A MODELAÇÃO FÍSICA COM CENTRIFUGADORA NO ÂMBITO DA GEOTECNIA

Geotechnical physical modelling with centrifuge

João Candeias Portugal*

RESUMO - A primeira centrifugadora geotécnica portuguesa está instalada no Laboratório Nacional de Engenharia Civil. Dada a natureza pioneira à escala nacional da aplicação em causa, *fundamenta-se* a técnica de modelação física proposta. Introduzem-se os *fundamentos* da técnica de modelação física com centrifugadora. Recorrendo à análise dimensional, deduzem-se as condições de semelhança com interesse no âmbito da geotecnia e analisa-se o mérito das abordagens experimentais actualmente disponíveis para o estudo de problemas geotécnicos.

Palavras Chave - Modelação física; Análise dimensional; Centrifugadora

SYNOPSIS - The first portuguese centrifuge facility has been recently established at the National Laboratory for Civil Engineering. As at a national scale no experience whatsoever existed on the subject, both *an introduction and the background* to the proposed physical modelling technique is provided. Firstly, an informative insight into the principles of geotechnical centrifuge model testing is presented, together with a critical analysis of the available experimental techniques for studying geotechnical problems. Dimensional analysis is used to establish the relevant similarity conditions in the field of geotechnics.

Key words - Physical modelling; Dimensional analysis; Centrifuge

1 – INTRODUÇÃO

O dimensionamento de qualquer obra de Engenharia Civil deve ser fundamentado em raciocínios científicos que permitam assegurar um compromisso óptimo entre segurança e economia. Para tal o Engenheiro Civil deve ser capaz de prever o comportamento das obras, sendo esta a única forma de, antecipadamente, justificar a adequabilidade das opções de dimensionamento. Invariavelmente, nessa previsão comportamental, o Engenheiro recorre a uma representação da realidade em jogo, vulgarmente designada por *modelo*. Essa representação da realidade física pode ser ou abstracta, por exemplo um *modelo matemático*, ou consubstanciada num corpo de prova material concreto normalmente designado por *modelo físico*. Os modelos físicos podem ser construídos a escala reduzida ou em verdadeira grandeza.

O interesse da modelação física é tanto maior quanto maiores as insuficiências e limitações inerentes à modelação matemática, ou seja, quando a modelação matemática é comprovadamente capaz de resolver de forma correcta, rápida e económica os problemas postos pelo dimensionamento de obras de determinado tipo, dificilmente se justifica o recurso à modelação física (Correia, 1991).

Se bem que o desenvolvimento dos métodos numéricos e das potencialidades dos meios de cálculo automático tenham tornado obsoleta a *modelação física analógica* (baseada na semelhança da formulação matemática de fenómenos de natureza diversa), a modelação física mantém um interesse inegável uma vez que: i) a complexidade intrínseca de certas teorias de

* Doutor em Engenharia Civil, Investigador Auxiliar do LNEC

comportamento suscita sérios problemas de validação dos modelos matemáticos; ii) a complexidade da geometria de alguns problemas (tipicamente efeitos tridimensionais) e/ou das leis de comportamento dos materiais em jogo exige um esforço de modelação desproporcionado em face dos objectivos a atingir. Assim, no âmbito da geotecnia os ensaios sobre modelo são normalmente realizados com os seguintes objectivos (Correia, 1991):

i) Estudos fenomenológicos - os modelos físicos são neste caso utilizados como fonte de produção, em condições controladas, de fenómenos físicos. A observação do comportamento modelo, mesmo que apenas qualitativa, é susceptível de inspirar teorias e métodos de análise matemática.

ii) Estudos paramétricos - neste tipo de utilização os ensaios sobre modelo permitem analisar a influência da variação de parâmetros (normalmente geométricos) no comportamento de determinado tipo de obras. Os modelos físicos a escala reduzida são particularmente adequados a este tipo de análise de sensibilidade, dada a facilidade em repetir ensaios alterando um parâmetro de cada vez, de forma a pôr em evidência a sua influência sobre o comportamento global.

iii) Calibração e validação de teorias e métodos matemáticos - a modelação física constitui uma excelente via para pôr à prova o mérito de teorias e métodos de análise matemática, uma vez que as condições de ensaio (carregamento, geometria, condições de fronteira, resistência e deformabilidade dos materiais, entre outras) são bem conhecidas. A validação é feita comparando entre si resultados calculados e medidos, sem qualquer necessidade de fazer intervir o conceito de protótipo.

iv) Estudos de previsão ou interpretação do comportamento de protótipos - constitui a mais óbvia aplicação da modelação física - tendo por base a observação do comportamento do modelo, inferir, por extrapolação, o comportamento do protótipo correspondente. Para tal é necessário que o modelo seja construído e ensaiado de acordo com determinados requisitos de semelhança, para assim garantir a validade das extrapolações. Muitas vezes não é possível respeitar todos os requisitos de semelhança relevantes, mormente os que se prendem com pormenores de processos construtivos, heterogeneidade dos materiais intervenientes, estados de tensão "*in situ*", etc., o que levanta sérios problemas à realização deste tipo de estudos.

v) Ensino - a possibilidade de visualizar com clareza diversos padrões de comportamento tipo, nomeadamente mecanismos de colapso, pode ser utilizada com evidentes vantagens pedagógicas, no ensino de disciplinas de Mecânica dos Solos.

Como se referiu, os modelos físicos podem ser construídos a escala reduzida ou em verdadeira grandeza. Os ensaios sobre modelos em verdadeira grandeza não se apresentam já como a via experimental incontestável, não só pelas inultrapassáveis questões de custo, mas também por outras razões, de entre as quais ressaltam (Corté *et al.*, 1986): i) no caso de obras experimentais propriamente ditas, as condições de utilização final impedem a condução de ensaios até à rotura, limitando o comportamento observável a um domínio limitado de deformação; ii) as condições geotécnicas são normalmente heterogéneas, e as características dos solos são conhecidas com elevados graus de incerteza, muitas vezes de forma incompleta por se basearem num reduzido número de ensaios de caracterização, o que torna inconclusiva qualquer tentativa de extrapolação geral de comportamento, para além do caso particular em estudo; iii) as condições de fronteira e limite são muitas vezes imprecisas, e é difícil perspectivar a sua influência sobre o comportamento observado.

Os modelos físicos a escala reduzida constituem corpos de prova muito menos onerosos e muito mais rápidos de construir, com características, quer geométricas, quer mecânicas, que podem ser muito melhor conhecidas pelo experimentador. Prestam-se assim, em particular, a estudos paramétricos, o que é de todo impossível no caso de obras experimentais.

Inversamente, o modelo não permite representar todos os detalhes, e nem sempre se pode recorrer a materiais idênticos aos do problema real. Assim, a validade da extrapolação dos resultados para protótipo é condicionada pela qualidade da semelhança que se consiga materializar. Decorre do exposto que os ensaios em modelo reduzido são uma via de investigação complementar das análise teóricas e numéricas e dos ensaios sobre obras reais.

2 - ANÁLISE DIMENSIONAL

2.1 – Generalidades

Os raciocínios científicos são baseados em conceitos de várias entidades tais como: força, massa, comprimento, tempo, aceleração, velocidade, etc., sendo a cada uma delas atribuída uma unidade de medida. As entidades massa, comprimento, tempo, temperatura e carga eléctrica são, num certo sentido, independentes umas das outras, sendo as suas unidades de medida prescritas por normas internacionais. Mais do que isso, as unidades atribuídas a estas entidades determinam as unidades de todas as outras. Não existe, no entanto, nada de fundamental neste conjunto de cinco grandezas, havendo um grande número de possibilidades de escolha das cinco entidades base independentes (por exemplo, força, comprimento, tempo, temperatura e carga eléctrica).

O físico escocês Maxwell utilizou símbolos do tipo [F], [M], [L], [T], [θ], para denotar força, massa, comprimento, tempo e temperatura respectivamente. Com estes símbolos formou produtos de potências que designou por *dimensões* (físicas). É grande a controvérsia sobre o significado das dimensões físicas. A conclusão geral que emerge dessa discussão é que o conceito de dimensão física tem pouca importância. As dimensões servem num entanto um propósito matemático importante: elas constituem um código que nos permite determinar como é que o valor numérico de uma quantidade muda, quando as unidades de medida fundamentais são sujeitas a transformações conhecidas.

Diz-se que uma equação ou, em geral, uma função é *dimensionalmente homogénea* se a sua forma não depender das unidades fundamentais de medida utilizadas. Quando comparadas com os outros tipos de funções estudadas no âmbito da análise matemática, as funções dimensionalmente homogéneas constituem-se numa classe especial, cuja teoria se designa por *análise dimensional*. Esta teoria algébrica contém os fundamentos matemáticos de um método, também designado por análise dimensional, pelo qual se deduz informação relativamente a um fenómeno, partindo da simples premissa de que o fenómeno pode ser descrito por uma função dimensionalmente correcta (homogénea) entre certas variáveis.

A generalidade do método constitui quer a sua força, quer a sua fraqueza. Efectivamente, com um pequeno esforço consegue-se estabelecer uma solução parcial de praticamente todos os problemas. No entanto, se se recorrer apenas à análise dimensional, não se obtém uma solução completa, nem a compreensão do mecanismo físico em causa.

