

MODELO REOLÓGICO DE NEWTON SUJEITO A UMA TENSÃO PARABÓLICA CÍCLICA

A rheological Newton model submitted to a cyclic parabolic stress

Fernando Peres Rodrigues*

RESUMO - Estuda-se o modelo reológico de Newton dos materiais perfeitamente viscosos, sujeitos a uma tensão parabólica cíclica, verificando-se que as suas extensões ao longo do tempo seguem uma lei ondulatória, cujos pontos de inflexão definem uma recta passando pela origem. Esta recta corresponde à fluência estacionária do modelo de Newton sujeito a uma tensão igual ao valor médio da tensão parabólica. Quando o semi-período da tensão aplicada tende para zero, a extensão tende para a fluência estacionária referida.

SYNOPSIS - The rheological Newton model of the perfectly viscous materials subjected to a cyclic parabolic stress is studied. The strain-time law is ondulatory and the inflexion points define a straight line passing at the origin. This straight line corresponds to the stationary creep of the Newton model subjected to a stress equal to the average value of the parabolic stress. When the semi-period of the applied stress tends to zero the strain tends to the referred stationary creep.

1 - INTRODUÇÃO

Em continuação do estudo já apresentado relativo à análise da extensão resultante da aplicação de uma tensão linear cíclica a cinco modelos reológicos com aplicação na Geotecnia em geral e na Mecânica das Rochas em particular (modelos de Newton, Maxwell, Kelvin, Nakamura e Burger's) vai ser iniciado o mesmo estudo resultante da aplicação de uma tensão parabólica cíclica aos mesmos modelos reológicos.

Apresenta-se a seguir o estudo relativo ao modelo reológico de Newton seguindo um esquema semelhante ao da tensão linear cíclica.

2 - RELAÇÃO EXTENSÃO-TEMPO E DIAGRAMAS

O modelo de Newton, também denominado amortecedor, é formado por um êmbolo que se desloca num cilindro contendo um líquido viscoso (Figura 1) e representa os materiais perfeitamente viscosos ou de Newton (Rocha, 1981).

A sua equação reológica é

$$\sigma = K\dot{\varepsilon} = K\frac{d\varepsilon}{dt} \quad (1)$$

sendo:

- σ - tensão normal;
- K - constante que caracteriza o amortecedor;
- ε - extensão normal;
- t - tempo.

Submeta-se o modelo de Newton a n ciclos iguais de tensão parabólica de período $2T$, como se indica na Figura 2.

* Investigador pelo LNEC e do CEGEO do IST.

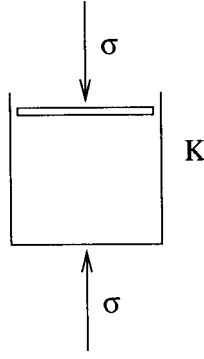


Fig. 1 - Representação esquemática do modelo de Newton.

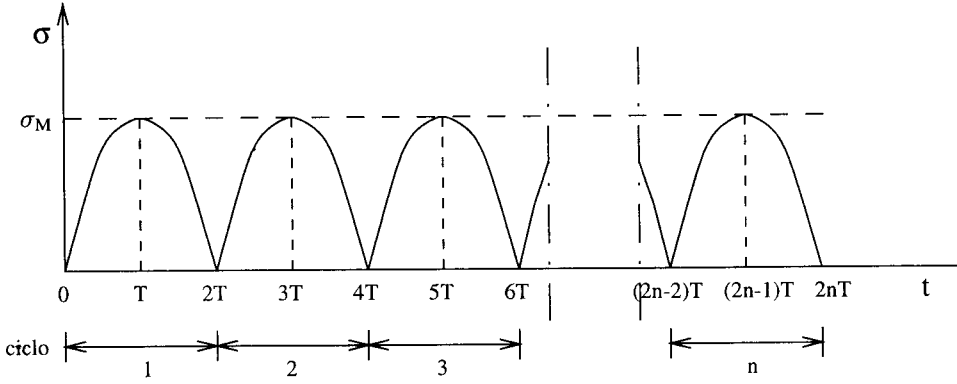


Fig. 2 - Ciclos de tensão parabólica.

