço de comprimento L_r com o plano vertical. O ângulo formado entre este elemento e o plano horizontal é definido como β .

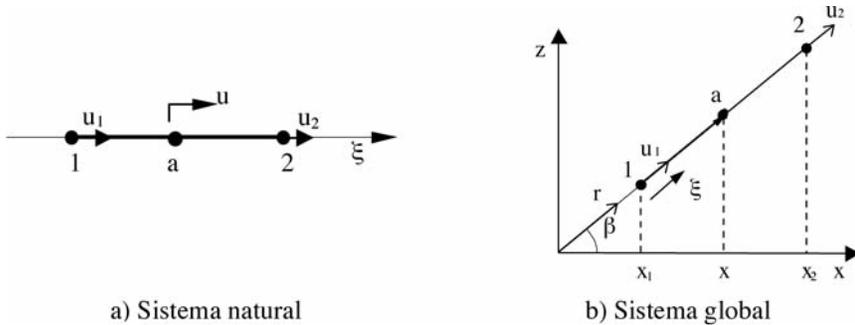


Fig. 4 – Representação esquemática do elemento de reforço.

O campo de velocidade u no sistema local de coordenadas do elemento pode ser expresso por

$$u = \mathbf{H}_u \hat{u}; \quad (12)$$

em que:

$$\hat{u}^T = [u_1 \quad u_2]$$

é o vetor das velocidades nodais e

$$\mathbf{H}_u = [h_1 \quad h_2]$$

é matriz das funções de interpolação dos deslocamentos do elemento de reforço definidas no sistema de coordenada natural $\xi \in [0,1]$ onde $h_1 = 1-\xi$ e $h_2 = \xi$.

O vetor das forças internas, f_{in} , do elemento de reforço é definido pela expressão abaixo:

$$\mathbf{f}_{in} = \int_v \mathbf{B}^T t dV. \quad (13)$$

A matriz \mathbf{B} que relaciona velocidade e taxa de deformação pode ser colocada na seguinte forma:

$$\mathbf{B} = \nabla \mathbf{H}_u;$$

em que:

$$\nabla = \begin{bmatrix} \frac{d}{dr} \\ \frac{1}{r} \end{bmatrix} \quad (14)$$

é o operador diferencial para o caso do reforço axissimétrico, e

$$t^T = [\sigma_r \quad \sigma_\theta]$$

é o vetor das componentes de tensão no elemento de reforço.

Assim, a matriz \mathbf{B} pode ser expressa por:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L_r} & \frac{1}{L_r} \\ \frac{h_1}{r} & \frac{h_2}{r} \end{bmatrix}.$$

De acordo com a Fig. 4, tem-se que $x = r \cos(\beta)$, que substituído na relação acima fornece a equação:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L_r} & \frac{1}{L_r} \\ \frac{h_1 \cos(\beta)}{x} & \frac{h_2 \cos(\beta)}{x} \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Na expressão (13), dV representa o volume elementar gerado pela revolução de um de arco elementar do reforço de espessura e_r em torno do eixo oz , que pode ser dado pela expressão $dV = 2\pi x e_r L_r d\xi$.

Para elemento de tensão constante, $\hat{\mathbf{t}} = \mathbf{t}$, a equação (13) permite escrever a relação abaixo:

$$\mathbf{f}_{in} = \mathbf{C}_R^T \hat{\mathbf{T}}; \quad (16)$$

em que:

$$\mathbf{C}_R^T = \int_V \mathbf{B}^T dV = \int_0^l \mathbf{B}^T 2\pi e_r L_r x d\xi \quad (17)$$

é a matriz de equilíbrio do elemento de reforço no sistema local de coordenadas e

$$\hat{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} = e_r \begin{bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \end{bmatrix}$$

é o vetor das forças internas atuantes no elemento de reforço que corresponde ao produto da espessura do reforço e_r pelas componentes de tensão no reforço σ_r e σ_θ .

Efetuada-se a integral indicada na relação (17), obtém-se a seguinte matriz:

$$\mathbf{C}_R^T = \pi e_r \begin{bmatrix} -(x_1 + x_2) & L_r \cos(\beta) \\ (x_1 + x_2) & L_r \cos(\beta) \end{bmatrix}. \quad (18)$$

Para obter a matriz do elemento de reforço no sistema global de coordenadas é feita a transformação do sistema de coordenadas através da matriz \mathbf{R} apresentada abaixo (Cook, 1989):

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos\beta & \sin\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\beta & \sin\beta \end{bmatrix}. \quad (19)$$

Assim, a matriz \mathbf{C}_{Rgl}^T , em coordenadas globais, pode ser expressa por:

$$\mathbf{C}_{Rgl}^T = \mathbf{R}^T \mathbf{C}_R^T. \quad (20)$$

3.2 – Condição de admissibilidade das tensões no reforço

Neste trabalho considerou-se que não há escoamento do reforço. Portanto, não são aplicadas restrições às tensões no reforço no problema final de programação matemática.