O primeiro passo para a análise dimensional de um problema consiste em decidir quais as variáveis que o condicionam. Se se introduzirem variáveis que não afectam o fenómeno em estudo, elas constarão de forma explícita na equação final, dificultando ou até impedindo a compreensão do mecanismo físico subjacente. Inversamente, se se omitirem variáveis que influenciam o fenómeno, a análise dimensional poderá conduzir a um impasse, ou, mais correntemente, conduzirá a uma solução incompleta ou errada. A selecção de variáveis terá então que ser baseada num conhecimento ou numa teoria do mecanismo fenomenológico em jogo, que permita explicar o como e o porquê da influência das variáveis do problema. Normalmente, mesmo as teorias mais grosseiras permitem explicitar as variáveis mais importantes. Se as equações que governam o fenómeno forem conhecidas elas mostram directamente as variáveis significativas.

O segundo passo do método consiste em reduzir a função (conhecida ou desconhecida) que rege o fenómeno a uma relação adimensional. Este procedimento tem por base um dos teoremas da teoria da análise dimensional, vulgarmente conhecido por *teorema de Buckingham*, cujo enunciado é: *Se uma equação for dimensionalmente homogénea ela pode ser reduzida a uma relação funcional equivalente entre um conjunto completo de produtos adimensionais.*

Este teorema, que sintetiza a totalidade da teoria da análise dimensional, não é, de forma alguma, evidente (o próprio Buckingham nunca chegou a apresentar a sua demonstração[1]). Ele permite no entanto concluir que, se a um conjunto de n variáveis estiver associada uma equação dimensionalmente homogénea, conhecida ou desconhecida, essa equação pode ser expressa na forma de uma relação entre n-r produtos adimensionais das variáveis, em que n-r é o número de produtos adimensionais num conjunto completo.

O número de produtos adimensionais num conjunto completo é igual à diferença entre o número total de variáveis intervenientes e o número máximo de variáveis que não formam um produto adimensional.

Na maior parte dos casos r é igual ao número de dimensões fundamentais intervenientes no problema. No entanto, tal não constitui uma regra infalível, uma vez que o número de dimensões fundamentais de um dado problema depende do sistema de dimensões fundamentais adoptado. Por exemplo, os problemas de análise de tensões envolvem normalmente apenas duas dimensões fundamentais [F] e [L], pelo que o valor de r é 2. Se se adoptar o sistema de força [FLT] a dimensão tempo não intervém, pelo que r coincide com o número de dimensões fundamentais e a regra apresentada é válida. Já no caso de se utilizar o sistema de massa [MLT] esta regra perde validade, uma vez que a dimensão de [F] é $[MLT^{-2}]$ existindo três dimensões fundamentais em jogo no problema com r igual a 2.

2.2 – Semelhança

2.2.1 – Modelos físicos

No âmbito da Engenharia Civil é normal recorrer ao estudo do comportamento de réplicas, normalmente a escala reduzida, de sistemas cujo comportamento se pretende estudar. Um modelo físico é um corpo de prova destinado a simular o comportamento de determinado sistema *protótipo* (uma obra, uma estrutura, um fenómeno natural, etc.).

O sistema protótipo pode ter, ou uma contrapartida real - por exemplo, uma estrutura construída cujo comportamento quando sujeita a determinadas acções excepcionais se pretenda conhecer, ou uma contrapartida idealizada - por exemplo, uma estrutura projectada, cuja solução de dimensionamento se pretenda testar nas condições de serviço a que ficará submetida após a sua construção. O sistema idealizado pode ainda afastar-se deste tipo de realidade virtual, isto é, não estar associado a nenhuma realidade projectada. São os casos típicos dos estudos fenomenológicos tendentes a esclarecer um mecanismo físico de comportamento, em que o sistema protótipo é idealizado por forma a pôr em evidência os diferentes factores que o influenciam.

No primeiro tipo de sistemas protótipo o recurso à modelação física só se justifica se a exploração dos correspondentes modelos permitir inferir (extrapolar) o comportamento real, seja ele concreto ou virtual. Já nos sistemas ideais os fenómenos modelo podem ser encarados

---

[1] Uma demonstração rigorosa da validade do teorema de Buckingham pode ser encontrada em Langhaar (1951).

como ocorrências autónomas, sem uma intenção explícita de representar um protótipo, resultando o seu interesse do facto de constituírem em si mesmos um acontecimento real.

2.2.2 – Conceito geral de semelhança

Independentemente do sistema protótipo em causa, à actividade de modelação física associa-se sempre um objectivo de *semelhança*, isto é, os acontecimentos a observar em modelo só têm interesse se permitirem recolher informação, mesmo que apenas qualitativa, acerca do comportamento dos seus protótipos. Assim, é necessário garantir que a essência ou a natureza dos fenómenos que se observam no sistema modelo seja idêntica à que ocorre no sistema protótipo. O modelo deve então ser concebido e construído por forma a respeitar determinados requisitos que garantam essa semelhança entre os acontecimentos por si experimentados e os seus correspondentes no protótipo. Nestas condições diz-se que *o sistema modelo é semelhante ao sistema protótipo* (e vice-versa).

Por exemplo, se as diferentes partes do modelo tiverem as mesmas formas que as correspondentes partes do protótipo, os dois sistemas dizem-se geometricamente semelhantes. Em geral existe uma correspondência bi-unívoca entre pontos no modelo e pontos no protótipo. Dois pontos, um no modelo e outro no protótipo, que se relacionem de acordo com essa correspondência dizem-se *homólogos*. O conceito geométrico de pontos homólogos conduz imediatamente ao conceito de figuras e partes homólogas. Figuras e partes do modelo e protótipo são ditas homólogas se forem compostas por pontos homólogos.

O conceito de semelhança é extensível a uma série de características para além da geometria, por exemplo, pode-se especificar que a distribuição de massa no modelo seja semelhante à do protótipo, isto é, que a relação entre massas de partes homólogas do modelo e protótipo seja uma constante que não depende das partes escolhidas. Se o fenómeno em estudo for transitório (variável com o tempo) é necessário introduzir o conceito de tempos homólogos.

Considerem-se então dois sistemas, um dos quais se designa por protótipo (p) e outro por modelo (m). Seleccionem-se dois sistemas de referência, um no protótipo (x_p, y_p, z_p, t_p) e outro no modelo (x_m, y_m, z_m, t_m), em que *x*, *y* e *z* designam coordenadas cartesianas e *t* o tempo. Suponha-se que os sistemas modelo e protótipo são tais que respeitam as seguintes condições para todos os seus pontos em qualquer instante de tempo considerado:

$x_m = k_x\, x_p \qquad y_m = k_y\, y_p \qquad z_m = k_z\, z_p \qquad t_m = k_t\, t_p,$

em que k_x, k_y, k_z, k_t são constantes positivas.

As constantes k_x, k_y e k_z são designadas por *factores de escala* de comprimentos nas direcções x, y e z respectivamente. Os dois sistemas dizem-se geometricamente semelhantes se $k_x = k_y = k_z = k_L$. A constante k_t é designada por factor de escala do tempo. Num fenómeno cíclico o factor de escala do tempo é a razão entre os períodos cíclicos dos dois sistemas. Para fenómenos em regime permanente o factor de escala do tempo é interpretado como a razão entre os intervalos de tempo em que duas partículas materiais homólogas descrevem partes homólogas das suas trajectórias.

É importante notar que, no caso geral ($k_t \neq 1$) não ocorrem estados simultâneos nos dois sistemas. Em vez disso, os dois sistemas contemplam estados que ocorrem em tempos homólogos.

O conceito geral de semelhança pode então ser definido em termos de duas quaisquer funções escalares $f_p(x_p, y_p, z_p, t_p)$ e $f_m(x_m, y_m, z_m, t_m)$ como: *A função f_m é semelhante à função f_p, desde que a razão f_m/f_p seja constante, quando ambas as funções são avaliadas em pontos homólogos e instantes homólogos quaisquer que eles sejam.* O valor constante da razão f_m/f_p (k_f) é analogamente designado por factor de escala da função f (x, y, z, t).

2.2.3 – Semelhança completa - efeitos de escala

Como se referiu os estudos em modelo visam obter informação acerca do comportamento dos seus protótipos. Usualmente pretende-se que essa informação seja quantitativa e muitas vezes esse resultado quantificado fundamental traduz-se por um valor numérico isolado. Por exemplo, o resultado principal de um ensaio à rotura de uma estrutura é o valor da carga última a que a estrutura resiste.

O(s) valor(es) numérico(s) que é(são) obtido(s) através de um ensaio sobre um modelo depende(m) dos valores das variáveis independentes do problema. Como se referiu (§ 2.1) se o problema puder ser traduzido por uma função dimensionalmente homogénea entre *n* grandezas variáveis (G_i, com i = 1,2,...n),

$$G = f(G_1, G_2, ..., G_n) \qquad (1)$$

a análise dimensional dessa função conduzirá invariavelmente a uma equação equivalente da forma,

$$\pi = \Phi\,(\pi_1, \pi_2, ..., \pi_s) \qquad (2)$$

em que os π_i (i = 1,2,..., s) constituem um conjunto completo de produtos adimensionais (s = n - r).

Se se pretender conhecer o valor de π que corresponde a determinados valores numéricos específicos de π_i (i = 1,2,..., s), poder-se-à obter o resultado recorrendo ao ensaio de um modelo, desde que, as variáveis adimensionais independentes π_i (i = 1,2,..., s) tenham os mesmos valores tanto no modelo (*m*) como no protótipo (*p*). Esta conclusão é evidente uma vez que sendo Φ a mesma função escalar e $\pi_{i_m} = \pi_{i_p} = \pi_i$ (i = 1,2,..., s) tem-se, $\pi_m = \pi_p = \pi$. Por outro lado, como um conjunto completo de produtos adimensionais permite determinar qualquer outro produto adimensional entre as variáveis do problema, todos os produtos adimensionais que for possível estabelecer têm o mesmo valor no modelo e no protótipo.