A tensão parabólica, σ , do ciclo de ordem n , de valor máximo σ_M , será definida pelos seguintes três pontos:

$$\left\{ \begin{array}{l} t = (2n-2)T \\ \sigma = 0 \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} t = (2n-1)T \\ \sigma = \sigma_M \end{array} \right\} \quad \text{e} \quad \left\{ \begin{array}{l} t = 2nT \\ \sigma = 0 \end{array} \right\} \quad (2)$$

sendo a equação da tensão parabólica genérica do ciclo de ordem n dada por:

$$\sigma = a + bt + ct^2 \quad (3)$$

A condição da equação (3) passar pelos três pontos indicados em (2) conduz ao sistema de três equações lineares seguintes:

$$\left\{ \begin{array}{l} a + b(2n-2)T + c(2n-2)^2T^2 = 0 \\ a + b(2n-1)T + c(2n-1)^2T^2 = \sigma_M \\ a + 2bnT + c(2n)^2T^2 = 0 \end{array} \right. \quad (4)$$

que, resolvido, permitirá escrever a equação de definição da tensão parabólica no ciclo de ordem n :

$$\sigma = \frac{4\sigma_M}{3} \left[-3n(n-1) + \frac{3}{2}(2n-1)\frac{t}{T} - \frac{3}{4}\left(\frac{t}{T}\right)^2 \right] \text{ com } n \in [N] \quad (5)$$

sendo $[N]$ o conjunto dos números naturais e o domínio da variável t do ciclo de ordem n será dado por:

$$(2n-2)T \leq t \leq 2nT \quad (6)$$

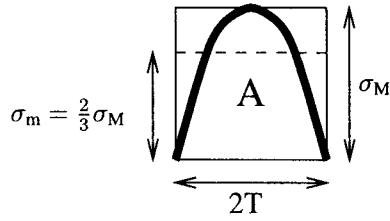


Fig. 3 - Parábola de semi-período T .

A área da tensão parabólica genérica, A , do ciclo de ordem n , será dada, atendendo a (5) e a (6), por:

$$A = \int_{(2n-2)T}^{2nT} \sigma dt = \frac{4\sigma_M}{3} \left[-3n(n-1)t + \frac{3}{4}(2n-1)\frac{t^2}{T} - \frac{1}{4}\frac{t^3}{T^2} \right]_{(2n-2)T}^{2nT} = \frac{4\sigma_M T}{3} \quad (7)$$

Como seria de esperar, a área A é independente da ordem n do ciclo, dependendo apenas da tensão máxima, σ_M , e do semi-período, T .

O valor médio, σ_m , da tensão parabólica aplicada é dado, atendendo a (7), por:

$$\sigma_m = \frac{A}{2T} = \frac{2}{3}\sigma_M \quad (8)$$

A fórmula (7), como seria de esperar, mostra que a área da parábola é igual a $\frac{2}{3}$ da área do rectângulo que a circunscreve, e a fórmula (8) que a área da parábola é igual à do rectângulo com a mesma base e de altura igual a $\frac{2}{3}$ da altura da parábola (Figura 3).

Da equação (1) resulta que a extensão $\varepsilon(t)$ será dada por:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 + \frac{1}{K} \int_{t_0}^t \sigma dt \quad (9)$$

sendo:

- ε_0 — extensão sofrida até ao início do ciclo de ordem n ;
- t_0 — tempo do início do ciclo de ordem n .

A substituição em (9) de (5) permite calcular a evolução da extensão $\varepsilon(t)$ com a evolução da tensão parabólica no ciclo de ordem n , tendo em consideração o domínio definido em (6):

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) &= \frac{4\sigma_M}{3K} \int_{(2n-2)T}^t \left[-3n(n-1) + \frac{3}{2}(2n-1)\frac{t}{T} - \frac{3}{4}\left(\frac{t}{T}\right)^2 \right] dt = \\ &= \frac{4\sigma_M T}{3K} \left\{ -\frac{1}{4}\left(\frac{t}{T}\right)^3 + \frac{3}{4}(2n-1)\left(\frac{t}{T}\right)^2 - 3n(n-1)\frac{t}{T} + (n-1)^2(2n+1) + \varepsilon_0[(2n-2)T] \right\} \quad (10) \end{aligned}$$

A expressão (10) representa uma família de cúbicas tendo como constante de integração, portanto independente da variável t , o termo $\varepsilon_0[(2n-2)T]$ que tem valor nulo para o início da contagem dos tempos, isto é, para $t = 0$.

A extensão $\varepsilon(t)$ é assim representada por troços de cúbicas correspondentes aos intervalos de tempo de cada um dos ciclos considerados.

