

# RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE CAPACIDADE DE CARGA POR APLICAÇÃO DO TEOREMA DA REGIÃO INFERIOR E DA PROGRAMAÇÃO LINEAR

## Resolution of bearing capacity problems using the Lower Bound Theorem and linear programming

JOSÉ CÂNDIDO G. FREITAS\*  
ANTÓNIO SILVA CARDOSO\*\*

RESUMO - A aplicação do Teorema da Região Inferior a problemas práticos complexos, quer em termos de geometria, quer em termos de acções, é frequentemente difícil. Todavia, as soluções baseadas neste teorema apresentam um enorme interesse para a prática da engenharia dada a sua inerente garantia de segurança.

O problema básico de qualquer análise da região inferior consiste na construção de campos de tensão estaticamente admissíveis que conduzam a soluções que sejam o mais próximas possível da carga de colapso. Neste artigo apresenta-se um método racional para a construção de campos de tensão estaticamente admissíveis que supõe a discretização do domínio em elementos finitos e o uso da programação linear para otimizar a carga de colapso sujeita a um conjunto de restrições entre as tensões. Faz-se a aplicação da metodologia a problemas de capacidade de carga.

SYNOPSIS - The Lower Bound Theorem is a powerful tool for analysing stability problems as it assures getting in a rigorously safe solution. Nevertheless, its application to practical problems with complex geometries and stress fields is usually rather difficult.

The basic problem of any lower bound analysis turns to be constructing statically admissible stress fields conducting to solutions as close as possible to failure conditions. In this work a rational method for this purpose is presented, admitting a discretisation of the soil mass into finite elements and using linear programming to optimise loading subjected to stress constrains. This methodology is applied to bearing capacity problems.

### 1 - OS MÉTODOS DE ANÁLISE LIMITE

Há três condições básicas necessárias para a solução de problemas no âmbito da mecânica dos corpos deformáveis: as equações de equilíbrio, as equações de compatibilidade relacionando deformações com deslocamentos e as relações tensão-deformação.

Em regra, existe, por um lado, um número infinito de estados de tensão que verificam as equações de equilíbrio, o critério de cedência e as condições de fronteira em termos de tensões e, por outro lado, um número infinito de modos de deslocamento compatíveis com uma deformação contínua do corpo e que satisfazem as condições de fronteira em termos de deslocamentos. Portanto, há que usar as relações tensão-deformação para determinar a correspondência entre os estados de tensão e de deformação por forma a encontrar uma solução unívoca. Porém, para um material elasto-plástico, sujeito a um aumento gradual da sollicitação, verifica-se uma evolução do seu estado que passa sucessivamente pela resposta elástica inicial, pela situação intermédia de fluxo plástico contido e, finalmente, pelo fluxo plástico sem

\* Assistente do Departamento de Engenharia Civil da FCTUC

\*\* Professor Associado do Departamento de Engenharia Civil da FEUP

restrições. A solução completa dos problemas elasto-plásticos torna-se, assim, muito complexa, mesmo em casos simples, o que justifica a necessidade de metodologias que forneçam estimativas da capacidade de carga última de um modo mais directo. A análise limite constitui uma metodologia que possibilita a formulação de uma previsão definitiva das cargas de colapso sem que seja necessária uma análise elasto-plástica passo a passo.

Os métodos de análise limite consideram as relações tensão-deformação dos solos de um modo idealizado, isto é, pressupondo o fluxo plástico associado (ou o postulado da estabilidade de Drucker). Esta suposição permite a demonstração dos teoremas limite (ver, por exemplo, Chen e Liu, 1990) que suportam a análise limite, a qual constitui assim uma metodologia analiticamente rigorosa. Os teoremas limite (Teoremas das Regiões Superior e Inferior) podem ser convenientemente usados para obter soluções (incompletas) que limitam superior e inferiormente as cargas de colapso relativas a problemas de estabilidade.

A aplicação de técnicas baseadas no Teorema da Região Superior (T.R.S.) à resolução de problemas de estabilidade no domínio da Mecânica dos Solos, considerando ou não solicitações sísmicas, tem experimentado nos últimos tempos um assinalável avanço (ver, entre outros, Chen e Liu, 1990). A principal virtude da aplicação dessas técnicas reside no facto de, independentemente da complexidade da forma do maciço terroso ou da configuração da solicitação, ser sempre possível obter uma aproximação realista da carga de colapso. Se a isto de associar a relativa simplicidade de aplicação conclui-se da utilidade de tais técnicas.

Entretanto, embora o Teorema da Região Inferior (T.R.I.) constitua também uma ferramenta poderosa para a resolução de problemas de estabilidade, até porque garante a obtenção de soluções inequivocamente seguras, a sua aplicação a problemas práticos com geometrias complexas e sujeitas a sistemas de forças complicados é muitas vezes difícil. Com efeito, o T.R.I. tem sido aplicado menos frequentemente no domínio da Mecânica dos Solos do que o T.R.S. uma vez que é consideravelmente mais simples imaginar um adequado mecanismo de rotura cinematicamente admissível do que construir um apropriado campo de tensões estaticamente admissível. Todavia, se bem que as soluções baseadas no T.R.S. constituam frequentemente boas estimativas das cargas de colapso, as soluções baseadas no T.R.I. apresentam um enorme interesse para a prática da engenharia dada a sua inerente garantia de segurança.