Nestas condições, $\pi_{i_m} = \pi_{i_p}$ (i = 1,2,..., s), o modelo e o protótipo são designados como *completamente semelhantes* ou ditos em *semelhança completa*. Obviamente que a condição de semelhança completa é impossível sem que haja semelhança geométrica. A cada uma das *s* equações que traduzem a condição de igualdade entre os valores dos produtos adimensionais no modelo e protótipo, $\pi_{i_m} = \pi_{i_p}$ (i = 1,2,..., s), chama-se *condição de semelhança* ou *lei de semelhança*. Analogamente o conjunto completo dessas igualdades recebe a designação de *conjunto de condições ou leis de semelhança.*

Normalmente a imposição da condição de semelhança completa para o ensaio em modelo não é exequível em termos práticos. Consequentemente, a algumas das variáveis adimensionais independentes, que se julga, ou exercerem influência pouco significativa sobre o fenómeno em estudo, ou que o afectam de maneira conhecida, é "*permitido*" desviarem-se dos seus valores correctos. Uma parte importante do trabalho em modelação física - na realidade a parte mais importante - é a de justificar estes desvios em relação à condição de semelhança completa, ou a de aplicar correcções teóricas que os compensem (Langhaar, 1951).

Assim, se algum(uns) dos produtos adimensionais for(em) negligenciado(s) têm que se tomar algumas precauções. Efectivamente, pode acontecer que, não existindo semelhança completa, a variável adimensional negligenciada possa não afectar significativamente o comportamento do protótipo, mas condicionar decisivamente o do modelo (ou vice-versa).

A este tipo de alteração qualitativa de comportamento entre modelo e protótipo chama-se *efeito de escala.* Atente-se que só existem efeitos de escala em modelos que se afastem da condição de semelhança completa.

Sempre que ao produto adimensional π_i, interveniente como variável independente no estudo de determinado fenómeno, for permitido desviar-se do seu valor no protótipo, existirá um efeito de escala. Os efeitos de escala podem, evidentemente, ser também eles desprezáveis, isto é, o facto de não se respeitar uma (ou mais) das condições de semelhança pode não originar alterações importantes de comportamento entre modelo e protótipo. É precisamente aqui que o papel do modelador é decisivo. Cabe-lhe ou demonstrar que o efeito de escala em questão é desprezável ou quantificá-lo, por forma a corrigir os seus efeitos sobre o modelo.

3 – CONDIÇÕES GERAIS DE SEMELHANÇA EM GEOTECNIA

3.1 – Generalidades

Tendo por base a aplicação do método da análise dimensional anteriormente descrito, proceder-se-á seguidamente à dedução das condições gerais de semelhança com interesse no âmbito da geotecnia. Essas leis de semelhança serão apresentadas através de *leis de modelação*, isto é, recorrendo a um rearranjo da sua forma explícita para que traduzam as relações que têm que existir entre os factores de escala intervenientes no problema, por forma a que haja semelhança entre modelo e protótipo.
Introduza-se então a notação,

$$G^* = \frac{G_m}{G_p}$$

em que,
G^* - é designado de factor de escala da grandeza G,
G_m - é o valor da grandeza G no modelo,
G_p - é o valor da grandeza G no protótipo.

Sempre que possível a dedução das leis de modelação é baseada nas equações diferenciais governativas dos diferentes fenómenos em estudo, ou em teorias de comportamento estabelecidas que permitam evidenciar as grandezas em jogo.

Na sequência da exposição, nomeadamente aquando da dedução das leis de modelação das relações constitutivas dos materiais granulares, limitar-se-á a discussão ao caso em que os materiais modelo são os mesmos do protótipo.

Efectivamente, embora em teoria exista a possibilidade de respeitar as condições de semelhança reológica, através de uma selecção criteriosa de materiais de substituição (Rocha e Folque, 1955), as dificuldades práticas inerentes a um procedimento deste tipo comprometem a sua viabilidade.

A complexidade do comportamento reológico dos solos introduz *"de per si"* problemas de monta na procura de materiais que satisfaçam os critérios básicos de semelhança em termos das relações tensões-deformações-tempo. Desde logo ficam excluídos os materiais de substituição que não sejam solos do mesmo tipo, dada a especificidade das relações constitutivas dos meios particulados. Ainda assim, torna-se praticamente impossível respeitar, mesmo que apenas de forma aproximada, todas as condições relevantes de semelhança reológica. Por outro lado, a procura de materiais particulados de substituição tem inevitavelmente que se basear num processo de tentativas, envolvendo um extenso programa de caracterização laboratorial, quer dos materiais protótipo, quer de cada um dos materiais candidatos a réplica reológica (Correia, 1991).

Refira-se finalmente que é corrente em problemas geotécnicos a ocorrência de fenómenos em que a deformação do esqueleto sólido é acompanhada por processos transitórios de escoamento de líquidos. Assim, a interacção física entre as fases sólida e líquida dos solos exige a consideração simultânea das condições de semelhança correspondentes às relações tensões-deformações e aos fenómenos de escoamento, introduzindo dificuldades acrescidas para encontrar materiais de substituição adequados.

3.2 - LEIS DE MODELAÇÃO EM GEOTECNIA

3.2.1 – Equilíbrio

A equação de equilíbrio de um meio contínuo é:

$$\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho \left(g_i - \frac{\partial^2 \delta_i}{\partial t^2} \right) = 0 \qquad (i, j = 1,2,3) \tag{3}$$

em que,
x_j - são as coordenadas cartesianas;
σ_{ij} - são as componentes do tensor das tensões totais;
g_i - são as componentes do vector da aceleração da gravidade;
δ_i - são as componentes do vector de deslocamentos e;
ρ - é a massa volúmica do material constituinte do meio.

A equação (3) traduz uma relação dimensionalmente homogénea da forma,

$$\sigma_{ij} = f(\delta_i, x_j, \rho, g_i, t) \qquad (i, j = 1,2,3) \tag{4}$$

que pode ser reduzida a uma relação adimensional do tipo,

$$\Phi\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}, \frac{\sigma_3}{\sigma_1}, \frac{\delta_i}{x_1}, \frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}, \frac{\rho}{x_1^{-2}\, t^2\, \sigma_1}, \frac{g_i}{x_1\, t^{-2}} \right) = 0 \qquad (i = 1,2,3) \tag{5}$$

se se escolherem as variáveis x_1, σ_1 e t para representarem as dimensões fundamentais intervenientes, sendo, σ_i - as componentes principais do tensor das tensões totais (i = 1,2,3).

Os 11 produtos adimensionais constantes da formulação adimensional do problema de equilíbrio permitem estabelecer as leis de modelação para que o equilíbrio do meio modelo seja semelhante ao do protótipo. Suponhamos que modelo e protótipo são geometricamente semelhantes. Impondo a igualdade dos valores dos produtos adimensionais no modelo e no protótipo obtém-se:

$$\sigma^* = \sigma_i^* \qquad (i = 1,2,3) \tag{6}$$

$$\delta^* = \delta_i^* = l^* \qquad (i = 1,2,3) \tag{7}$$

$$l^* = x_i^* \qquad (i = 1,2,3) \tag{8}$$

$$\rho^* = (l^*)^{-2} (t^*)^2 \sigma^* \tag{9}$$

$$g^* = g_i^* = l^*(t^*)^{-2} \qquad (i = 1,2,3) \tag{10}$$

De (10) vem,

$$(t^*)^2 = \frac{l^*}{g^*} \tag{11}$$

Substituindo (11) em (9) obtém-se:

$$\sigma^* = \rho^* g^* l^* \tag{12}$$

que traduz a lei de modelação fundamental para problemas de equilíbrio estático.

Por outro lado, atendendo a (7) e (11) tem-se:

$$\delta^* = g^*(t^*)^2 \tag{13}$$

que traduz a lei de modelação fundamental para problemas de equilíbrio dinâmico.

3.2.2 – Relações deformação - deslocamento

As relações deformação - deslocamento gerais de um meio contínuo são:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial \delta_j}{\partial x_i} + \frac{\partial \delta_i}{\partial x_j} + \sum_{k=1}^{3}\left(\frac{\partial \delta_k}{\partial x_i}\frac{\partial \delta_k}{\partial x_j}\right)\right] \qquad (i, j = 1,2,3) \tag{14}$$

em que ε_{ij} são as componentes do tensor das deformações.

As equações (14) traduzem uma relação dimensionalmente homogénea da forma,

$$\varepsilon_{ij} = f(\delta_i, x_i) \qquad (i, j = 1,2,3) \tag{15}$$

que pode ser reduzida a uma relação adimensional do tipo,

$$\Phi\left(\varepsilon_i, \frac{\delta_i}{x_1}, \frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}\right) = 0 \qquad (i = 1,2,3) \tag{16}$$

se se escolher a variável x_1 para representar a dimensão fundamental interveniente, sendo,
ε_i - as componentes principais do tensor das deformações.