Para um melhor conhecimento desta família de cúbicas, procure-se os lugares geométricos dos seus pontos máximos, mínimos e de inflexão.

Os pontos máximos e mínimos serão os pontos que anulam a 1ª derivada de (10):

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{4\sigma_M T}{3K} \left[-\frac{3}{4} \left(\frac{t}{T} \right)^2 + \frac{3}{2} (2n-1) \frac{t}{T} - 3n(n-1) \right] \quad (11)$$

Igualando a zero e resolvendo a equação, obtém-se:

$$t_1 = 2(n-1)T \text{ e } t_2 = 2nT \quad (12)$$

a que correspondem, por substituição em (10), as ordenadas genéricas:

$$\varepsilon(t_1) = \frac{4\sigma_M T}{3K} \{ \varepsilon[(2n-2)T] \} \text{ e } \varepsilon(t_2) = \frac{4\sigma_M T}{3K} \{ 1 + \varepsilon[(2n-2)T] \} \quad (13)$$

Os pontos máximos e mínimos genéricos pertencem aos extremos de cada ciclo de ordem n , em face dos valores t_1 e t_2 dados por (12).

Por esta constatação vai ser possível calcular o valor da constante de integração, sabendo que, por convenção:

$$\varepsilon[0] = 0 \quad (14)$$

Para $n = 1$ as expressões (12) e (13) conduzem a:

$$\left\{ \begin{array}{l} t_1 = 0 \\ \varepsilon(0) = \frac{4\sigma_M T}{3K} [1 - 1] = 0 \end{array} \right. \text{ e } \left\{ \begin{array}{l} t_2 = 2T \\ \varepsilon(2T) = \frac{4\sigma_M T}{3K} [1 + 0] = \frac{4\sigma_M T}{3K} [2 - 1] \end{array} \right. \quad (15)$$

Para $n = 2$ ter-se-á, atendendo a (12), (10), (13) e (15):

$$\left\{ \begin{array}{l} t_1 = 2T \\ \varepsilon(2T) = \frac{4\sigma_M T}{3K} [2 - 1] \end{array} \right. \text{ e } \left\{ \begin{array}{l} t_2 = 4T \\ \varepsilon(4T) = \frac{4\sigma_M T}{3K} [3 - 1] \end{array} \right. \quad (16)$$

Para $n = 3$ vem:

$$\left\{ \begin{array}{l} t_1 = 4T \\ \varepsilon(4T) = \frac{4\sigma_M T}{3K} [3 - 1] \end{array} \right. \text{ e } \left\{ \begin{array}{l} t_2 = 6T \\ \varepsilon(6T) = \frac{4\sigma_M T}{3K} [4 - 1] \end{array} \right. \quad (17)$$

donde se infere que:

$$\varepsilon[(2n-2)T] = \frac{4\sigma_M T}{3K} (n-1) \quad (18)$$

que substituindo em (10) permite escrever, finalmente, a expressão da família de cúbicas definidoras das extensões correspondentes à carga parabólica cíclica considerada:

$$\varepsilon(t) = \frac{4\sigma_M T}{3K} \left\{ -\frac{1}{4} \left(\frac{t}{T} \right)^3 + \frac{3}{4} (2n-1) \left(\frac{t}{T} \right)^2 - 3n(n-1) \frac{t}{T} + n(n-1)(2n-1) \right\} \quad (19)$$

Os pontos de inflexão genéricos serão os que anulam a 2ª derivada de (10) ou (19) ou a 1ª derivada de (11):

$$\frac{d^2\varepsilon}{dt^2} = \frac{4\sigma_M T}{3K} \left[-\frac{3}{2} \frac{t}{T} + \frac{3}{2} (2n-1) \right] \quad (20)$$

donde resultam as abcissas genéricas t_i dos pontos de inflexão:

$$t_i = (2n-1)T \quad (21)$$

que são as abcissas médias das dos pontos máximos e mínimos dados por (12) e que substituídas em (19) permitem obter as extensões genéricas dos pontos de inflexão:

$$\varepsilon(t_i) = \frac{4\sigma_M T}{3K} \frac{1}{2} (2n - 1) \quad (22)$$

As abcissas genéricas dos pontos máximos e mínimos t_1 e t_2 , dadas por (12), permitem substituídas em (20) determinar o sinal da 2ª derivada e, assim, identificar:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\varepsilon}{dt^2} [2(n-1)T] &= \frac{5}{2} > 0 \text{ mínimos} \\ \frac{d^2\varepsilon}{dt^2} [2nT] &= -1 < 0 \text{ máximos} \end{aligned}$$