Para que um campo de tensões seja estaticamente admissível, isto é, para que obedeça aos pressupostos do T.R.I., é necessário que esteja em equilíbrio estático com as solicitações, sejam elas resultantes de forças de massa (peso próprio, por exemplo) ou de forças aplicadas na fronteira, e que em nenhum ponto a tensão seja superior à tensão de cedência do material. É importante referir que para que uma solução possa ser considerada satisfatória ela deve ser susceptível de ser estendida a todo o meio em estudo de modo a ficar assegurada a condição de em nenhum ponto ser violado o critério de cedência. Logo, a solução de problemas de estabilidade pode ser conseguida à custa da resolução do sistema de equações constituído pelas equações de equilíbrio juntamente com a equação que traduz o critério de cedência considerado, tendo em atenção as condições de fronteira.

Na medida em que há infinitos campos de tensão que obedecem às condições anteriores, o problema básico de qualquer análise da região inferior consiste na construção de campos de tensão que sejam adequados, no sentido de conduzirem a soluções que sejam o mais próximas possível da carga de colapso. Lysmer (1970) apresentou um método racional para a construção de campos de tensão estaticamente admissíveis que supõe a discretização do domínio em elementos finitos e o uso da programação linear para maximizar a carga sujeita a um conjunto de restrições entre as tensões.

Outros autores têm usado a formulação proposta por Lysmer, com variações mais ou menos substanciais, para computar soluções da região inferior, sendo de referir, entre outros, Basudhar *et al* (1979), Bottero *et al* (1980), Sloan (1988), Singh e Basudhar (1993), Freitas (1994), Freitas e Cardoso (1995a e b), etc..

## 2 - DETERMINAÇÃO DE CAMPOS DE TENSÃO ESTATICAMENTE ADMISSÍVEIS

### 2.1 - Descontinuidades no campo de tensões

Um processo geral para resolver problemas através da aplicação do T.R.I. consiste em introduzir Descontinuidades no campo de tensões. Este processo baseia-se no facto de num material plástico, uma vez atingida a tensão de cedência, deixar de haver correspondência biunívoca entre tensões e deformações, podendo estas aumentar sem que as tensões sofram qualquer alteração. Como, por outro lado, o T.R.I. não obriga à compatibilidade das deformações, supondo o material em cedência, podem introduzir-se (obedecendo a certos critérios) descontinuidades nos campos de tensão correspondentes a equilíbrios plásticos, de modo a obter soluções que satisfaçam as condições de fronteira. Estas descontinuidades definem superfícies sobre as quais há variações bruscas do estado de tensão, quer em valor, quer em direcção.

É, então, possível obter soluções aproximadas de muitos problemas clássicos da plasticidade, considerando o campo de tensões constituído por um conjunto de zonas com tensões linearmente variáveis limitadas por descontinuidades arbitrariamente escolhidas.

As tensões de duas quaisquer zonas separadas por uma dada descontinuidades não podem ser quaisquer uma vez que as componentes, normal e tangencial, da tensão actuante na descontinuidade devem, obviamente, ser as mesmas quer sejam avaliadas a partir do estado de tensão de uma das zonas quer a partir do correspondente à vizinha. Em resumo, o método baseia-se nas seguintes considerações:

- em cada zona as tensões têm que verificar as equações de equilíbrio; em particular, caso não se considerem forças volúmicas, o campo de tensão é constante em todos os pontos de uma dada zona, verificando-se automaticamente as referidas equações;
- em cada zona todos os pontos são supostos em cedência plástica, devendo, por isso, o respectivo estado de tensão obedecer ao critério de cedência;
- entre cada duas zonas contíguas os estados de tensão estão relacionados de forma a que haja constância das tensões sobre a descontinuidade, obedecendo-se assim às equações de equilíbrio.

### 2.2 - Metodologia desenvolvida e aplicada

Uma vez que, para um dado problema, existe uma infinidade de campos de tensão estaticamente admissíveis, um método racional para a construção de campos nessas condições deve possuir também a capacidade de seleccionar os que correspondem a soluções óptimas dentro da região inferior. Lysmer (1970) apresentou um método que supõe a discretização do domínio em elementos finitos, definidos por descontinuidades no campo de tensões, e o uso da programação linear para otimizar a carga de colapso sujeita a um conjunto de restrições entre as tensões. Neste trabalho adopta-se uma metodologia que deriva das ideias de Lysmer.

O método usado aplica-se a campos de tensão bidimensionais e admite que todas as componentes da tensão variam linearmente no interior dos elementos triangulares em que se divide o meio em estudo. Logo, é possível expressar o equilíbrio e a condição de não-cedência através de um conjunto de restrições lineares; a solução óptima da região inferior pode então ser isolada usando a programação linear. O método comporta, portanto, os seguintes aspectos:

- o maciço é discretizado num conjunto de elementos triangulares com 3 nós (ver Fig.1), constituindo as 3 componentes da tensão em cada nó as incógnitas;
- nas interfaces entre elementos contíguos existem descontinuidades do campo de tensão; então as tensões num dado nó podem variar de elemento para elemento;
- para evitar restrições não-lineares, o critério de cedência é traduzido por uma função linear das tensões desconhecidas; no caso do critério de Mohr-Coulomb (ou de Tresca) tal é conseguido usando uma aproximação poligonal, tão próxima quanto se queira da superfície de cedência, expressa em termos das 3 componentes da tensão (ver Fig.2); o polígono é definido de modo a ser interior à superfície de cedência, assegurando assim que a solução obedece aos pressupostos do T.R.I.;
- as condições de fronteira e de equilíbrio, o critério de cedência e a carga de colapso são traduzidos por equações lineares, sendo esta última otimizada consequentemente sob um conjunto de restrições lineares expressas em termos das incógnitas.