Os 8 produtos adimensionais constantes da formulação adimensional (16) permitem estabelecer as leis de modelação para que as deformações do meio modelo sejam semelhantes às do protótipo. Suponhamos que modelo e protótipo são mais uma vez geometricamente semelhantes. Impondo a igualdade dos valores dos produtos adimensionais no modelo e no protótipo obtém-se:

$$\varepsilon^* = \varepsilon_i^* = 1 \qquad (i = 1,2,3) \tag{17}$$

$$\delta^* = \delta_i^* = l^* \qquad (i = 1,2,3) \tag{18}$$

$$x^* = x_i^* = l^* \qquad (i = 1,2,3) \tag{19}$$

Ou seja, as leis de modelação fundamentais para que as relações deformação-deslocamento sejam semelhantes no modelo e protótipo são:

$$\varepsilon^* = 1 \tag{20}$$

$$\delta^* = l^* \tag{21}$$

3.2.3 – Equilíbrio na fronteira

As equações que traduzem o equilíbrio na fronteira do meio contínuo são:

$$T_i = \sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij}\, n_i \qquad (i = 1,2,3) \tag{22}$$

em que,

T_i - são as componentes do vector tensão num ponto da fronteira e;

n_i - são os cosenos directores da normal à fronteira no ponto.

A relação adimensional em causa é do tipo:

$$\Phi\left(\frac{T_i}{\sigma_1};\frac{\sigma_2}{\sigma_1};\frac{\sigma_3}{\sigma_1};n_i\right) = 0 \qquad (i = 1,2,3) \tag{23}$$

em que σ_i são as componentes principais do tensor das tensões.

As leis de modelação associadas à expressão (23) são:

$$T^* = \sigma^* \tag{24}$$

$$n^* = 1 \tag{25}$$

A expressão (25) é verificada em sistemas geometricamente semelhantes em que $\varepsilon^*=1$ (§3.2.2). Sendo as deformações experimentadas pela fronteira modelo iguais às da fronteira protótipo, os cosenos directores da normal são iguais nos dois sistemas.

3.2.4 – Princípio da tensão efectiva

Para meios particulados saturados é válido o princípio da tensão efectiva, que se traduz por:

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - u\,\delta_{ij} \qquad (i, j = 1,2,3) \tag{26}$$

em que,

σ'_{ij} - são as componentes do tensor das tensões efectivas;

σ_{ij} - são as componentes do tensor das tensões totais;

u - é a pressão no líquido intersticial e;

δ_{ij} - o delta de Kronecker.

Da análise dimensional da equação (26) obtém-se:

$$\sigma'^* = \sigma^* = u^* \tag{27}$$

3.2.5 – Relações constitutivas

Como se referiu em 3.1, a complexidade do comportamento reológico dos solos torna inviável a possibilidade de seleccionar materiais modelo substitutos, que satisfaçam leis de modelação gerais, estabelecidas a partir das relações entre tensões e deformações dos materiais protótipo. Para ultrapassar esta dificuldade é normal recorrer aos materiais protótipo para construir os modelos.

Limite-se então a discussão das leis de modelação das relações constitutivas ao caso do material modelo ser o mesmo que o do protótipo.

Os solos exibem um comportamento do tipo elasto-plástico. Este comportamento é especificado por uma função elástica, uma função de cedência, uma lei de endurecimento (ou amolecimento) e uma lei de fluxo da função de potencial plástico.

A função elástica relaciona os incrementos de tensão efectiva com os incrementos de deformação elástica. Admita-se a validade da condição de consistência, isto é:

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^{e} + d\varepsilon_{ij}^{p} \qquad (i, j = 1,2,3) \tag{28}$$

em que,

$d\varepsilon_{ij}$ - são as componentes do tensor dos incrementos de deformação;

$d\varepsilon_{ij}^{e}$ - são as componentes do tensor dos incrementos de deformação elástica e;

$d\varepsilon_{ij}^{p}$ - são as componentes do tensor dos incrementos de deformação plástica.

A forma geral da função elástica é:

$$d\sigma'_{ij} = f_{ELA}\left(d\varepsilon_{ij}^{e}, e_k\right) \qquad (i, j = 1,2,3) \tag{29}$$

em que,

$d\sigma'_{ij}$ - são as componentes do tensor dos incrementos de tensão efectiva e;

e_k - são parâmetros característicos do material ($k = 1,\ldots,n$).

A função de cedência define uma fronteira (no espaço de tensão) que separa estados de tensão que causam apenas deformações elásticas de estados de tensão que causam deformações elásticas e plásticas (permanentes). No caso geral tem-se:

$$\sigma'_{ij} = f_{CED}\left(c_k\right) \qquad (i, j = 1,2,3) \tag{30}$$

em que,

σ'_{ij} - são as componentes do tensor das tensões efectivas e;

c_k - são parâmetros característicos do material ($k = 1,\ldots,n$).

A função de endurecimento relaciona o valor das deformações plásticas com o valor dos incrementos de tensão quando o estado de tensão do material atinge a função de cedência e endurece (ou amolece) com a deformação, ou seja,

$$\varepsilon_{ij}^{p} = f_{END}\left(d\sigma'_{ij}, d_k\right) \qquad (i, j = 1,2,3) \tag{31}$$

em que, d_k - são parâmetros característicos do material ($k = 1,\ldots,n$).

Finalmente, a função de fluxo define a direcção dos incrementos de deformação plástica em relação a uma função de potencial plástico no espaço de tensões. No caso geral tem-se:

$$d\varepsilon_{ij}^{p} = f_{FLU}\left(\sigma'_{ij}, f_k\right) \qquad (i, j = 1,2,3) \tag{32}$$

em que, f_k - são parâmetros características do material ($k = 1,\ldots,n$).

Da análise dimensional das equações (29) a (32) podem retirar-se as seguintes leis de modelação:

$$\sigma^* = d\sigma'_{ij}{}^* = \sigma'_{ij}{}^* \qquad (i, j = 1,2,3) \tag{33}$$

$$\varepsilon^* = d\varepsilon_{ij}^{e}{}^* = \varepsilon_{ij}^{p}{}^* = d\varepsilon_{ij}^{p}{}^* = 1 \qquad (i, j = 1,2,3) \tag{34}$$

Por outro lado, atendendo a que se limitou a discussão destas leis de modelação ao caso em que o material protótipo é utilizado como material modelo, os factores de escala dos parâmetros característicos do material (e_k, c_k, d_k e f_k) são unitários:

$$par^* = 1 \tag{35}$$

em que *par** representa o factor de escala de todos os parâmetros intervenientes na formulação. Como se sabe alguns destes parâmetros característicos têm dimensão de tensão, nomeadamente os módulos de elasticidade do material intervenientes na função elástica. Assim sendo ($E^*=1$), para que se verifiquem as leis de modelação relativas aos parâmetros com dimensão de tensão (por exemplo, $E^*/\sigma^*=1$), o factor de escala de tensões σ^* tem que ser unitário, vindo,

$$\sigma^* = 1 \tag{36}$$

$$\varepsilon^* = 1 \tag{37}$$

que constituem as leis de modelação fundamentais para que as relações tensão - deformação sejam semelhantes no modelo e protótipo quando no primeiro se utiliza o material do segundo.

3.2.6– Escoamentos em meios porosos saturados

Considere-se agora o problema do escoamento de água no interior de um meio poroso saturado, sob a forma gravitacional, isto é, promovido pela acção da gravidade e de gradientes de pressão. Como hipótese de base supõe-se que o meio poroso é incompressível e que o líquido intersticial (normalmente água) apresenta peso volúmico constante. Se o escoamento se processar a velocidades suficientemente baixas, o regime é laminar e as forças de inércia são desprezáveis face às forças de viscosidade do líquido. Nestas hipóteses é válida a lei de Darcy generalizada:

$$\bar{v}_i = -\sum_{j=1}^{3} k_{ij} \frac{\partial H}{\partial x_j} \qquad (i, j = 1,2,3) \tag{38}$$

em que,

$\bar{v}_i$ - são as componentes da velocidade aparente do líquido[2];

---

[2] $\bar{v}_i = n\, v_{l_i}$,em que,

k_{ij} - são as componentes do tensor de permeabilidade;
H - é a carga hidráulica total em cada ponto e;
x_j - são as coordenadas cartesianas desse ponto.

A carga hidráulica total em cada ponto é dada por:

$$H = \frac{u}{\rho_w g} + z \qquad (39)$$

em que,
u - é a pressão no líquido intersticial;
ρ_w - é a massa volúmica do líquido intersticial (constante);
g - é a aceleração da gravidade, e;
z - é a cota geométrica do ponto (x_3 + Cte.).

Ou seja tem-se:

$$\overline{v}_i = f\left(k_{ij}, u, \rho_w, g, z, x_i\right) \qquad (i, j = 1,2,3) \qquad (40)$$

a que corresponde a forma adimensional equivalente:

$$\Phi\left(\frac{\overline{v}_i}{\sqrt{zg}}, \frac{k_{ij}}{\sqrt{zg}}, \frac{\rho_w}{z^{-1}g^{-1}u}, \frac{x_i}{z}\right) = 0 \qquad (i, j = 1,2,3) \qquad (41)$$

e as seguintes leis de modelação:

$$\overline{v}* = \overline{v}_i* = \sqrt{z*g*} \qquad (i = 1,2,3) \qquad (42)$$

$$k* = k_{ij}* = \sqrt{z*g*} \qquad (i = 1,2,3) \qquad (43)$$

$$\rho* = (z*)^{-1}(g*)^{-1}u* \qquad (44)$$

$$l* = x_i* = z* \qquad (45)$$

Por outro lado a equação de continuidade do escoamento é:

$$\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial \overline{v}_i}{\partial x_i} + \frac{\partial \varepsilon_V}{\partial t} = 0 \qquad (i = 1,2,3) \qquad (46)$$

em que,
ε_V - é a extensão volumétrica ($\varepsilon_V = \varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3$).