4 – FORMULAÇÃO PARA ELEMENTOS DE INTERFACE

Uma formulação para elemento de interface é apresentada a seguir para o caso de problemas axissimétricos. É utilizado o elemento de tensão constante e linear em velocidades.

4.1 – Equilíbrio do elemento de interface

A Fig. 5 ilustra um elemento de interface de comprimento L_i , com 4 pontos nodais, e sem espessura.

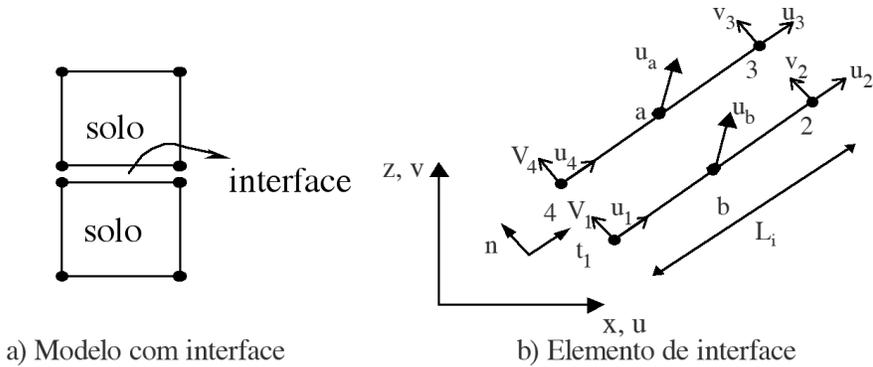


Fig. 5 – Modelo de interface e seu sistema de coordenadas.

A deformação da interface no sistema de referência local da interface pode ser definida por:

$$\epsilon_j = \mathbf{u}_a - \mathbf{u}_b. \quad (21)$$

Interpolando-se as velocidades nos pontos a e b, de mesmas coordenadas, obtêm-se as seguintes equações:

$$\mathbf{u}_a = h_3 \mathbf{u}_3 + h_4 \mathbf{u}_4; \quad (22)$$

$$\mathbf{u}_b = h_1 \mathbf{u}_1 + h_2 \mathbf{u}_2; \quad (23)$$

em que:

$$\mathbf{u}_a^T = [u_a \quad v_a]$$

é a velocidade no ponto a;

$$\mathbf{u}_b^T = [u_b \quad v_b]$$

é a velocidade no ponto b;

$$\mathbf{u}_k^T = [u_k \quad v_k]$$

é a velocidade no ponto nodal k ($k = 1, \dots, 4$) e h_1 e h_2 são as mesmas funções de interpolação utilizadas para o elemento de reforço.

A substituição das velocidades nos pontos a e b, equações (22) e (23), na equação (21), fornece a deformação da interface, na forma abaixo:

$$\varepsilon_j = \mathbf{B}_j \hat{\mathbf{u}}_j; \quad (24)$$

em que:

$$\mathbf{B}_j = [-h_1 \mathbf{I} \quad | \quad -h_2 \mathbf{I} \quad | \quad h_2 \mathbf{I} \quad | \quad h_1 \mathbf{I}];$$

\mathbf{I} é a matriz identidade (2x2) e

$$\hat{\mathbf{u}}_j^T = [u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad u_3 \quad v_3 \quad u_4 \quad v_4]$$

é o vetor das velocidades nos pontos nodais do elemento da interface.

O vetor das forças internas, \mathbf{f}_{in} , do elemento de interface pode ser expresso pela equação abaixo:

$$\mathbf{f}_{in} = \int_S \mathbf{B}_j^T \boldsymbol{\sigma}_j dS; \quad (25)$$

em que:

$$\boldsymbol{\sigma}_j^T = [\tau \quad \sigma_f]$$

é o vetor das tensões de cisalhamento e normal atuantes na interface.

Na expressão (25), dS representa a área elementar gerada pela revolução de um elemento de arco da interface em torno do eixo oz , cuja expressão pode ser dada por $dS=2\pi L_i d\xi$.