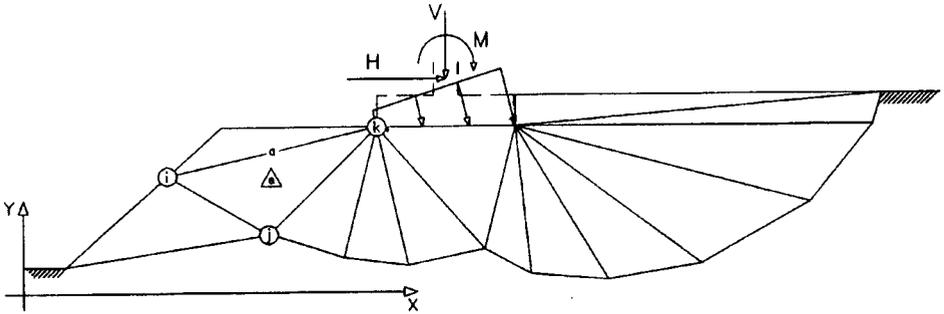


Fig.1 - Exemplo de um maciço discretizado em elementos triangulares

Como é descrito em pormenor por Freitas (1994) e Freitas e Cardoso (1995a), partindo destes pressupostos obtém-se conjuntos de restrições lineares que traduzem: (i) o equilíbrio no interior dos elementos, nas descontinuidades e nas fronteiras; (ii) as condições de não-cedência, mediante a linearização do critério de Mohr-Coulomb com o grau de aproximação que se desejar, tal como se discute mais adiante; (iii) e, quando fôr o caso, as condições de simetria e/ou as condições, nas fronteiras com carga a maximizar, necessárias para contemplar cargas inclinadas ou excêntricas.

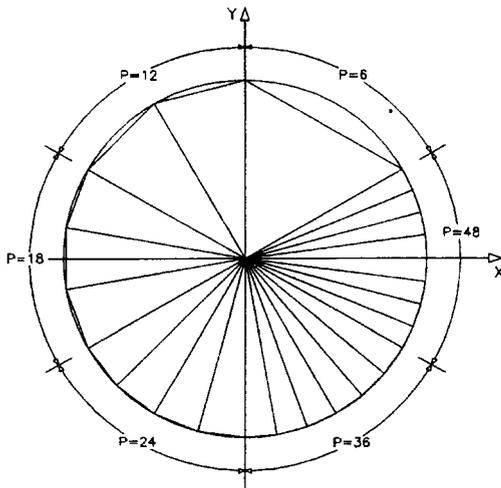
A procura do campo de tensões estaticamente admissível que otimiza a carga de colapso pode, então, ser formulada do seguinte modo:

$$\text{Maximizar a carga } Q = \{c\}^T \{\sigma\} \quad (1)$$

$$\text{tendo em atenção as restrições } [A] \{\sigma\} \leq \{b\} \quad (2)$$

em que  $\{\sigma\}$  é o vector das tensões nos pontos nodais de todos os elementos,  $\{c\}$  é o vector dos coeficientes da função objectivo e  $[A]$  e  $\{b\}$  resultam do agrupamento das restrições acima referidas. A metodologia de resolução deste problema de programação linear é também discutida pelos dois autores acima indicados, não sendo abordada neste artigo.

Para a resolução de problemas foi desenvolvido um programa de cálculo automático em FORTRAN 77 para criação da função objectivo e das restrições, optimização da solução e tratamento de resultados. Todos os exemplos apresentados neste trabalho foram executados num PC 486DX/33.



Critério de Mohr-Coulomb:

$$X^2 + Y^2 = R^2$$

sendo

$$X = \sigma_x - \sigma_y$$

$$Y = 2 \tau_{xy}$$

$$R = 2 c \cos\phi + (\sigma_x + \sigma_y) \operatorname{sen}\phi$$

Fig.2 - Aproximações lineares ao critério de Mohr-Coulomb através de polígonos com número de lados (P) distintos

### 3 - APLICAÇÕES NO DOMÍNIO DAS FUNDAÇÕES DIRECTAS

Uma das maiores vantagens da formulação numérica do T.R.I. apresentada reside no facto de permitir trabalhar com geometrias e solicitações complexas. Além disso, podem ser modelados maciços heterogéneos.

Em seguida vão ser analisadas aplicações mais ou menos complexas no domínio das fundações directas, sendo comparados os resultados obtidos com outras soluções analíticas, numéricas ou semi-empíricas propostas por vários autores.

No final apresenta-se um exemplo que ilustra a aplicação, sem alterações significativas, da técnica implementada à determinação de uma solução da região inferior para um carregamento não drenado num maciço cuja resistência aumente linearmente em profundidade.