A equação (46) traduz uma relação dimensionalmente homogénea do tipo,

$$\varepsilon_{ij} = f\left(\overline{v}_i, x_i, t\right) \qquad (i, j = 1,2,3) \qquad (47)$$

---

n - é a porosidade do meio e;
v_{l_i} - são as componentes da velocidade do líquido.

A forma adimensional de (47) é:

$$\Phi\left(\varepsilon_{ij}, \frac{\overline{v}_i}{x_1 t^{-1}}, \frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}\right) = 0 \qquad (i, j = 1,2,3) \tag{48}$$

As leis fundamentais de modelação associadas são:

$$\varepsilon^* = \varepsilon_{ij}^* = 1 \qquad (i, j = 1,2,3) \tag{49}$$

$$\overline{v}^* = \overline{v}^*_i = l^*(t^*)^{-1} \qquad (i = 1,2,3) \tag{50}$$

$$l^* = x_i^* \qquad (i = 1,2,3) \tag{51}$$

Atente-se finalmente na lei de modelação (43). Como se sabe o tensor de permeabilidade (k_{ij}) depende não só da forma, tamanho e arranjo das partículas sólidas constituintes do meio poroso, como também das características do líquido em escoamento. Em particular tem-se:

$$k_{ij} = \frac{\rho_w g}{\mu} K_{ij} \tag{52}$$

em que,

k_{ij} - são as componentes do tensor de permeabilidade;
ρ_w - é a massa volúmica do líquido intersticial;
μ - é a viscosidade dinâmica do líquido intersticial e;
K_{ij} - são as componentes do tensor de permeabilidade intrínseca.

O tensor de permeabilidade intrínseca é uma característica intrínseca do meio poroso (forma, tamanho e arranjo das partículas sólidas). Assim se se recorrer aos materiais protótipo para modelar o problema de escoamento (mesmo fluido intersticial - $\rho_w^*=\mu^*=1$, e mesmo material particulado - $K^*=1$) vem,

$$k^* = g^* \tag{53}$$

3.2.7 – Processos de transporte de poluentes em solos

O movimento de líquidos poluentes solúveis no seio dos solos é um fenómeno complexo, onde se combinam processos de transporte das massas solúveis e processos químicos de interacção entre soluto, líquido intersticial e partículas sólidas. Considerando um elemento infinitesimal de solo e aplicando o princípio da conservação da massa pode afirmar-se que a variação da massa de soluto no elemento é igual ao fluxo de soluto que entra no elemento, menos o fluxo de soluto que sai do elemento, acrescido das perdas e/ou ganhos devidas a reacções químicas no interior do elemento.

Os processos de transporte que controlam os fluxos de entrada e saída de massa no volume infinitesimal são a *advecção* e a *dispersão hidrodinâmica*. As perdas e ganhos de massa são regidas por processos de *adsorção* e *degradação*.

A *advecção* é o processo de transporte do soluto promovido pelo escoamento da água intersticial. Existe no entanto uma tendência para que o soluto se espalhe para além da trajectória das linhas de corrente. Este fenómeno de espalhamento é normalmente designado por *dispersão hidrodinâmica* e provoca uma diluição do soluto. A dispersão hidrodinâmica pode ocorrer por *difusão* e/ou *dispersão mecânica.*

A *difusão* é o processo pelo qual os constituintes iónicos ou moleculares do soluto se movimentam na direcção do gradiente de concentração. A difusão ocorre mesmo que não haja escoamento do líquido intersticial. A *dispersão mecânica* é inteiramente devida ao escoamento do líquido e processa-se segundo uma combinação de três efeitos que suscitam alterações localizadas no campo de velocidades do líquido: i) rugosidade das superfícies dos canais de escoamento; ii) sinuosidade e constituição ramificada desses canais e; iii) não uniformidade das dimensões dos canais de escoamento ao longo das trajectórias de fluxo. Assim, para velocidades de escoamento baixas o processo de difusão é dominante e a dispersão hidrodinâmica é independente da velocidade do líquido. À medida que a velocidade de escoamento aumenta, a dispersão mecânica assume um papel dominante e consequentemente o fenómeno de dispersão hidrodinâmica passa a depender da velocidade do líquido.

A *adsorção* é o processo pelo qual ocorrem trocas de iões entre a superfície das partículas sólidas e o soluto, sendo normalmente relevante quando os solos têm uma percentagem significativa de partículas coloidais (argilas). A *degradação* é o processo de perda de massa do soluto devida a reacções químicas ou nucleares.

Resulta então que o movimento de líquidos poluentes solúveis no seio dos solos é governado por processos de advecção, dispersão, adsorção e degradação. A concentração do soluto na água intersticial é uma função do tipo (Arulanandan *et al.*, 1988):

$$C = f\left(\mu, D_{mol}, S, v_l, T_w, \rho_w, g, l, d_{50}, t, \text{propriedades do solo}\right) \tag{54}$$

em que,

C - é a concentração do soluto no líquido intersticial $[ML^{-3}]$;

μ - é a viscosidade dinâmica do líquido intersticial $[ML^{-1}T^{-1}]$;

D_{mol} - é o coeficiente de difusão molecular $[L^2T^{-1}]$;

S - é a massa de soluto adsorvida por unidade de volume $[ML^{-3}]$;

v_l - é a velocidade do líquido intersticial $[LT^{-1}]$;

T_w - é a tensão superficial na interface partícula - fluido $[MT^{-2}]$;

ρ_w - é a massa volúmica do líquido intersticial $[ML^{-3}]$;

g - é a aceleração da gravidade $[LT^{-2}]$;

l - é um comprimento macroscópico característico $[L]$ - (por exemplo: altura da camada);

d_{50} - é a dimensão média das partículas sólidas $[L]$ e;

t - é o tempo $[T]$.

Admitindo mais uma vez que na construção do modelo se recorre aos materiais protótipo, as propriedades dos materiais são idênticas no modelo e protótipo, pelo que não serão incluídas na análise dimensional do problema. Assim, a formulação adimensional de (54) é:

$$\Phi\left(\frac{C}{\rho_w}, \frac{\rho_w v_l d_{50}}{\mu}, \frac{v_l t}{l}, \frac{D_{mol} t}{l^2}, \frac{\rho_w g l d_{50}}{T_w}, \frac{S}{\rho_w}, \frac{g t^2}{l}, \frac{v_l d_{50}}{D_{mol}}\right) = 0 \tag{55}$$

As leis de modelação correspondentes são ($\pi_i = 1$; $i = 1,\dots,8$):

π_1 (número de concentração),

$$C^* = \rho_w{}^* \tag{56}$$

π_2 (número de Reynolds),

$$\mu^* = \rho_w{}^* \, v_l{}^* \, d_{50}{}^* \tag{57}$$

π_3 (número de advecção),

$$v_l * t^* = l^* \tag{58}$$

π_4 (número de difusão),

$$D_{mol} * t^* = (l^*)^2 \tag{59}$$

π_5 (número de capilaridade),

$$\rho_w * g * l * d_{50}^* = T_w^* \tag{60}$$

π_6 (número de adsorção),

$$S^* = \rho_w^* \tag{61}$$

π_7 (número dinâmico),

$$g^* (t^*)^2 = l^* \tag{62}$$

π_8 (número de Peclet),

$$v_l * d_{50}^* = D_{mol}^* \tag{63}$$

4 – TÉCNICAS DE MODELAÇÃO FÍSICA EM GEOTECNIA

4.1 – Generalidades

No âmbito da geotecnia existem três técnicas alternativas de modelação física. Na primeira, designada genericamente por *modelação física convencional*, os modelos físicos são ensaiados em campo gravítico normal, não se recorrendo a qualquer forma artificial de simulação de forças volúmicas gravitacionais. Os modelos convencionais são normalmente construídos com materiais idênticos aos materiais protótipo, uma vez que, conforme se referiu em 3.1, a complexidade do comportamento reológico dos solos inviabiliza o emprego de materiais de substituição.

No entanto, o emprego dos materiais protótipo não é só por si suficiente para garantir a semelhança reológica. Como se verá adiante, os modelos reduzidos convencionais não verificam os critérios de semelhança reológica (*vide* lei de modelação (36)), uma vez que os estados de tensão por eles experimentados são muito inferiores aos dos respectivos protótipos.

Para conseguir garantir o cumprimento das condições de semelhança reológica é necessário construir os modelos com os mesmos materiais e submetê-los a níveis de tensão iguais aos do protótipo. Para tal a escala de tensões (σ^*) deverá ser unitária. Com efeito, se partes homólogas do meio particulado, uma no protótipo e outra no modelo, forem sujeitos à mesma trajectória de tensões, as respectivas deformações serão necessariamente idênticas, seja qual for o regime em que se processem (linear ou não linear, elástico ou plástico) e independentemente da trajectória seguida, ficando assim automaticamente cumpridas as condições de semelhança que dizem respeito às relações tensões-deformações (Correia, 1991).

Para obter uma escala unitária de tensões há que aplicar ao modelo reduzido forças volúmicas artificiais mais elevadas do que as que actuam no protótipo, na mesma proporção com que são reduzidas as dimensões geométricas (isto é, se for $l^*=1/N$ deverá ter-se $g^*=1/l^*=N$).

No domínio da geotecnia existem duas técnicas alternativas para gerar esse campo artificial de forças volúmicas. A primeira é a *técnica do gradiente hidráulico*. As forças volúmicas do campo são forças de percolação, introduzidas no modelo à custa de um escoamento vertical forçado. A segunda técnica consiste na centrifugação dos modelos. As forças volúmicas artificiais são forças de inércia centrífugas, induzidas no modelo à custa de um movimento de rotação em torno de um eixo.