Para o elemento de interface de tensão constante, $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_j = \boldsymbol{\sigma}_j$, segundo a equação (25), vale a seguinte expressão:

$$\mathbf{f}_{in} = \mathbf{C}_j^T \hat{\boldsymbol{\sigma}}_j. \quad (26)$$

A matriz de equilíbrio, \mathbf{C}_j^T , é integrada analiticamente no sistema natural de coordenadas $\xi \in [0,1]$ para $dS=2\pi L_i d\xi$. Desta forma, obtém-se a expressão abaixo:

$$\mathbf{C}_j^T = \int_s \mathbf{B}_j^T dS = \frac{\pi L_i}{3} \begin{bmatrix} -(2x_1 + x_2)\mathbf{I} \\ -(x_1 + 2x_2)\mathbf{I} \\ (x_1 + 2x_2)\mathbf{I} \\ (2x_1 + x_2)\mathbf{I} \end{bmatrix}. \quad (27)$$

No sistema global a matriz \mathbf{C}_{glj}^T pode ser colocada na forma:

$$\mathbf{C}_{glj}^T = \frac{\pi L_i}{3} \begin{bmatrix} -(2x_1 + x_2)\mathbf{M}^T \\ -(x_1 + 2x_2)\mathbf{M}^T \\ (x_1 + 2x_2)\mathbf{M}^T \\ (2x_1 + x_2)\mathbf{M}^T \end{bmatrix}; \quad (28)$$

em que:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \cos\beta & \text{sen}\beta \\ -\text{sen}\beta & \cos\beta \end{bmatrix}$$

é a matriz de transformação do sistema de coordenadas.

4.2 – Condição de admissibilidade das tensões na interface

O critério de escoamento de Coulomb é usado para modelar a condição de escoamento da interface e pode ser escrito sob a forma:

$$\tau \leq c_j - \sigma_N \text{tg}\varphi_j; \quad (29)$$

$$-\tau \leq c_j - \sigma_N \text{tg}\varphi_j; \quad (30)$$

em que c_j é a coesão da interface solo-reforço e φ_j é o ângulo de atrito da interface (solo-reforço ou solo-estrutura).

As relações (29) e (30) definem uma região viável para as tensões no elemento de interface (Lemos, 2002), que podem ser colocadas na forma matricial abaixo:

$$\mathbf{Q}_j \hat{\boldsymbol{\sigma}}_j \leq \mathbf{R}_j \quad (31)$$

em que:

$$\mathbf{Q}_j = \begin{bmatrix} 1 & \text{tg}\varphi_j \\ -1 & \text{tg}\varphi_j \end{bmatrix}$$

é a matriz das restrições de escoamento num elemento de interface;

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_j^T = [\tau \quad \sigma_N]$$

é o vetor das tensões constantes no interior do elemento de interface;

$$\mathbf{R}_j^T = [c_j \quad c_j]$$

é o vetor dos termos independentes das restrições de escoamento num elemento de interface.

5 – MONTAGEM DO PROBLEMA DE PNL FINAL

A montagem da matriz de equilíbrio do solo, equação (3), da matriz de equilíbrio do reforço, equação (17), e da matriz de equilíbrio da interface, equação (27), para todos os elementos de solo, reforço e interface, conduz à equação de equilíbrio global, na forma abaixo:

$$\mathbf{C}^T \mathbf{X} = \mathbf{f};$$

em que:

$$\mathbf{C}^T = \left[\left[\mathbf{C}_s \right]^T \mid \left[\mathbf{C}_j \right]^T \mid \left[\mathbf{C}_r \right]^T \right]$$

é a matriz global de equilíbrio resultante da contribuição dos elementos de solo, interface e reforço;

$$\mathbf{X}^T = \left[\boldsymbol{\sigma}_1^T \mid \boldsymbol{\sigma}_2^T \mid \dots \mid \boldsymbol{\sigma}_{ne}^T \mid (\boldsymbol{\sigma}_j^i)^T \mid \dots \mid (\boldsymbol{\sigma}_{nj}^j)^T \mid \mathbf{T}_1^T \quad \dots \quad \mathbf{T}_{nr}^T \right]$$

é o vetor das componentes de tensão em todos os elementos de solo, interface e reforço, ne é o número de elementos quadrilaterais, nj é o número de elementos de interface e nr é o número de elementos de reforço.

Na equação global do equilíbrio, o vetor \mathbf{f} representativo do carregamento nodal equivalente global pode ser escrito na forma abaixo:

$$\mathbf{f} = \lambda \mathbf{f}_0 + \mathbf{f}_p$$

O vetor \mathbf{f}_p representa o carregamento nodal equivalente associado às cargas permanentes que não são ampliadas pelo fator escalar λ (chamadas de cargas mortas por Borges, 1991).