### 4 - SAPATA ASSENTE SOBRE UM MACIÇO PURAMENTE COESIVO

#### 4.1 - Grau de aproximação da função de cedência e número de descontinuidades

Na Fig.3a está representada a malha para o caso do campo de tensão possuir apenas uma descontinuidade estaticamente admissível. A malha é composta por dois elementos triangulares e 5 arestas, das quais 2 são de fronteira externa e outras 2 de fronteira interna. As condições de fronteira a impor são

$$\begin{aligned} \sigma_{12} = \sigma_{21} = \tau_{12} = \tau_{21} &= 0 \\ \tau_{23} = \tau_{32} &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

e a função objectivo a maximizar é a carga de colapso dada por

$$Q = q B = (\sigma_{23} + \sigma_{32}) B / 2 \quad (4)$$

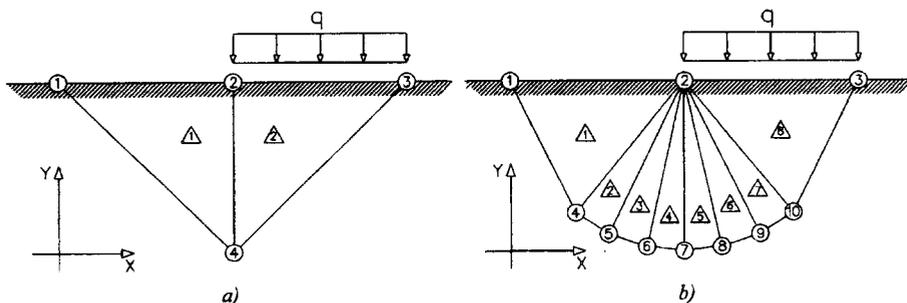


Fig. 3 -Sapata assente sobre maciço puramente coesivo: a) 1 descontinuidade; b) 7 descontinuidades

Considerando a resistência não-drenada igual a  $c_u=20\text{kPa}$ , o valor obtido para a capacidade de carga foi  $q=69,28\text{kPa}$ , ou seja,  $q=3,46c_u$ , que comparado com a solução conhecida (Guedes de Melo, 1975) para uma descontinuidade ( $q=4,00c_u$ ) tem um erro de 13,5%. Esta solução foi obtida para  $P=6$  que, segundo Lysmer (1970), deve ser o valor mínimo a utilizar. No Quadro I apresentam-se as soluções obtidas para diversos valores de  $P$ , assim como os erros relativamente à solução exacta indicada. Dos resultados obtidos pode-se concluir que para  $P \geq 12$  a solução é aceitável.

Quadro I  
Factor  $N_c$  para  $P$  variável e 1 descontinuidade

| P                       | 6    | 12   | 18   | 24   | 36   | 48   |
|-------------------------|------|------|------|------|------|------|
| $N_c = q / c_u$         | 3,46 | 3,86 | 3,94 | 3,97 | 3,99 | 3,99 |
| Erro, $\varepsilon$ (%) | 13,5 | 3,5  | 1,5  | 0,8  | 0,3  | 0,3  |

Quadro II  
Factor  $N_c$  para 1, 2 e 7 descontinuidades

| Nº de descont.          | 1    | 2    | 7    |
|-------------------------|------|------|------|
| $N_c = q / c_u$ (1)     | 3,99 | 4,80 | 5,11 |
| $N_c = q / c_u$ (2)     | 4,00 | 4,83 | 5,12 |
| Erro, $\varepsilon$ (%) | 0,3  | 0,6  | 0,2  |

Notas: (1) - resultados obtidos, (2) - valores exactos

Veja-se agora o que se passa para um valor constante  $P=48$  e 2 ou 7 descontinuidades. Na Fig.3b mostra-se, a título ilustrativo, a malha usada no último dos dois casos. Os resultados obtidos são apresentados no Quadro II. Constata-se que as soluções obtidas numericamente são muito próximas das consideradas exactas para o mesmo número de descontinuidades. De salientar ainda o facto de a solução com 7 descontinuidades ser muito próxima da solução exacta,  $q=(2+\pi)c_u$ , correspondente a um número infinito de descontinuidades.

#### 4.2 - Consideração da simetria. Comparação com resultados apresentados por Sloan (1988)

O problema que se apresenta seguidamente foi resolvido por Sloan (1988). É idêntico ao problema anterior (7 descontinuidades) mas na sua resolução considera-se a simetria e, além disso, as descontinuidades têm localizações diferentes. A malha utilizada está representada na Fig.4 e os resultados são sumarizados no Quadro III, para vários valores de  $P$ .

De notar que os valores encontrados para o factor de carga  $N_c$  são ligeiramente inferiores aos obtidos por Sloan (1988), em virtude de no presente trabalho se ter utilizado precisão numérica simples enquanto o referido autor usou precisão dupla. Confirmando o concluído por Sloan, verifica-se, mais uma vez, que para  $P=12$  a solução é já muito próxima da exacta ( $N_c=2+\pi$ ); as melhorias para maiores valores de  $P$  são relativamente pouco significativas, aumentando, no entanto, de modo muito importante o tempo de execução.