À técnica do gradiente hidráulico estão associadas importantes limitações práticas, dadas as dificuldades de garantir a uniformidade do campo artificial de forças, razão que justifica a preferência generalizada pela técnica de centrifugação.

A possibilidade de obter o mesmo nível de tensões no modelo e no protótipo, recorrendo à centrifugação, revela-se de importância fundamental, uma vez que se consegue contornar o praticamente intratável problema da semelhança reológica, principal obstáculo à melhoria da qualidade e ao alargamento dos domínios de aplicação da modelação física convencional (Correia, 1991).

4.2 – Fundamentos das técnicas de modelação física

Considerem-se então dois sistemas geometricamente semelhantes (§2.2.2), tais que:

$$x_{i_m} = l^* x_{i_p} \qquad (i = 1,2,3) \tag{64}$$

$$t_m = t^* t_p \tag{65}$$

em que os índices *m* e *p* indicam respectivamente o sistema modelo e o sistema protótipo e l^* e t^* são os factores de escala de comprimentos e de tempo.

No modelo, o vector velocidade de qualquer ponto é:

$$v_{i_m} = \frac{dx_{i_m}}{dt_m} \qquad (i = 1,2,3) \tag{66}$$

Atendendo às equações (64) e (65) tem-se:

$$v_{i_m} = \frac{l^*}{t^*}\frac{dx_{i_p}}{dt_p} \qquad (i = 1,2,3) \tag{67}$$

ou,

$$v_{i_m} = \frac{l^*}{t^*} v_{i_p} \qquad (i = 1,2,3) \tag{68}$$

Conclui-se portanto que o factor de escala de velocidades é:

$$v^* = \frac{l^*}{t^*} \tag{69}$$

Por outro lado o vector aceleração de qualquer ponto do modelo é dado por:

$$a_{i_m} = \frac{dv_{i_m}}{dt_m} \qquad (i = 1,2,3) \tag{70}$$

pelo que, atendendo às expressões (68) e (65),

$$a_{i_m} = \frac{l^*}{(t^*)^2} a_{i_p} \qquad (i = 1,2,3) \tag{71}$$

ou seja,

$$a^* = \frac{l^*}{(t^*)^2} \tag{72}$$

Se os dois sistemas geometricamente semelhantes ((64) e (65)) tiverem distribuições de massa também semelhantes, isto é, se:

$$m_m = m^* m_p \tag{73}$$

em que, m_m e m_p são as massas de partes homólogas, respectivamente no sistema modelo e protótipo, e m^* é o correspondente factor de escala, aplicando a lei de Newton, tem-se:

$$F_{i_m} = m_m a_{i_p} \qquad (i = 1,2,3) \tag{74}$$

Atendendo a (71) e (73) e substituindo valores em (74) obtém-se:

$$F^* = m^* \frac{l^*}{(t^*)^2} \tag{75}$$

em que F^* é o factor de escala de forças.

4.3 – Modelação física convencional

Considere-se então que se pretende estudar determinado fenómeno à custa de um modelo físico a escala reduzida, geometricamente semelhante. Imponha-se a escala geométrica de redução:

$$l^* = \frac{1}{N} \tag{76}$$

Recorrendo às técnicas de modelação física convencional, isto é, procedendo aos ensaios sobre modelo em ambiente gravítico normal, o factor de escala das forças gravíticas é:

$$g^* = 1 \tag{77}$$

Por outro lado, se se admitir que os materiais do modelo são idênticos aos do protótipo, o factor de escala de massas volúmicas é:

$$\rho^* = 1 \tag{78}$$

Sendo, por definição,

$$\rho^* = \frac{m^*}{(l^*)^3} \tag{79}$$

atendendo a (76) vem,

$$m^* = \frac{1}{N^3} \tag{80}$$

Recorrendo à lei de Newton para um corpo em repouso submetido a um campo gravitacional uniforme pode-se escrever:

$$F^* = m^* g^* \tag{81}$$

pelo que (introduzindo (77) e (80)),

$$F^* = \frac{1}{N^3} \tag{82}$$

O factor de escala de tensões é definido por:

$$\sigma^* = \frac{F^*}{(l^*)^2} \tag{83}$$

ou seja, atendendo a (82) e a (76),

$$\sigma^* = \frac{1}{N} \tag{84}$$

Substituindo os resultados de (82), (80) e (76) em (75) obtém-se,

$$t^* = \sqrt{\frac{1}{N}} \tag{85}$$

Por outro lado, substituindo valores em (69) e em (72) vem,

$$v^* = \sqrt{\frac{1}{N}} \tag{86}$$

$$a^* = 1 \tag{87}$$

Os valores dos factores de escala assim deduzidos constituem, no seu conjunto, os factores de escala fundamentais associados à modelação física convencional com materiais idênticos aos materiais protótipo. Atente-se que estes factores de escala derivam exclusivamente dos pressupostos inerentes à técnica de modelação física em análise, não traduzindo portanto nenhum objectivo de semelhança, ao contrário dos factores de escala (leis de modelação) estabelecidos em 3.2. Ou seja, os valores dos factores de escala de comprimento, tempo, velocidade, aceleração, massa, força e tensão agora obtidos são impostos pela técnica de modelação física e independentes dos fenómenos a estudar em modelo.

Assim sendo, podem evidentemente surgir problemas de conflito de escalas, isto é, os factores de escala associados à técnica de modelação física podem suscitar o desrespeito por alguma ou algumas das leis de modelação estabelecidas para determinado fenómeno. É exactamente a partir da discussão desses problemas de conflito de escalas que se pode inferir o mérito relativo de uma técnica de modelação por oposição a outra.

4.4 – Modelação física com centrifugadora

Considere-se agora a técnica de modelação física com centrifugadora e proceda-se de forma em tudo idêntica à apresentada em 4.3. para o estabelecimento dos correspondentes factores de escala fundamentais.

Limite-se mais uma vez a discussão ao caso de modelos físicos a escala reduzida geometricamente semelhantes. Imponha-se o factor de escala geométrica de acordo com (76) e admita-se que os ensaios sobre modelo são realizados sob um campo artificial de aceleração N vezes superior ao da gravidade, em que N é o factor de redução geométrica. Assim sendo tem-se:

$$g^* = N \tag{88}$$

pelo que, se os materiais modelo forem idênticos aos do protótipo (78) vem,

$$m^* = \frac{1}{N^3} \tag{89}$$

Da segunda lei de Newton (81) decorre que:

$$F^* = \frac{1}{N^2} \tag{90}$$

Por outro lado, atendendo a (83),

$$\sigma^* = 1 \tag{91}$$

Finalmente de (75), (69) e (72) obtém-se respectivamente:

$$t^* = \frac{1}{N} \tag{92}$$

$$v^* = 1 \tag{93}$$

$$a^* = N \tag{94}$$

4.5 – Mérito relativo das técnicas de modelação física

No Quadro 1 apresenta-se o resumo dos factores de escala fundamentais deduzidos em 4.3 e 4.4, respectivamente para as técnicas de modelação física convencional e com centrifugadora.

Quadro 1 - Factores de escala fundamentais à modelação física com materiais protótipo

Grandeza	Factor de escala	
	Modelação Física Convencional	Modelação Física com Centrifugadora
Comprimento (l*)	N^{-1}	N^{-1}
Tempo (t*)	$N^{-1/2}$	N^{-1}
Velocidade (v*)	$N^{-1/2}$	1
Aceleração (a*)	1	N
Massa (m*)	N^{-3}	N^{-3}
Força (F*)	N^{-3}	N^{-2}
Tensão/Pressão (σ*)	N^{-1}	1

Tendo por base estes factores de escala fundamentais apresentam-se nos Quadros 2 e 3 as condições de validade das leis de modelação estabelecidas em 3.2 para problemas geotécnicos em que a deformação do meio particulado não é acompanhada por processos de escoamento. O Quadro 2 refere-se à modelação física convencional, tratando-se no Quadro 3 da modelação física com centrifugadora.

Da análise do Quadro 2 constata-se que as principais leis de modelação são respeitadas, à excepção da condição (36) - $\sigma^*=1$, resultante da necessidade de garantir a semelhança das relações constitutivas. Repare-se que, mesmo utilizando os materiais protótipo para a construção dos modelos reduzidos convencionais, o facto dos níveis de tensão serem muito inferiores aos dos respectivos protótipos inviabiliza a possibilidade de existir semelhança reológica.