O vetor $\lambda \mathbf{f}_0$ representa o carregamento nodal equivalente associado às cargas variáveis (chamadas de cargas vivas por Borges, 1991), que são cargas de referência iniciais ampliadas pelo fator escalar λ (ver exemplo da seção 7.1).

A montagem dos vetores \mathbf{f}_p e \mathbf{f}_0 segue a sistemática padrão do MEF.

Da imposição da condição de admissibilidade das tensões no solo, relações (9), (10) e (11), a todos elementos da malha, obtêm-se o conjunto de restrições não lineares abaixo:

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) \leq \mathbf{0}$$

Da imposição da condição de admissibilidade das tensões em todos elementos de interface, relação (31), obtêm-se um conjunto de restrições lineares da forma:

$$\mathbf{Q}^T \mathbf{X} \leq \mathbf{R}$$

A formulação conduz a um problema de PNL, que pode ser colocado sob a forma:

Max λ

sujeito a

$$\mathbf{C}^T \mathbf{X} = \lambda \mathbf{f}_0 + \mathbf{f}_p \quad (\text{restrições de equilíbrio, linear})$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) \leq \mathbf{0} \quad (\text{restrições de escoamento do solo, não linear})$$

$$\mathbf{Q}^T \mathbf{X} \leq \mathbf{R} \quad (\text{restrições de escoamento das interfaces, linear})$$

O valor de λ que resolve o problema acima é denominado fator de colapso.

Neste trabalho, para solução do problema de programação matemática acima, é utilizado o otimizador LINGO (Lindo Systems, 2001), para problemas não lineares.

6 – IMPLEMENTAÇÃO REALIZADA

O pré-processamento é realizado através do programa Mtool (Tecgraf/PUC-RIO), onde a geometria, as propriedades dos materiais e os carregamentos são modelados e o resultado da modelagem é armazenado em arquivo neutro de extensão .nf. Com o auxílio de um editor de textos, informações dos elementos de reforço e interface, entre outras, são inseridas no arquivo neutro.

A geração do problema de PNL é feita pelo programa ANALIM, elaborado em linguagem de programação Fortran, tendo como entrada o arquivo criado anteriormente. O ANALIM gera o modelo de PNL em arquivo a ser lido pelo otimizador LINGO.

7 – PROBLEMAS ESTUDADOS

7.1 – Fundação superficial e circular

Neste item é estudado um exemplo de determinação da capacidade de carga de uma fundação superficial, circular e lisa de diâmetro B sobre uma camada de solo homogêneo.

Para uma fundação superficial, a capacidade de carga pode ser calculada pela fórmula geral de Terzaghi (1943), corrigida pelos fatores de forma para sapata circular, conforme equação abaixo:

$$q_u = s_c c N_c + s_\gamma \gamma \frac{1}{2} B N_\gamma + s_q \gamma D N_q \quad (32)$$

em que q_u é a carga de colapso ou capacidade de carga; c é a coesão do solo; φ é o ângulo de atrito do solo; γ é o peso específico do solo; D é o embutimento da fundação; N_c , N_γ e N_q são os fatores de capacidade de carga de Terzaghi, função apenas do ângulo de atrito do solo (φ); s_c , s_γ e s_q são fatores de forma de Terzaghi para sapata circular e valem, respectivamente, 1.3, 0.6 e 1.0.

Para o caso em que $\gamma = 0$ e fundação não embutida, a relação (32) pode ser posta sob a forma:

$$q_u = s_c c N_c. \quad (33)$$

Aplicando-se uma carga de referência unitária ($q_0 = 1$), tem-se a expressão seguinte:

$$q_u = \lambda q_0 \quad (33)$$

em que λ é o fator de colapso.

A Fig. 6 apresenta o esquema do problema e a malha utilizada (largura $5B$ e altura $5B$), levando-se em consideração a simetria do problema. As propriedades do solo são $c = 1$, φ variável e γ variável.

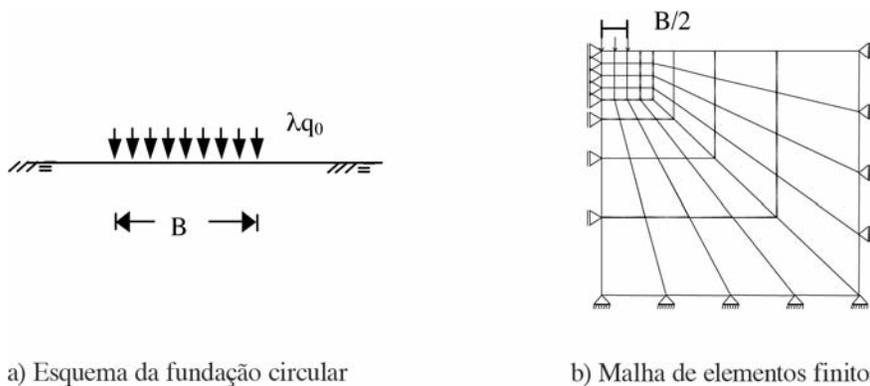


Fig. 6 – Capacidade carga de uma fundação superficial.