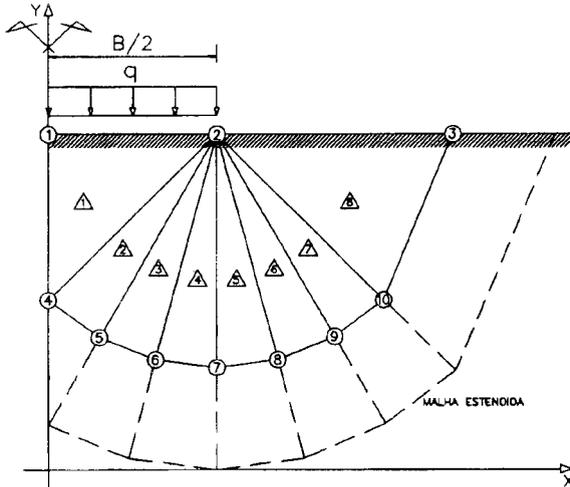


Fig.4 - Sapata assente sobre um maciço puramente coesivo. Consideração da simetria (7 descontinuidades)

Quadro III  
Factor  $N_c$  para P variável e considerando a simetria

| P                   | 6    | 12   | 24   | 48   | 48 (4) |
|---------------------|------|------|------|------|--------|
| $N_c = q / c_u$ (1) | 4,72 | 5,03 | 5,06 | 5,07 | 5,08   |
| $N_c = q / c_u$ (2) | 4,70 | 5,02 | 5,05 | 5,05 | 5,05   |
| t (seg.) (3)        | 33   | 42   | 64   | 80   | 83     |

- Notas: (1) - resultados obtidos por Sloan (1988)  
 (2) - resultados obtidos na presente análise  
 (3) - tempo de execução  
 (4) - malha estendida

Note-se, por outro lado, a diferença que existe em relação ao resultado determinado ( $N_c=5,11$ ) no parágrafo anterior (7 descontinuidades e  $P=48$ ), a qual resulta do diferente posicionamento das descontinuidades.

Como garantia de que os valores obtidos são verdadeiras soluções da região inferior, comprova-se que fazendo uma extensão da malha, representada também na Fig.4, os novos valores encontrados são iguais aos determinados com a malha original (ver Quadro III).

## 5 - SAPATA ASSENTE NUM MEIO COESO-FRICCIONAL SEM PESO

A capacidade de carga de uma sapata contínua, sujeita a uma sobrecarga lateral de valor  $q_0$ , com base lisa e assente sobre um maciço coeso-friccional sem peso é dada por

$$q = c' N_c + q_0 N_q \quad (5)$$

onde

$$N_q = e^{\pi \operatorname{tg} \phi'} \operatorname{tg}^2(45^\circ + \phi' / 2) \quad (6)$$

$$N_c = (N_q - 1) / \operatorname{tg} \phi' \quad (7)$$

em que  $c'$  e  $\phi'$  são os parâmetros de resistência ao corte. Das expressões (5) e (7) tira-se

$$N_q = (q \operatorname{tg} \phi' + c') / (q_0 \operatorname{tg} \phi' + c') \quad (8)$$

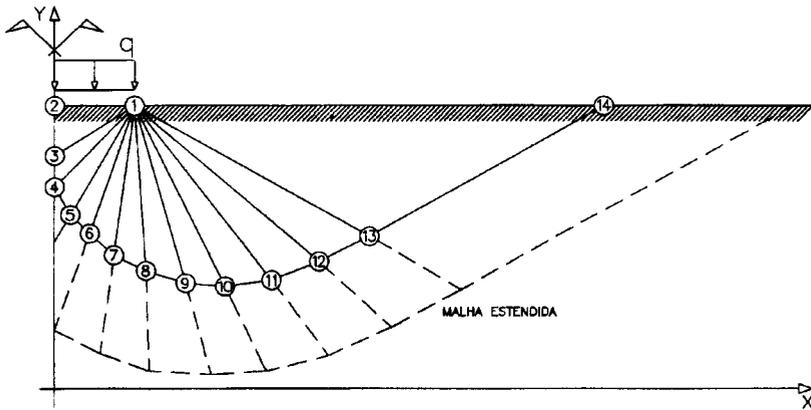


Fig.5 - Sapata assente num meio coeso-friccional e sem peso

Para estudar este problema usou-se a malha representada na Fig.5. No sentido de se comparar os resultados obtidos com os reportados por Sloan (1988) considerou-se  $c'=1\text{kPa}$  e  $\phi'_q=40^\circ$ ; então a solução exacta avaliada pela expressão (6) é  $N_q=64,20$ .

O problema foi também analisado para diversos valores de  $P$ , estando os resultados obtidos resumidos no Quadro IV. Da análise deste quadro torna-se evidente que, neste caso, considerar  $P=12$  não conduz a uma solução aceitável. Sloan aponta como causa deste facto a dependência do critério de cedência de Mohr-Coulomb em relação à pressão média. Desta forma, compreende-se porque é que a solução é bastante sensível ao número de lados do polígono do critério de cedência linearizado. Para  $P$  igual a 24 e 48, a análise efectuada conduz a cargas de colapso aproximadamente 7% e 4% inferiores ao valor exacto, respectivamente.

A análise com a malha estendida, apresentada também na Fig.5, conduziu a um valor de  $N_q$  muito próximo do encontrado com a malha inicial. É aceitável, portanto, considerar as soluções apresentadas no Quadro IV como verdadeiras soluções da região inferior.