Quadro 2 - Modelação física convencional: validade das leis de modelação fundamentais

Problema	Variável dependente (vd)	Leis de modelação	Hipóteses inerentes à técnica de modelação		
			G* impostos	G* da vd	Observações
Equilíbrio	σ_{ij}	(12) $\sigma^*=\rho^*g^*l^*$ (13) $\delta^*=g^*(t^*)^2$	$\sigma^*=1/N=\rho^*g^*l^*=1/N$ $\delta^*=1/N=g^*(t^*)^2=1/N$	$\sigma^*=1/N$	(12) é válida (13) é válida
Defor.- Desloc.	ε_{ij}	(21) $\delta^*=l^*$	$\delta^*=1/N=l^*=1/N$	$\varepsilon^*=1$	(21) é válida
Eq. Fronteira	T_i	(24) $T^*=\sigma^*$	$\sigma^*=1/N$	$T^*=1/N$	(24) é válida
P. Tensão Efect.	σ_{ij}'	(27) $\sigma'^*=\sigma^*=u^*$	$\sigma^*=1/N=u^*=1/N$	$\sigma'^*=1/N$	(27) é válida
Rel. Constitutivas	σ_{ij}'	(36) $\sigma^*=1$ (37) $\varepsilon^*=1$	$\sigma^*=1/N\neq 1$ $\varepsilon^*=1$	$\sigma'^*=1/N$	(36) $\bar{n}$ válida (37) é válida

Quadro 3 - Modelação física com centrifugadora: validade das leis de modelação fundamentais

Problema	Variável dependente (vd)	Leis de modelação	Hipóteses inerentes à técnica de modelação		
			G* impostos	G* da vd	Observações
Equilíbrio	σ_{ij}	(12) $\sigma^*=\rho^*g^*l^*$ (13) $\delta^*=g^*(t^*)^2$	$\sigma^*=1=\rho^*g^*l^*=1$ $\delta^*=1/N=g^*(t^*)^2=1/N$	$\sigma^*=1$	(12) é válida (13) é válida
Defor.- Desloc.	ε_{ij}	(21) $\delta^*=l^*$	$\delta^*=1/N=l^*=1/N$	$\varepsilon^*=1$	(21) é válida
Eq. Fronteira	T_i	(24) $T^*=\sigma^*$	$\sigma^*=1$	$T^*=1$	(24) é válida
P. Tensão Efect.	σ_{ij}'	(27) $\sigma'^*=\sigma^*=u^*$	$\sigma^*=1=u^*=1$	$\sigma'^*=1$	(27) é válida
Rel. Constitutivas	σ_{ij}'	(36) $\sigma^*=1$ (37) $\varepsilon^*=1$	$\sigma^*=1$ $\varepsilon^*=1$	$\sigma'^*=1$	(36) é válida (37) é válida

Já no caso da modelação física com centrifugadora (Quadro 3) atente-se que todas as leis de modelação são respeitadas, garantido-se em particular a semelhança reológica entre os fenómenos modelo e os fenómenos protótipo.

Alargue-se finalmente a discussão do mérito relativo das duas abordagens a fenómenos em que a deformação é acompanhada por processos (transitórios ou estacionários) de escoamento, suscitando uma interacção física entre as fases sólida e líquida do meio particulado. São estes, sem dúvida, os fenómenos com maior interesse prático no âmbito da geotecnia.

Retomem-se então as leis de modelação (42) a (45) e (49) a (51) relativas aos escoamentos laminares em meios porosos, e a expressão (53) - $k^*=g^*$ - que resulta do facto dos materiais empregues no modelo serem os mesmos do protótipo. Nos Quadros 4 e 5 resumem-se as condições de validade das referidas leis de modelação para cada uma das técnicas em análise.

Quadro 4 - Modelação física convencional: validade das leis de modelação de escoamentos

Problema	Variável Dependente (vd)	Leis de modelação	Hipóteses inerentes à técnica de modelação		
			G* impostos	G* da vd	Observações
Escoamento Laminar	$\bar{v}_i$	(42) $\bar{v}^* = k^*$ (43) $k^* = \sqrt{l^* g^*}$ (44) $u^* = \rho^* g^* l^*$	$k^*=g^*=1$ $k^*=1 \neq \sqrt{l^* g^*} = \sqrt{1/N}$ $u^*=1/N = \rho^* g^* l^* = 1/N$	$\bar{v}^* = 1$	(42) é válida (43) $\bar{n}$ válida (44) é válida
Continuidade	ε_{ij}	(49) $\varepsilon^*=1$ (50) $\bar{v}^* = l^*/t^*$	$\varepsilon^*=1$ $\bar{v}^* = 1 \neq l^*/t^* = \sqrt{1/N}$	$\varepsilon^*=1$	(49) é válida (50) $\bar{n}$ válida

Quadro 5 - Modelação física com centrifugadora: validade das leis de modelação de escoamentos

Problema	Variável dependente (vd)	Leis de modelação	Hipóteses inerentes à técnica de modelação		
			G* impostos	G* da vd	Observações
Escoamento Laminar	$\bar{v}_i$	(42) $\bar{v}^* = k^*$ (43) $k^* = \sqrt{l^* g^*}$ (44) $u^* = \rho^* g^* l^*$	$k^*=g^*=N$ $k^*=N \neq \sqrt{l^* g^*} = 1$ $u^*=1 = \rho^* g^* l^* = 1$	$\bar{v}^* = N$	(42) é válida (43) $\bar{n}$ válida (44) é válida
Continuidade	ε_{ij}	(49) $\varepsilon^*=1$ (50) $\bar{v}^* = l^*/t^*$	$\varepsilon^*=1$ $\bar{v}^* = N \neq l^*/t^* = 1$	$\varepsilon^*=1$	(49) é válida (50) $\bar{n}$ válida

Constata-se assim que duas das condições de semelhança em jogo não são respeitadas, quer no caso da modelação física convencional, quer no caso da modelação física com centrifugadora. Vejamos então quais os factores de escala impostos que suscitam a não validade das referidas leis de modelação. Atendendo a (53) e a (42) tem-se:

$$\bar{v}^* = g^* \tag{95}$$

que é o factor de escalas das velocidades aparentes do líquido intersticial. Substituindo este resultado em (50) vem,

$$t^* = \frac{l^*}{g^*} \tag{96}$$

ou seja, sendo $l^*=1/N$, o factor de escala de tempos deveria ser,

$$t^* = \frac{1}{N} \text{ no caso da modelação física convencional } \left(\text{Quadro 1} - t^* = \sqrt{\frac{1}{N}} \right) \text{e,}$$

$$t^* = \frac{1}{N^2} \text{ no caso da modelação física com centrifugadora } \left(\text{Quadro 1} - t^* = \frac{1}{N} \right).$$

Verifica-se portanto que os factores de escala de tempos de ambas as técnicas, associados a fenómenos dinâmicos (aplicação da lei de Newton, *vide* (74)), suscitam o desrespeito pelas condições de semelhança. Do exposto conclui-se que, para o caso de fenómenos em que à deformação do meio particulado por efeitos de inércia se associarem processos de escoamento (consolidação ou difusão), ambas as técnicas de modelação levam à violação de condições de semelhança, havendo a necessidade de proceder a estudos sobre os correspondentes efeitos de escala.

Evidentemente que se no fenómeno em estudo, os efeitos de inércia forem desprezáveis (influência negligenciável de 44), poder-se-à garantir a validade da condição de semelhança (50) à custa da alteração do factor de escala de tempos. Em qualquer caso a lei de modelação (43) é violada. Existe no entanto uma possibilidade para conseguir garantir o respeito simultâneo pelas leis de modelação (43) e (50). Trata-se de utilizar no modelo um líquido intersticial com a mesma massa volúmica, mas com viscosidade dinâmica (μ) respectivamente, $\sqrt{N}$ ou N vezes superior à do líquido intersticial protótipo, consoante se preconize a modelação física convencional ou a modelação física com centrifugadora. Efectivamente, assim fazendo, de (52) resulta,

$$k^* = \frac{g^*}{\mu^*} \tag{97}$$

donde,

$k^* = \sqrt{\dfrac{1}{N}}$ no caso da modelação física convencional e,

$k^* = 1$ no caso da modelação física com centrifugadora.

Nestas condições as leis de modelação (43) e (50) são verificadas e são coerentes com os factores de escala de tempos constantes do Quadro 1 para os casos da modelação física convencional e com centrifugadora.

Considere-se finalmente o problema do transporte de poluentes no seio de meios particulados (§3.2.7), cujo tratamento diferenciado por oposição aos anteriores, resulta do facto de, para os casos com interesse prático, aos fenómenos de transporte não se associarem normalmente deformações do esqueleto sólido, sendo os efeitos de inércia normalmente desprezáveis.

Para velocidades de transporte baixas (caso mais corrente na prática) o regime de escoamento é laminar, donde $\bar{v}^* = g^*$ como se referiu anteriormente (95). Atendendo a que a velocidade do fluido é:

$$v_l = \frac{\bar{v}}{n} \tag{98}$$

em que,

n - é a porosidade do meio particulado, vem,

$$v_l^* = \bar{v}^* = g^* \tag{99}$$

uma vez que $n^* = 1$ (materiais idênticos no modelo e protótipo).

O factor de escala da concentração do soluto no líquido intersticial (variável dependente) é, atendendo a (56),

$$C^* = 1 \tag{100}$$

uma vez que $\rho_w^*=1$, quer no caso da modelação física convencional, quer no caso da modelação física com centrifugadora.

Por outro lado, sendo os materiais modelo idênticos aos materiais protótipo tem-se: $\mu^*=1$; $d_{50}^*=1$. Substituindo valores em (57) - $\mu^*= \rho_w^* v_l^* d_{50}^*$ - obtém-se,

$$1 = g^* \tag{101}$$

A lei de modelação (57) é então válida para o caso da modelação física convencional ($g^*=1$), sendo violada no caso da modelação física com centrifugadora ($g^*=N$).