A Tabela 1 apresenta valores da capacidade de carga (q_u) em função de φ , para fundação em solo sem peso ($\gamma = 0$) e para o caso de $\gamma = 1$. São apresentados também os valores de Terzaghi, relação (32), e os valores obtidos por Chen (1975) usando o método das linhas de deslizamento.

Os valores da Tabela 1 indicam uma diferença apreciável entre os resultados numéricos e os de Terzaghi, para ângulos de atrito mais altos. Isto sugere que a fórmula empírica de Terzaghi fornece valores conservadores para a carga de colapso da fundação em questão.

Ainda desta tabela, pode-se observar, para ângulos de atrito mais elevados, uma boa concordância entre os valores obtidos pela metodologia proposta neste trabalho (PNL) e os apresentados por Chen.

Tabela 1 – Capacidade de carga de uma fundação circular (q_u)

φ (°)	$\gamma = 0$ (solo sem peso)			$\gamma = 1$		
	PNL	Terzaghi	Chen	PNL	Terzaghi	Chen
0	6,47	6,68	5,69	6,41	6,68	5,69
10	11,91	10,86	9,98	13,03	11,56	10,4
20	24,87	19,29	20,1	27,72	22,29	22,4
30	52,76	39,18	49,3	61,64	51,00	60,6

Os valores da tabela 1 indicam uma diferença apreciável entre os resultados numéricos e os de Terzaghi, para ângulos de atrito mais altos. Isto sugere que a fórmula empírica de Terzaghi fornece valores conservadores para a carga de colapso da fundação em questão.

Ainda desta tabela, pode-se observar, para ângulos de atrito mais elevados, uma boa concordância entre os valores obtidos pela metodologia proposta neste trabalho (PNL) e os apresentados por Chen.

7.2 – Escavação Circular

Este exemplo, estudado por Turgeman e Pastor (1982), empregando-se uma formulação de limite superior, trata da determinação do número de estabilidade de uma escavação circular de raio $R = 1$ e altura $H = 1$, em solo puramente coesivo, $c = 1$. O esquema do problema é apresentado na Fig. 7, juntamente com a malha empregada na análise (largura da base $2H+R$ e altura $1,5H$).

Para o caso da determinação do número de estabilidade para um talude, a função objetivo passa a ser o peso específico do solo, como descrito abaixo.

O número de estabilidade pode ser colocado sob a forma (ver, p. ex., Araújo, 1997):

$$N_s = \frac{H_c \gamma}{c};$$

em que γ é o peso específico do solo e H_c é a altura crítica do talude.

Se, numericamente, for adotado $H_c = c$, resulta $N_s = \gamma$.

Assim o valor ótimo da função objetivo γ iguala-se ao número N_s .

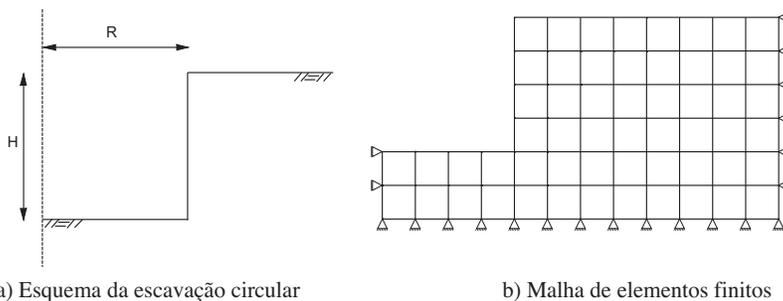


Fig. 7 – Escavação circular.

A solução numérica de Turgeman e Pastor fornece $N_s = 5,55$, para material de Tresca ($\varphi = 0^\circ$).

A análise numérica forneceu um valor de N_s igual à 5,49, que é cerca de 1% inferior ao valor encontrado por Turgeman e Pastor, constatando-se que há uma boa aproximação do fator N_s pela implementação realizada neste trabalho.

O estudo foi repetido para uma malha mais refinada com 224 elementos, obtida pelo dobro do número de divisões nas direções vertical e horizontal da malha anterior. O resultado encontrado foi $N_s = 5,29$, o que mostra que a malha da Fig. 7 está, do ponto de vista prático, adequada ao estudo do problema.