Quadro IV  
Factor  $N_q$  para  $P$  variável e maciço coeso-friccional

| P                        | 6     | 12    | 24    | 48    | 48 (5) |
|--------------------------|-------|-------|-------|-------|--------|
| $N_q$ (1)                | 35,68 | 53,58 | 59,69 | 61,35 | 61,11  |
| $N_q$ (2)                | 35,04 | 51,81 | 59,55 | 61,57 | 61,60  |
| Erro, $\epsilon$ (%) (3) | 45,4  | 19,3  | 7,2   | 4,1   | 4,0    |
| t (min.) (4)             | 1,8   | 1,7   | 3,0   | 3,8   | 8,2    |

- Notas: (1) - resultados obtidos por Sloan (1988)  
 (2) - resultados obtidos na presente análise  
 (3) - erro em relação ao valor 64,20  
 (4) - tempo de execução  
 (5) - malha estendida

## 6 - FACTORES DEPENDENTES DA GEOMETRIA DA SOLICITAÇÃO PARA UMA SAPATA ASSENTE NUM MEIO COESO-FRICCIONAL SEM PESO

### 6.1 - Solicitação inclinada. Factores de inclinação da carga

Como é sabido, para determinar a capacidade de carga de sapatas com cargas inclinadas aplicam-se à expressão (5) os factores correctivos  $i_c$  e  $i_q$ , habitualmente designados por factores de inclinação da carga, ficando então

$$q = c' N_c i_c + q_0 N_q i_q \quad (9)$$

Os factores de inclinação têm sido avaliados semi-empiricamente por diversos autores.

Como ilustra a Fig.6, onde está representada a malha usada, determinou-se a capacidade de carga de uma sapata que transmite uma carga inclinada uniformemente distribuída, sendo a relação entre as componentes horizontal e vertical suposta igual a 0,25.

Nos cálculos efectuados considerou-se  $c'=20\text{kPa}$  e  $\phi'=30^\circ$ , donde vem que  $N_c=30,14$  e  $N_q=18,40$ . Para determinar os valores dos factores pretendidos procedeu-se do seguinte modo:

- 1º) - em primeiro lugar, supondo a sobrecarga nula, obteve-se a carga última  $q_1$  e, em seguida, calculou-se  $N_c i_c = q_1 / c' = 17,79$ ;
- 2º) - em segundo lugar, considerando uma sobrecarga  $q_0$  não nula, calculou-se a carga última  $q_2$  e, depois, obteve-se  $N_q i_q = (q_2 - q_1) / q_0 = 10,71$ .

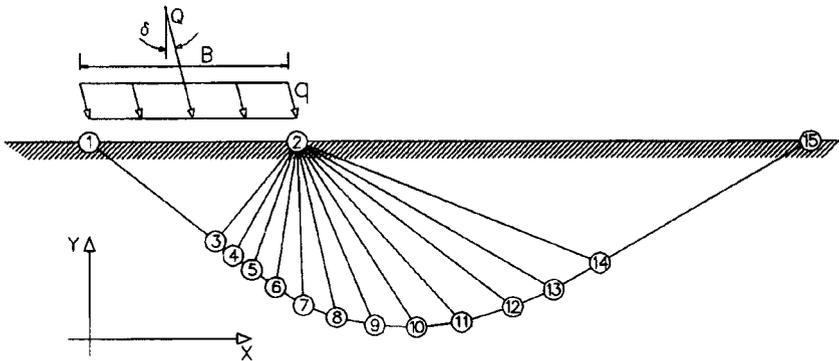


Fig.6 - Sapata com carga uniformemente distribuída inclinada de  $\delta$ . Determinação dos factores de inclinação da carga

No Quadro V comparam-se os valores de  $i_c$  e  $i_q$  assim determinados com os propostos por Meyerhof, Hansen e Vesic. Note-se a muito boa concordância desses valores com os deste último autor bem como, embora em menor medida, com os de Hansen. Em consequência, conclui-se que os valores de  $i_c$  e  $i_q$  indicados por Vesic, Hansen e neste artigo conduzem a resultados bastante semelhantes, enquanto que os propostos por Meyerhof se afastam dos outros pelo lado da insegurança.

### 6.2 - Solicitação excêntrica

Como se ilustra na Fig.7, onde está desenhada a malha usada, pretende-se determinar a carga de colapso, Q, de uma sapata assente num meio coeso-friccional sem peso e sujeita a

uma solicitação vertical composta com momento. Sendo B a largura da sapata, admite-se que o momento transmitido resulta numa excentricidade da carga vertical igual a  $e=B/8$ .

Quadro V  
Comparação dos factores de inclinação da carga

|                  | $i_c$ | $i_q$ |
|------------------|-------|-------|
| Meyerhof         | 0,71  | 0,71  |
| Hansen           | 0,51  | 0,54  |
| Vesic            | 0,56  | 0,59  |
| Presente análise | 0,59  | 0,58  |

Supondo  $c'=20\text{kPa}$  e  $\phi'=30^\circ$ , obteve-se a seguinte carga de colapso  $Q=667,6\text{kN/m}$ .

Na prática corrente de dimensionamento de fundações directas, sendo a capacidade de carga  $q$  avaliada pela equação (5), a carga de colapso é calculada pela seguinte expressão:

$$Q = B' q = (B - 2 e) q = (1 - 2 e / B) B q \quad (10)$$

o que, no caso presente, conduz a  $Q=904,2\text{kN/m}$ . Uma outra proposta para o cálculo da carga de colapso nas condições referidas é a de Meyerhof (1953):

$$Q = [1 - (e / B)^{1/2}] B q \quad (11)$$

donde se retira  $Q=778,2\text{ kN/m}$ .