Como se sabe, o valor do número de Reynolds (π_2 em (55)) caracteriza o tipo de regime de escoamento no seio de um meio particulado: para valores baixos (π_2<10) as forças viscosas predominam e o regime é laminar; para valores altos (π_2>100) as forças de inércia regem o escoamento, que é então turbulento. Para valores intermédios (10<π_2<100) o escoamento inclui-se num regime de transição, em que as forças de inércia influenciam o escoamento laminar. Ora, como se referiu, na grande maioria dos problemas com interesse prático as velocidades de escoamento (protótipo) são baixas, sendo o regime de escoamento laminar (π_{2p}<10), verificando-se que o efeito de escala correspondente à violação de (57) - $\pi_{2p} \neq \pi_{2m}$= N π_{2p} no caso da modelação física com centrifugadora - é desprezável se se garantir que o regime de escoamento no modelo é também laminar (isto é π_{2m}< 10). Assim, basta confirmar que o número de Reynolds do escoamento em modelo centrifugado é menor que 10, para garantir que o movimento do fluido é convenientemente modelado.

De (58) vem $t^*=l^*/v_l^*$. Substituindo l^* e v_l^* pelos seus valores obtém-se: $t^*=1/N$ na modelação física convencional e $t^*=1/N^2$ no caso da modelação física com centrifugadora, que são os factores de escala de tempos para fenómenos de advecção.

O coeficiente de difusão molecular (D_{mol}) depende do volume de vazios. Para materiais idênticos $D_{mol}^*=1$ e de (59) resulta: $t^*=(l^*)^2=1/N^2$. Constata-se assim que o factor de escala de tempos decorrente dos efeitos de difusão é diferente do correspondente aos efeitos de advecção no caso da modelação física convencional, não sendo portanto possível simular em condições de semelhança problemas em que intervenham ambos os fenómenos. Já no caso da modelação física com centrifugadora verifica-se a igualdade dos dois factores de escala, garantindo-se a possibilidade de modelar ambos os fenómenos sem desrespeitar as condições de semelhança correspondentes.

De (60) com materiais idênticos no modelo e no protótipo ($T_w^*=\rho_w^*=d_{50}^*=1$) vem,

$$g^* \, l^* = 1 \tag{102}$$

que traduz a condição de semelhança para fenómenos de capilaridade, mais uma vez violada no caso da modelação física convencional, ao contrário do que se verifica se se recorrer a máquina centrifugadora.

A lei de modelação (61) - $S^*=1$ - relativa a processos de adsorção é válida em ambas as técnicas de modelação.

A lei de modelação (62) permite estabelecer o factor de escala de tempos dinâmico ($t^*=\sqrt{l^*/g^*}$ - $t^* = \sqrt{1/N}$ para a modelação física convencional e $t^* = 1/N$ para a modelação física com centrifugadora), concluindo-se mais uma vez que não é possível reproduzir de forma semelhante fenómenos de transporte em que os efeitos de inércia sejam não desprezáveis (conflitos das diferentes escalas de tempo). Para problemas de escoamento em regime laminar, onde os efeitos das forças de inércia são desprezáveis, esta lei de modelação pode, como se referiu inicialmente, ser negligenciada.

Refira-se finalmente a lei de modelação (63) - $v_l^*=1$ - válida no caso da modelação física convencional, o mesmo não acontecendo para a modelação física com centrifugadora ($v_l^*=N$).

Como se sabe, o número de Peclet (π_8 em (55)) representa a importância relativa dos processos de dispersão mecânica e difusão molecular na dispersão do contaminante: para valores baixos (π_8<0,4) a dispersão do contaminante é regida pelo processo de difusão molecular; para valores altos (π_8>5) o fenómeno é regido pelo processo de dispersão mecânica. Para valores intermédios (0,4<π_8<5) o fenómeno inclui-se numa zona de transição em que é influenciado por ambos os processos. No caso da modelação física com centrifugadora utilizando materiais protótipo, o efeito de escala correspondente à violação de (63) - π_{8p}

$\neq \pi_{8m} = N\,\pi_{8p}$ - é desprezável se se garantir que o valor do número de Peclet é inferior à unidade, tanto no modelo como no protótipo (Hensley e Savvidou, 1995). Em termos práticos verifica-se que esta situação ($\pi_8 < 1{,}0$ em protótipo) é muito frequente, pelo que se se conseguir manter o número de Peclet modelo abaixo deste valor, garante-se uma modelação conveniente do fenómeno de dispersão do poluente. No entanto, quando π_{8m} é maior que a unidade, a dispersão do poluente em modelo centrifugado será maior do que a correspondente no protótipo.

No Quadro 6 apresenta-se o resumo das leis de modelação a ter em consideração nos problemas de transporte de poluentes no interior de solos, e as correspondentes condições de validade para a modelação física convencional e para a modelação física com centrifugadora.

Da comparação das duas técnicas resulta um balanço claramente favorável à modelação física com centrifugadora, uma vez que embora as condições de semelhança violadas possam introduzir efeitos de escala significativos, os factores de escala de tempos, correspondentes aos diferentes fenómenos em jogo, são coerentes entre si, se os efeitos de inércia forem desprezáveis (caso mais corrente na prática). Acresce, que para alguns problemas com interesse prático (número de Peclet inferior à unidade no modelo e no protótipo) a violação da lei de modelação (63) não acarreta efeitos de escala.

A modelação física com centrifugadora permite assim modelar problemas de transporte de poluentes em que não intervenham efeitos de inércia nem fenómenos de dispersão mecânica, bastando para tal utilizar um factor de escala de tempos de $1/N^2$.

Quadro 6 - Condições de validade das leis de modelação em problemas de transporte de poluentes

Lei de modelação	Modelação física convencional	Modelação física com centrifugadora
(57) $\mu^* = \rho_w^* v_i^* d_{50}^*$	Válida	Não válida (efeito de escala desprezável)
(58) $v_i^* t^* = l^*$	Válida com $t^* = N^{-1}$	Válida com $t^* = N^{-2}$
(59) $D_{mol}^* t^* = (l^*)^2$	Válida com $t^* = N^{-2}$	Válida com $t^* = N^{-2}$
(60) $T_w^* = \rho_w^* g^* l^* d_{50}^*$	Não válida (efeito de escala significativo)	Válida
(61) $S^* = \rho_w^*$	Válida	Válida
(62) $g^*(t^*)^2 = l^*$ (normalmente negligenciável)	Válida com $t^* = N^{-1/2}$	Válida com $t^* = N^{-1}$
(63) $v_i^* d_{50}^* = D_{mol}^*$	Válida	Não válida (efeito de escala significativo)

5 - CONSIDERAÇÕES FINAIS

A complexidade do comportamento reológico dos solos levou desde sempre, e muito naturalmente, os engenheiros geotécnicos a fazer apelo a ensaios em modelo reduzido para o estabelecimento de regras de dimensionamento. Esta atitude encontra-se bem ilustrada em matérias como as da capacidade resistente de fundações superficiais e profundas ou da estabilidade de estruturas de suporte.

No entanto, a maior parte destes ensaios foi realizada em laboratório sob gravidade normal, o que se traduz pela violação de condições de semelhança fundamentais, perdendo-se a garantia de que a *essência* do fenómeno observado em modelo reduzido é idêntica à do protótipo. Assim, a validade da transposição de resultados para obras reais foi muitas vezes posta em causa, nomeadamente sempre que em paralelo aos estudos em modelo se dispunha de resultados de ensaios em verdadeira grandeza.

Actualmente, o advento de técnicas de ensaio que permitem assegurar o respeito pelas condições de semelhança reológica, nomeadamente o desenvolvimento da tecnologia de centrifugação de modelos, deve permitir dissipar o sentimento de suspeição reinante na comunidade geotécnica em torno da modelação física a escala reduzida, dando à abordagem experimental um lugar idêntico àquele que ocupa nas outras áreas da Engenharia.

Nesse sentido, o Departamento de Geotecnia do Laboratório Nacional de Engenharia Civil adquiriu uma máquina centrifugadora, especialmente concebida para modelação física em geotecnia.

Neste artigo fundamentou-se de um ponto de vista teórico a aplicação da tecnologia de centrifugação no âmbito da disciplina de modelação. Privilegiou-se o tratamento detalhado dos requisitos de semelhança, explicitando as leis de modelação relevantes no estudo de problemas geotécnicos e analisando o mérito relativo das técnicas experimentais disponíveis. Dessa comparação resulta um balanço francamente favorável à modelação física com centrifugadora.

AGRADECIMENTOS

Este trabalho foi subsidiado pelo Subprograma para a Ciência e Tecnologia do Quadro Comunitário de Apoio, através do Projecto POCTI/ECM/2599/95.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arulanandan, K.; Thompson, P.; Kutter; Meegoda; Muraleetharan; Yogachandran (1988)
Centrifuge modelling of transport processes for pollutants in soils
Journal of Geotechnical Engineering, Vol. 114, nº 2, ASCE, pp. 185-205

Correia, R. P. (1991)
Modelação física com centrifugadora em geotecnia
LNEC, Lisboa

Corté, J.F.; Garnier J. (1986)
La Centrifugeuse - Un outil de recherche national pour les études sur modèle réduit en géotechnique
Bull. Liaison LCPC, Vol. 146, pp. 5-28

Hensley, P.; Savvidou, C. (1995)
Environmental geomechanics and transport processes
Geotechnical centrifuge technology, Blackie Academic & Professional, R. N. Taylor, Glasgow, pp. 196-263

Langhaar, H. L. (1951)
Dimensional analysis and theory of models
John Wiley, New York

Portugal, J. C. (1999)
"Modelação Física com Centrifugadora"
Dissertação apresentada à Universidade Técnica de Lisboa (IST) para obtenção do grau de Doutor em Engenharia Civil.

Rocha, M.; Folque, J. (1955)
Conditions de similitude dans l'étude sur modèles de problèmes de mécanique du sol
Supplément aux Annales de L'Institut Technique du Bâtiment et des Travaux Publics, Vol. 86, pp. 155-166