Uma análise deste problema para diferentes valores de R/H é apresentada na tabela 2. Esta análise foi realizada mantendo-se $H=1$ e acrescentando-se elementos à base da escavação da malha apresentada na Fig. 6b, de modo a ter as relações da Tabela 2.

Tabela 2 – Análise de escavação circular para diferentes valores de R/H.

	R/H=1	R/H=2	R/H=4	R/H=8	R/H=16	R/H=32
N_s (axissimétrico)	5,49	4,79	4,37	4,14	4,02	3,96
N_s (plano)	3,89	3,89	3,89	3,89	3,89	3,89

Da Tabela 2 observa-se que, para valores elevados da relação R/H, o número de estabilidade da análise axissimétrica aproxima-se do valor de 3,83 apresentado por Chen (1975) para uma análise em deformação plana, considerando o método de limite superior. Para valores elevados de R/H observa-se, também, que o número estabilidade aproxima-se do valor de 3,89 obtido por Ribeiro (2005), utilizando uma formulação mista para problemas de deformação plana.

A Tabela 2 indica que o problema de escavação circular se aproxima de um problema de escavação em condição de deformação plana quando a razão R/H torna-se elevada.

Como esperado, em uma análise de deformação plana, todas as geometrias idealizadas apresentam o mesmo resultado indicado na Tabela 2.

7.3 – Capacidade de carga de uma estaca sujeita à tração

Para validação do elemento de interface implementado, é apresentado o problema da capacidade de carga de uma estaca sujeita à tração.

A Fig. 8 mostra o esquema do problema e a malha empregada na análise (largura 1D e altura 2D). A estaca possui as seguintes características geométricas: comprimento $D = 10$ e diâmetro $B = 2$.

Para o caso de interface solo-estaca puramente coesiva, a resistência por atrito lateral, Q_f , de uma estaca circular pode ser dada pela expressão abaixo:

$$Q_f = \pi B D c_j, \quad (34)$$

em que c_j é a adesão entre o solo e a estaca.

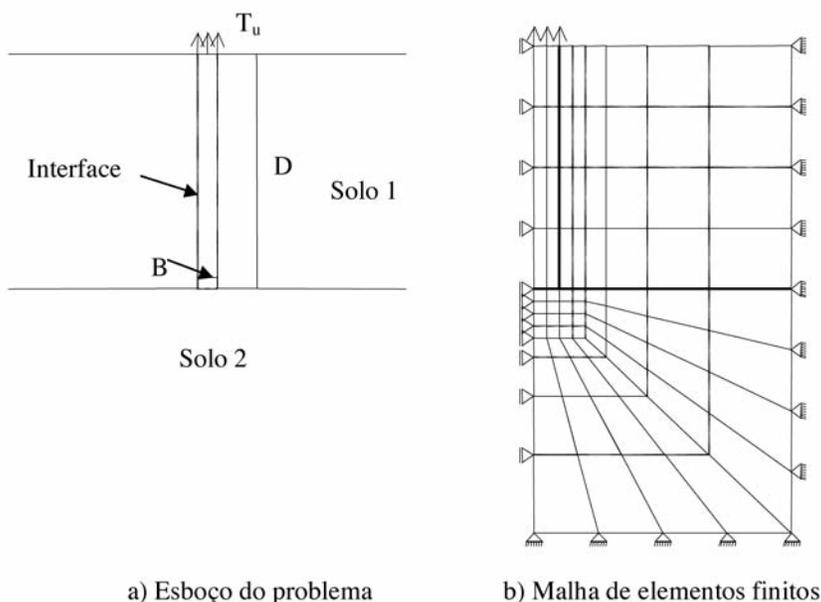


Fig. 8 – Estaca sujeita à tração.

Neste problema, a capacidade de carga de estaca sujeita à tração, T_u , coincide com a resistência por atrito lateral, pois não são considerados o peso próprio da estaca e a adesão entre a base da estaca e o solo ($T_u = Q_f$).

Para o exemplo em estudo são consideradas, inicialmente, as seguintes propriedades para os materiais:

- Solo 1 e Solo 2: $c = 1$, $\phi = 30^\circ$ e $\gamma = 0$;
 - Estaca: elemento rígido sem peso;
 - Interface lateral: $c_j = 1$ e $\phi_u = 0^\circ$;
 - Interface da base: $c_j = 0$ e $\phi_j = 30^\circ$.
- Empregando-se a equação (34), obtém-se $Q_f = 62,83$.

A análise numérica por PNL forneceu um valor de T_u igual a 62,83. Portanto, o resultado analítico é igual ao resultado numérico.