A substituição de (18) em (13) e as expressões (12) permitem, finalmente, escrever as coordenadas genéricas dos pontos mínimos:

$$t_1 = 2(n-1)T \text{ e } \varepsilon(t_1) = \frac{4\sigma_M T}{3K} (n-1) \quad (23)$$

e dos pontos máximos:

$$t_2 = 2nT \text{ e } \varepsilon(t_2) = \frac{4\sigma_M T}{3K} n \quad (24)$$

Verifica-se que os pontos genéricos máximos, mínimos e de inflexão estão alinhados e passam pela origem das coordenadas; sendo assim, haverá proporcionalidade entre as suas coordenadas genéricas. Tendo em atenção (21), (22), (23) e (24) ter-se-á:

$$\frac{\varepsilon(t_1)}{t_1} = \frac{\varepsilon(t_2)}{t_2} = \frac{\varepsilon(t_i)}{t_i} \quad (25)$$

ou seja, o coeficiente angular da recta será

$$\frac{\frac{4\sigma_M T}{3K} (n-1)}{2(n-1)T} = \frac{\frac{4\sigma_M T}{3K} n}{2nT} = \frac{\frac{4\sigma_M T}{3K} \frac{1}{2} (2n-1)}{(2n-1)T} = \frac{2\sigma_M}{3K} \quad (26)$$

e a sua equação dada pela expressão:

$$\varepsilon(t) = \frac{2\sigma_M}{3K} t = \frac{4\sigma_M T}{3K} \frac{1}{2} \frac{t}{T} \quad (27)$$

Esta recta corresponde à extensão por fluência estacionária de uma tensão normal constante de valor:

$$\sigma = \frac{2\sigma_M}{3} \quad (28)$$

igual ao valor médio obtido para a tensão parabólica aplicada (fórmula (8)) o qual, introduzido na expressão (9), tendo em atenção que $\varepsilon_0 = 0$ e integrando entre 0 e t , dá

$$\varepsilon(t) = 0 + \frac{2\sigma_M}{3K} \int_0^t dt = \frac{2\sigma_M}{3K} t \quad (29)$$

igual à expressão (27) como se queria mostrar.

Para que os pontos da curva da extensão (19) comuns a cúbicas contíguas da família não sejam pontos angulosos é necessário que as tangentes nesses pontos apresentem coeficientes angulares iguais à esquerda e à direita, isto é, quando considerados em cúbicas contíguas.

Os coeficientes angulares são obtidos a partir da 1ª derivada, expressão (11), fazendo $t = (2n-2)T$, considerado como ponto da cúbica do ciclo de ordem n :

$$\frac{d\varepsilon}{dt} [(2n-2)T] = 0 \quad (30)$$

o que mostra que a tangente é horizontal.

Para se ter o coeficiente angular do mesmo ponto, mas pertencendo à cúbica do ciclo de ordem $(n - 1)$, deve substituir-se n por $(n - 1)$ na expressão (11), donde:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{4\sigma_M T}{3K} \left[-\frac{3}{4} \left(\frac{t}{T} \right)^2 + \frac{3}{2} (2n - 3) \frac{t}{T} - 3(n - 1)(n - 2) \right] \quad (31)$$

que, no ponto $t = (2n - 2)T$ assume o valor:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} [(2n - 2)T] = 0 \quad (32)$$

igual ao obtido em (31), o que mostra serem as duas tangentes coincidentes, não sendo, por isso, angulosos os pontos considerados.

Na Figura 4 encontram-se representadas as quatro primeiras cúbicas da família e as correspondentes tensões normais parabólicas em função do tempo e dos ciclos referidos a dois sistemas de eixos (ε, t) e (σ, t) , ortonormados e monométricos, isto é, com graduações iguais, indicando-se em cada um deles a factor de escala que permite esta circunstância. Os factores de escala foram os mesmos apresentados em Peres Rodrigues (1990) e em Peres Rodrigues (1995) para uma mais fácil comparação das duas tensões cíclicas utilizadas. Igualmente se representa a recta (27) lugar geométrico dos pontos máximos, mínimos e de inflexão da família de cúbicas.