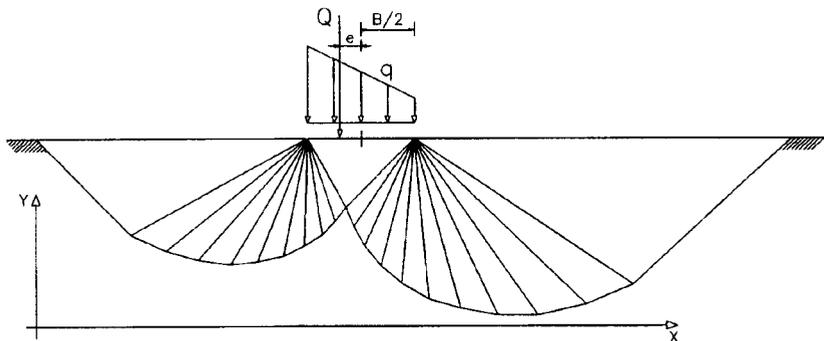


Fig.7 - Sapata com carga excêntrica

Portanto, o valor obtido da carga de colapso é inferior em cerca de 26 e 14% aos calculados pelos métodos usual e proposto por Meyerhof, respectivamente. Note-se que o valor encontrado está inequivocamente do lado da segurança; é, no entanto, importante salientar também que unicamente os nós extremos (1º e último elementos) e o nó onde actua a tensão de contacto menos elevada exibem níveis de tensão afastados da unidade, estando, em contrapartida, os restantes muito próximos da cedência (níveis de tensão superiores a 0,99).

O resultado parcelar obtido parece, portanto, indicar que as metodologias comuns de consideração do efeito das excentricidades na capacidade de carga de sapatas podem conduzir a valores inseguros. Esta questão necessita obviamente de um estudo mais profundo até porque os resultados obtidos podem ser afectados pela configuração da malha empregue.

## 7 - FACTORES DEPENDENTES DA PROFUNDIDADE PARA UMA SAPATA ASSENTE NUM MEIO COESO-FRICCIONAL SEM PESO

Como é sabido, na prática corrente de dimensionamento de fundações directas despreza-se a resistência do terreno acima do nível de fundação, sendo considerado apenas o efeito do seu peso através do factor  $N_q$ . Contudo, há situações em que tal procedimento é claramente conservativo. A consideração daquele efeito pode ser feita aplicando à expressão (5) os factores correctivos  $d_c$  e  $d_q$ , designados factores de profundidade, donde vem

$$q = c' N_c d_c + q_o N_q d_q \quad (12)$$

Os factores  $d_c$  e  $d_q$  têm sido avaliados semi-empiricamente por diversos autores.

A Fig.8 representa a malha criada para estudar a questão em apreço, supondo uma sapata à profundidade  $D$ . Nos cálculos efectuados considerou-se  $c'=20\text{kPa}$  e  $\phi'=30^\circ$ , a que corresponde os seguintes valores exactos de  $N_c=30,14$  e de  $N_q=18,40$ .

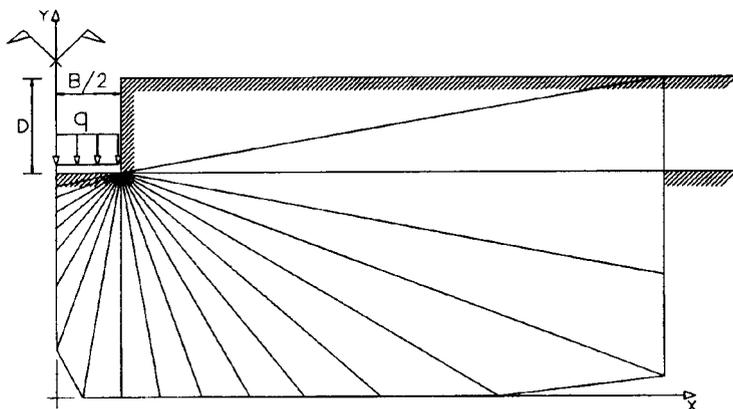


Fig.8 - Sapata enterrada com carga uniforme. Determinação dos factores de profundidade

O estudo foi realizado de acordo com a seguinte metodologia que teve também por objectivo testar os valores dos factores  $N_c$  e  $N_q$  para além da determinação de  $d_c$  e  $d_q$ :

- 1º) - considerou-se a sapata não enterrada e sem qualquer sobrecarga à superfície, tendo-se obtido a tensão de colapso  $q_1$  com a qual se calculou  $N_c = q_1 / c' = 29,16$ ; note-se que este valor é cerca de 3% menor do que o exacto;
- 2º) - admitiu-se a sapata não enterrada e com sobrecarga  $q_o = \gamma D$ , tendo-se obtido a tensão de colapso  $q_2$  com a qual se determinou  $N_q = (q_2 - q_1) / q_o = 17,84$ ; o valor de  $N_q$  obtido é também cerca de 3% inferior ao exacto;
- 3º) - considerou-se a sapata enterrada e maciço sem peso, tendo-se obtido a tensão de colapso  $q_3$  que permitiu calcular  $d_c = q_3 / q_1 = 1,24$ ;
- 4º) - supôs-se a sapata enterrada e o maciço acima do nível de fundação com peso, tendo-se obtido  $q_4$  a partir da qual se determinou  $d_q = (q_4 - q_3) / (q_2 - q_1) = 1,16$ .