Mantendo-se as propriedades da estaca e das interfaces, foram realizadas as seguintes simulações:

1. Solo 1 e Solo 2: $c = 1$, $\phi = 30^\circ$ e $\gamma = 1$;
2. Solo 1: $c = 1$, $\phi = 30^\circ$ e $\gamma = 1$ e Solo 2: $c = 1$, $\phi = 30^\circ$ e $\gamma = 0$;
3. Solo 2 modelado como elemento rígido e Solo 1: $c = 1$, $\phi = 30^\circ$ e $\gamma = 0$.

Nas três simulações, a análise numérica forneceu valores idênticos aos obtidos anteriormente, ($T_u = 62,83$), o que valida, mais uma vez, a formulação e a implementação numérica, pois, para o modelo em consideração, a capacidade de carga da estaca sujeita à tração é definida, unicamente, em função da coesão da interface solo-estaca.

7.4 – Fundação circular sobre solo reforçado

O problema visa a determinação da capacidade de carga de uma fundação superficial, circular e rugosa de diâmetro $B = 20\text{m}$, sobre camada de solo homogêneo, puramente coesivo, $c=1\text{kPa}$ e sem peso e uma camada de reforço horizontal sob a fundação. A Fig. 9 mostra a geometria do problema e a malha utilizada na análise (largura 30 m e altura 20 m).

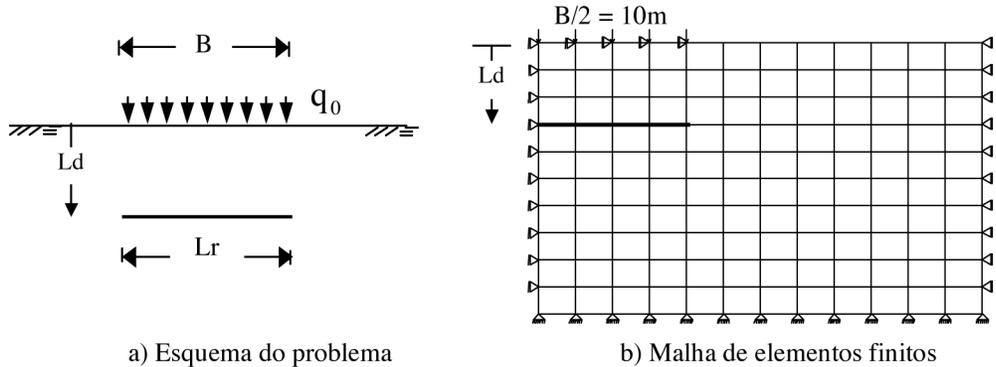


Fig. 9 – Capacidade de carga de fundação em solo reforçado.

O diâmetro do reforço é considerado fixo ($L_r = 20\text{ m}$) e a posição do reforço (L_d) é variável com a profundidade.

O reforço foi considerado rígido e não foram modeladas as interfaces solo-reforço, simulando-se as condições empregadas por Asaoka et al. (1994) na solução deste problema na condição de deformação plana. A malha e geometria utilizadas são as mesmas apresentadas por aqueles autores.

A Tabela 3 apresenta os resultados obtidos pela metodologia proposta neste trabalho (condição axissimétrica) e os de Asaoka et al. (1994) em função da profundidade do reforço.

Tabela 3 – Capacidade de carga de fundação (kPa) em solo reforçado.

L_d (m)	q_u (PNL CIRCULAR)	q_u (CORRIDA)
–	6,21	5,27
4	6,55	5,87
8	6,23	5,96
12	6,21	5,43

Da tabela 3, pode-se observar que para a fundação corrida tem-se uma maior influência do reforço na capacidade de carga e que o valor de capacidade de carga para fundação circular é cerca de 18% maior que o da fundação corrida.

8 – CONCLUSÕES

O presente trabalho apresentou formulações mistas de análise limite, via métodos dos elementos finitos, para solucionar problemas de estabilidade em geotecnia, na condição axissimétrica, em meios

contínuos ou reforçados. Elementos especiais para a modelagem do reforço e das interfaces (solo-estrutura e solo-reforço) para problemas axissimétricos foram formulados. O uso do elemento de interface na formulação mista parece ser efetivo para a modelagem da interação solo-estaca em condição axissimétrica.

Os resultados dos exemplos estudados pela implementação numérica realizada apresentam boa concordância com outros resultados encontrados na literatura técnica.

9 – AGRADECIMENTOS

Este trabalho contou com o apoio financeiro da Fundação Gorceix e da Capes na concessão de bolsa de estudo ao aluno de pós-graduação W. N. Ribeiro.