Apresenta-se o Quadro 1 que permitiu traçar as quatro primeiras cúbicas da família, sendo assinaladas a “**bold**” as ordenadas dos pontos das cúbicas pertencentes às extensões devidas à tensão parabólica cíclica aplicada.

No Quadro 2 apresentam-se os valores das tensões normais do ciclo de ordem n , tendo como unidade σ_M e que permitiu traçar as tensões parabólicas cíclicas das Figuras 2, 3 e 4.

Procure-se agora verificar que as extensões (19) se encontram enquadradas por duas rectas paralelas à recta (27). Para isso determine-se os pontos de (19) que admitem tangente paralela à recta (27), isto é, os valores de t da 1ª derivada (11) que tornem esta igual ao coeficiente angular de (27), portanto que seja:

$$\frac{4\sigma_M T}{3K} \left[-\frac{3}{4} \left(\frac{t}{T} \right)^2 + \frac{3}{2} (2n - 1) \frac{t}{T} - 3n(n - 1) \right] = \frac{4\sigma_M T}{3K} \frac{1}{2} \quad (33)$$

que resolvida conduz a:

$$t_s = \left[(2n - 1) + \sqrt{\frac{1}{3}} \right] T \text{ e } t_i = \left[(2n - 1) - \sqrt{\frac{1}{3}} \right] T \quad (34)$$

Substituindo estes valores em (19) obtêm-se as ordenadas genéricas correspondentes aos pontos tangentes superiores e inferiores do diagrama das extensões:

$$\varepsilon(t_s) = \frac{4\sigma_M T}{3K} \left[n - \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} \sqrt{\frac{1}{3}} \right) \right] \text{ e } \varepsilon(t_i) = \frac{4\sigma_M T}{3K} \left[n - \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \sqrt{\frac{1}{3}} \right) \right] \quad (35)$$

Estes pontos tangentes estão alinhados sobre as duas rectas paralelas:

$$\varepsilon(t_s) = \frac{4\sigma_M T}{3K} \left(\frac{1}{2} \frac{t}{T} + \frac{1}{6} \sqrt{\frac{1}{3}} \right) \text{ recta superior} \quad (36)$$

$$\varepsilon(t_i) = \frac{4\sigma_M T}{3K} \left(\frac{1}{2} \frac{t}{T} - \frac{1}{6} \sqrt{\frac{1}{3}} \right) \text{ recta inferior} \quad (37)$$

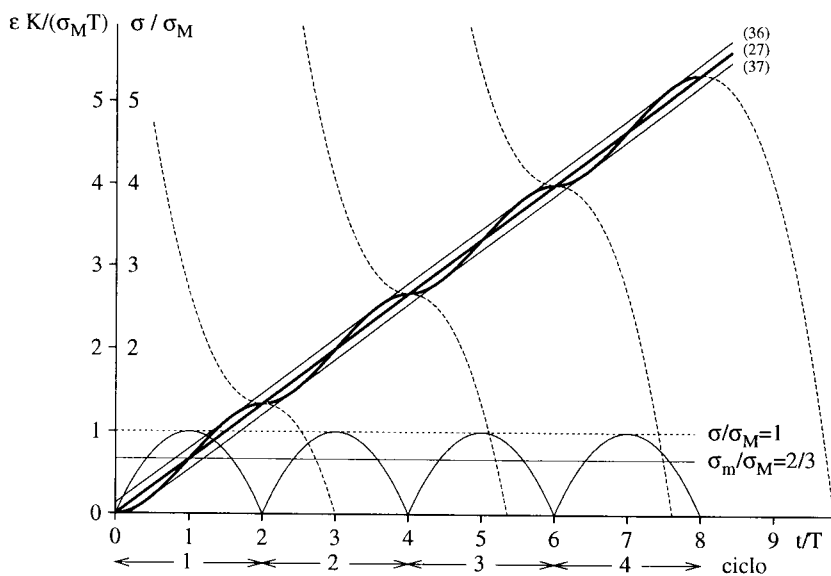


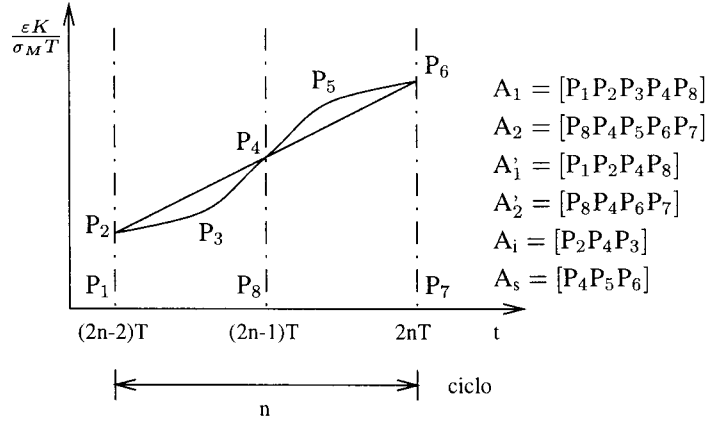
Fig. 4 - Diagramas das extensões e tensões em função de t/T .