10 – REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Araújo, L. G. (1997). *Estudo Numérico de Problemas de Estabilidade em Materiais Geotécnicos através da Análise Limite*. Tese de Doutorado, PUC/Rio.
- Asaoka, A.; Kodaka, T. e Pokharel, G. (1994). *Stability Analysis of Reinforced Soil Structures Using Rigid Plastic Finite Element Method*. Soils and Foundations, v. 34, n.1, p.107-118.
- Bathe, K. J. (1982). *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*. Prentice Hall.
- Borges, L. A. (1991). *Formulação e solução para análise limite com superfície de escoamento não linear*. Tese de Doutorado, PUC/Rio.
- Bowles, J. E. (1982). *Foundation analysis and design*. McGraw-Hill, Inc.
- Casciaro, R. e Cascini, L. (1982). *A Mixed Formulation and Mixed Finite Elements for Limit Analysis*. Int. J. num. Meth. Engng, v.18, p.211-243.
- Chen, W. F. (1975). *Limit Analysis and Soil Plasticity*. Elsevier Science Publishers, BV, Amsterdam, The Netherlands.
- Christiansen, E. (1981). *Computation of Limit Loads*. Int. J. num. Meth. Engng, v.17, p.1547-1570.
- Cook, R. D.; Malkus, D. S.; e Plesha, M. E. (1989). *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*. Wiley & Sons, Inc.
- Drucker, D. C., Greenberg, H. J. e Prager, W. (1952). *Extended Limit Design Theorems for Continuous Media*. Quaterly Applied Mathematic, vol. 9, p. 381-389.
- Farfán, A. D. (2000). *Aplicação da Análise Limite a Problemas Geotécnicos Modelados como meios Contínuos Convencionais e Meios de Cosserat*. Tese de Doutorado, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.
- Faria, P. O. (1992). *Análise Limite de Problemas Geotécnicos*. Dissertação de Mestrado, PUC/Rio.
- Finn, W. D. L. (1967). *Application of limit plasticity in soil mechanics*. J. of Soil Mechanics and Foundation Division. ASCE, vol. 89 (SM5), p. 101-119.
- Jiang, G. L. (1995). *Non-linear finite element formulation of kinematic limit analysis*. Int. J. for Num. And Anal. Meth. in Eng, vol. 38, p. 2775-2807.
- Lemos, P. A. (2002). *Estudo Numérico pela Análise Limite de Problemas Geotécnicos em Solos Reforçados*. Dissertação de Mestrado, UFOP.

- Lindo Systems (2001). *LINGO – The modeling language and optimizer*. Lindo Systems INC.
- Lysmer, J. (1970). *Limit analysis of plane problems in soil mechanics*. J. of Soil Mech. and Foundations Div., ASCE, v.96, SM4, pp. 1311-1334.
- Pachás, M. A. C. (2004). *Análise Limite Tridimensional Determinística e Não Determinística*. Dissertação de Mestrado, PUC/Rio.
- Ribeiro, W. N. (2005). *Aplicações da análise limite numérica a problemas de estabilidade axisimétricos em geotecnia*. Dissertação de Mestrado, UFOP.
- Singh, D. N. e Basudhar, P. K. (1993). *Determination of the optimal lower bound bearing capacity of reinforced soil-retaining walls by using finite elements and non-linear programming*. Geotextiles and Geomembranes, v.12, p.665-686.
- Sloan, S. W. (1987-a). *Lower bound limit analysis using finite elements and linear programming*. Report N° 020.01.87, The University Of New Castle, Austrália.
- Sloan, S. W. (1987-b). *Upper bound limit analysis using finite elements and linear programming*. Report N° 025.01.1987, The University Of New Castle, Austrália.
- Sousa, L. S. M. R. (2001). *Estudo numérico de problemas de estabilidade de solos reforçados via análise limite*. Dissertação de Mestrado, UFOP.
- Tamura, T.; Kobayashi, S. e Sumi, T. (1987). *Rigid-plastic finite element method for frictional materials*. Soils and Foundations, v.27, n.3, p.1-12.
- Taylor, D. W. (1948). *Fundamentals of Soil Mechanics*. Wiley.
- Turgeman, S. e Pastor J. (1982). *Limit Analysis: a Linear Formulation of the Kinematic Approach for Axisymmetric Mechanic Problems*. Int. J. Numer. and Analytical Methods in Geomech, v.6, p.109-128.
- Terzaghi, K. (1943). *Theoretical Soil Mechanics*. Wiley.
- Vargas Jr., E. A.; Araujo, L. G.; Farfán, A. D., Lemos, P. A. e Vaz, L. E. (2004). *Algumas Aplicações da Análise Limite Numérica a Problemas Geotécnicos*. Geotecnia, n.100, Portugal.