Quadro 1 - Valores das extensões normais normalizadas - $\frac{\epsilon K}{\sigma_M T}$

$\frac{t}{T}$	ciclo				$\frac{t}{T}$	ciclo			
	1	2	3	4		1	2	3	4
0	0	8.00000	-	-	5.25	-	0.45312	3.57812	4.70312
0.25	0.05729	6.18229	-	-	5.50	-	-0.70833	3.79167	4.29167
0.50	0.20833	4.70833	-	-	5.75	-	-	3.94271	4.06771
0.75	0.42188	3.54688	-	-	6.00	-	-	4.00000	4.00000
1.00	0.66667	2.66667	-	-	6.25	-	-	3.93229	4.05729
1.25	0.91146	2.03646	-	-	6.50	-	-	3.70833	4.20833
1.50	1.12500	1.62500	-	-	6.75	-	-	3.29688	4.42188
1.75	1.27604	1.40104	-	-	7.00	-	-	2.66667	4.66667
2.00	1.33333	1.33333	9.33333	-	7.25	-	-	1.78646	4.91146
2.25	1.26562	1.39062	7.51562	-	7.50	-	-	0.62500	5.12500
2.50	1.04167	1.54167	6.04167	-	7.75	-	-	-0.84896	5.27604
2.75	0.63021	1.75521	4.88021	-	8.00	-	-	-	5.33333
3.00	0	2.00000	4.00000	-	8.25	-	-	-	5.26562
3.25	-0.88021	2.24479	3.36979	-	8.50	-	-	-	5.04167
3.50	-	2.45833	2.95833	-	8.75	-	-	-	4.63021
3.75	-	2.60938	2.73438	-	9.00	-	-	-	4.00000
4.00	-	2.66667	2.66667	-	9.25	-	-	-	3.11979
4.25	-	2.59896	2.72396	8.84896	9.50	-	-	-	1.95833
4.50	-	2.37500	2.87500	7.37500	9.75	-	-	-	0.48438
4.75	-	1.96554	3.08854	6.21354	10.00	-	-	-	-1.33333
5.00	-	1.33333	3.33333	5.33333	10.25	-	-	-	-

Quadro 2 - Valores das tensões normais normalizadas a σ_M no ciclo de ordem n .

$\frac{t}{T}$	$\frac{\sigma}{\sigma_M}$	$\frac{t}{T}$	$\frac{\sigma}{\sigma_M}$
$2n - 2$	0	$2n - 0.75$	0.9375
$2n - 1.75$	0.4375	$2n - 0.50$	0.7500
$2n - 1.50$	0.7500	$2n - 0.25$	0.4375
$2n - 1.25$	0.9375	$2n - 0$	0
$2n - 1$	1	-	-



que se encontram representadas igualmente na Figura 4.

Prove-se agora que as áreas limitadas em cada ciclo pela curva das extensões (19) e pela recta (27) são iguais.

Por conveniência do estudo vão ser determinadas as áreas indicadas na Figura 5 respeitantes à curva das extensões (19) e da recta (27).

Depois de efectuadas as operações, obteve-se, sucessivamente, no que se refere à curva das extensões (19):

$$A_1 = \int_{(2n-2)T}^{(2n-1)T} \varepsilon(t) dt = \frac{4\sigma_M T^2}{3K} \left(n - \frac{13}{16} \right) \quad (38)$$

$$A_2 = \int_{(2n-1)T}^{2nT} \varepsilon(t) dt = \frac{4\sigma_M T^2}{3K} \left(n - \frac{3}{16} \right) \quad (39)$$

e no que se refere à recta (27):

$$A_1' = \frac{2\sigma_M}{3K} \int_{(2n-2)T}^{(2n-1)T} t dt = \frac{4\sigma_M T^2}{3K} \left(n - \frac{3}{4} \right) \quad (40)$$

$$A_2' = \frac{2\sigma_M}{3K} \int_{(2n-1)T}^{2nT} t dt = \frac{4\sigma_M T^2}{3K} \left(n - \frac{1}{4} \right) \quad (41)$$

A área A_c limitada no ciclo de ordem n pela curva das extensões (19) e pelo eixo dos tempos, t , será então, atendendo a (38) e (39):

$$A_c = A_1 + A_2 = \frac{4\sigma_M T^2}{3K} (2n - 1) \quad (42)$$

A área A_r limitada no ciclo de ordem n pela recta (27) e pelo eixo dos tempos, t , será então, atendendo a (40) e (41):

$$A_r = A_1' + A_2' = \frac{4\sigma_M T^2}{3K} (2n - 1) \quad (43)$$

As expressões (42) e (43) provam a igualdade das áreas pretendidas.

As áreas A_i e A_s limitadas em cada semi-período, T , do ciclo de ordem n pela curva das extensões (19) e pela recta (27) (com interesse no item 3) são dadas pelas seguintes expressões:

$$A_i = A_1' - A_1 = \frac{\sigma_M T^2}{16K} \quad (44)$$

$$A_s = A_2' - A_2 = \frac{\sigma_M T^2}{16K} \quad (45)$$

As áreas A_i e A_s são iguais e independentes da ordem n do ciclo.

Se, num dado instante, t , se retirar a tensão aplicada, o modelo de Newton, dadas as suas características de funcionamento, conservará a extensão sofrida, que servirá de extensão inicial, ε_0 , para uma nova aplicação de tensão, qualquer que seja a sua lei de variação.

3 - CASO DO SEMI-PERÍODO, T , TENDER PARA ZERO

Conservando o valor máximo da tensão parabólica cíclica, σ_M , faça-se tender o semi-período, T , para zero.

As rectas (36) e (37) paralelas à recta (27) e que enquadram a curva das extensões (19), tenderão para a recta (27) quando o semi-período, T , tender para zero, donde, de (36):

$$\lim_{T \rightarrow 0} \varepsilon(t_s) = \frac{4\sigma_M}{3K} \lim_{T \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{6}\sqrt{\frac{1}{3}T} \right) = \frac{2\sigma_M}{3K}t \quad (46)$$

e de (37):

$$\lim_{T \rightarrow 0} \varepsilon(t_i) = \frac{4\sigma_M}{3K} \lim_{T \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2}t - \frac{1}{6}\sqrt{\frac{1}{3}T} \right) = \frac{2\sigma_M}{3K}t \quad (47)$$

o que prova que as rectas (36) e (37) tendem para a recta (27).

Por outro lado, se se determinarem as extensões de (19) correspondentes aos pontos quartos (pontos P_3 e P_5 da Figura 5), do seu domínio (6), ter-se-á para os pontos quartos inferiores (pontos P_3) a abcissa genérica:

$$t = \left(2n - \frac{3}{2}\right)T \quad (48)$$

que, por substituição em (19) e efectuadas as operações adequadas conduz à extensão genérica:

$$\varepsilon \left[\left(2n - \frac{3}{2}\right)T \right] = \frac{2\sigma_M T}{3K} \left(2n - \frac{27}{16}\right) = \frac{2\sigma_M T}{3K} \left(2n - \frac{3}{2} - \frac{3}{16}\right) \quad (49)$$

Tendo em atenção (48), a expressão (49) poderá tomar a forma:

$$\varepsilon \left[\left(2n - \frac{3}{2}\right)T \right] = \frac{2\sigma_M}{3K} \left[\left(2n - \frac{3}{2}\right)T - \frac{3}{16}T \right] = \frac{2\sigma_M}{3K} \left(t - \frac{3}{16}T \right) \quad (50)$$

que, no limite, será:

$$\lim_{T \rightarrow 0} \frac{2\sigma_M}{3K} \left(t - \frac{3}{16}T \right) = \frac{2\sigma_M}{3K}t \quad (51)$$

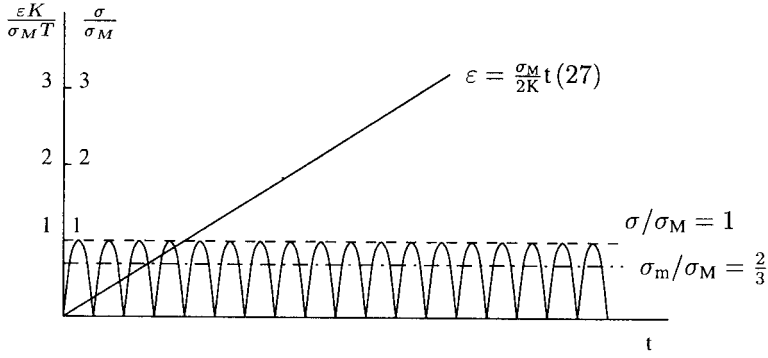


Fig. 6 - Diagrama das extensões e tensões quando o semi-período, T , tende para zero.

Para os pontos quartos superiores (pontos P_5) ter-se-á:

$$t = \left(2n - \frac{1}{2}\right) T \quad (52)$$

com raciocínio idêntico, dará, por substituição em (19) e tendo em atenção (52):

$$\varepsilon \left[\left(2n - \frac{1}{2}\right) T \right] = \frac{2\sigma_M T}{3K} \left(2n - \frac{5}{16}\right) = \frac{2\sigma_M}{3K} \left(t + \frac{3}{16} T\right) \quad (53)$$

que, no limite, será:

$$\lim_{T \rightarrow 0} \frac{2\sigma_M}{3K} \left(t + \frac{3}{16} T\right) = \frac{2\sigma_M}{3K} t \quad (54)$$

As expressões (51) e (54) provam que os pontos quartos da curva das extensões (19) tendem para a recta (27) quando o semi-período, T , tende para zero.

As áreas (44) e (45), iguais e limitadas em cada semi-período T do ciclo de ordem n pela curva das extensões (19) e a recta (27) tendem para zero com o semi-período T , donde:

$$\lim_{T \rightarrow 0} A_i = \lim_{T \rightarrow 0} A_s = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{\sigma_M T^2}{16K} = 0 \quad (55)$$

O valor médio, σ_m , da tensão parabólica aplicada dada pela expressão (8) é independente do semi-período, T , e, portanto, o seu valor mantém-se quando T tender para zero.

Pelo que acaba de se expor, pode-se concluir que quando o semi-período T tende para zero, a família de cúbicas e a curva das extensões correspondentes degeneram e passam a coincidir com a recta (27), recta esta que define uma fluência estacionária quando lhe é aplicada uma tensão normal de valor igual ao valor médio da tensão normal σ_m da carga parabólica aplicada (Figura 6).

4 - CONCLUSÕES

A análise efectuada mostra que um material que seguisse o modelo reológico de Newton e fosse sujeito a uma tensão parabólica cíclica, sofria uma extensão, tipo ondulatório, cujos pontos de inflexão estariam alinhados sobre uma recta que passava pela origem. Esta recta correspondia à fluência estacionária do material considerado submetido a uma tensão constante igual ao valor médio da tensão parabólica aplicada.

Se se fizesse tender o semi-período da tensão parabólica cíclica para zero, a extensão ondulatória degeneraria na recta definida pelos seus pontos de inflexão.

Se num dado instante se retirasse a tensão parabólica cíclica aplicada, o material conservaria a extensão sofrida até então.

A aplicação prática deste estudo está limitada à existência de materiais cujo comportamento reológico se aproxime do modelo de Newton, isto é, que tenham um comportamento quase viscoso perfeito. Serve, sobretudo, para o estudo de outros modelos reológicos que contenham o modelo de Newton na sua constituição, como sejam, por exemplo, os modelos reológicos de Maxwell, Kelvin, Kelvin generalizado ou Nakamura e Burger's.

AGRADECIMENTOS

Agradece-se penhorado a valiosa colaboração do Professor Nuno Guerra do Departamento de Engenharia Civil do Instituto Superior Técnico, sem a qual não teria sido possível esta publicação.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Peres Rodrigues, F. (1990). *Modelo reológico de Newton sujeito a uma tensão linear cíclica*. Geotecnia, Revista da Sociedade Portuguesa de Geotecnia, 60, páginas 27–36.

Peres Rodrigues, F. (1995). *Modelo reológico de Newton submetido a uma tensão linear cíclica. Casos particulares*. Em 5o Congresso Nacional de Geotecnia, volume 2, páginas 143–151, Coimbra.

Rocha, M. (1981). *Mecânica das Rochas*. Laboratório Nacional de Engenharia Civil, Lisboa.