No Quadro VI comparam-se os valores de  $d_c$  e  $d_q$  assim obtidos com os propostos por Meyerhof e Hansen. Note-se a boa concordância dos valores obtidos com os preconizados por aqueles autores.

Quadro VI  
 Comparação dos factores de profundidade

|                  | $d_c$ | $d_q$ |
|------------------|-------|-------|
| Meyerhof         | 1,26  | 1,13  |
| Hansen           | 1,30  | 1,22  |
| Presente análise | 1,24  | 1,16  |

## 8 - INFLUÊNCIA DA GEOMETRIA DA SUPERFÍCIE DO TERRENO PARA UMA SAPATA ASSENTE NUM MEIO COESO-FRICCIONAL SEM PESO

### 8.1 - Superfície do terreno inclinada simetricamente

O problema que se ilustra na Fig.9a foi estudado por Chen (1969) aplicando metodologias baseadas nos T.R.I. e T.R.S. Na referida figura estão previstas 4 situações para a inclinação da superfície do maciço, designadas por S1, S2, S3 e S4. A malha de elementos triangulares é constituída por 21 elementos para a situação S1, 18 elementos para a situação S2, 15 elementos para a situação S3 e 12 elementos para a situação S4.

Os resultados numéricos obtidos para o factor de capacidade de carga  $N_c$  são apresentados no Quadro VII, onde se indica também, para a situação S2, os valores exactos calculados pela expressão (7).

Quadro VII  
 Factor  $N_c$  para diversos valores de  $\phi'$  e da inclinação da superfície

| $\phi'$<br>(°) | $N_c$ |               |       |      |
|----------------|-------|---------------|-------|------|
|                | S1    | S2 (Exacto)   | S3    | S4   |
| 0              | 6,13  | 5,07 (5,14)   | 4,04  | 3,00 |
| 10             | 11,10 | 8,24 (8,35)   | 5,94  | 3,98 |
| 20             | 22,82 | 14,65 (14,83) | 9,22  | 5,43 |
| 30             | 55,68 | 29,45 (30,14) | 15,52 | 7,70 |

A Fig.9b mostra os resultados obtidos por Chen pelos dois teoremas (linhas a cheio, —) e os agora obtidos para ângulos de atrito interno  $\phi'=0^\circ, 10^\circ, 20^\circ$  e  $30^\circ$  (representados por •). Estão também representados (linha a tracejado, ---) os resultados exactos correspondentes à situação S2 (superfície horizontal).

Para a situação S2 verifica-se que os valores calculados pela presente metodologia, para os ângulos de atrito interno indicados, são muito próximos dos valores considerados exactos (ver também Quadro VII). Note-se ainda que, neste caso, a solução exacta é apenas ligeiramente inferior à obtida por Chen pelo T.R.S.. Por outro lado, observa-se que os valores agora determinados são, em todos os casos, bastante próximos dos calculados por Chen com base no T.R.S.. Parece, portanto, poder concluir-se que os resultados da região inferior obtidos pela metodologia implementada no presente trabalho deverão ser em geral bastante próximos dos exactos, muito mais do que os relativos à mesma região apresentados por Chen.

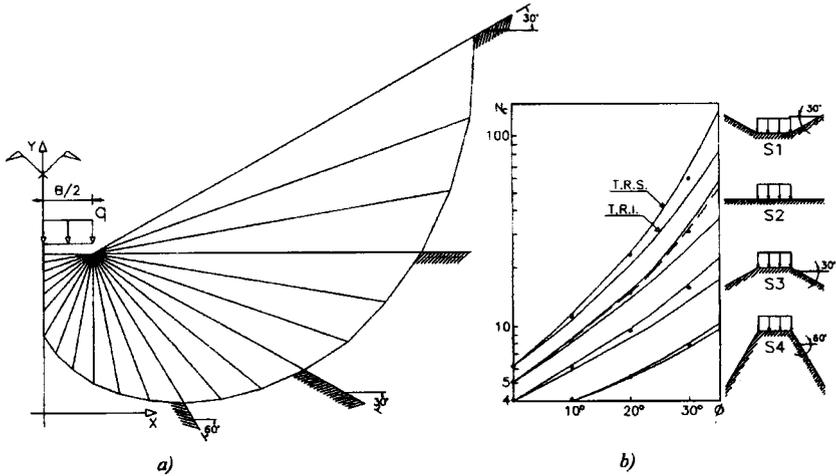


Fig. 9 - Superfície do terreno inclinada simetricamente: a) malha usada; b) comparação de resultados

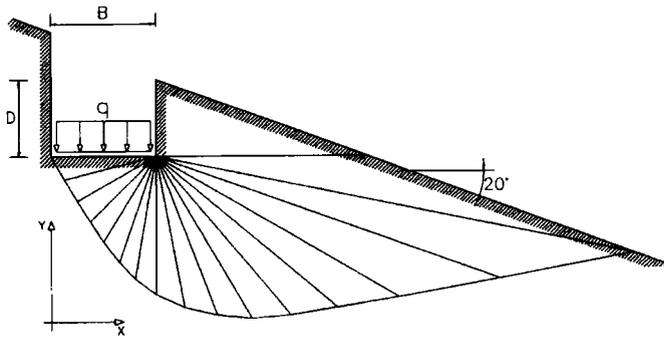


Fig. 10 - Sapata assente em talude com inclinação de  $20^\circ$

## 8.2 - Sapata assente num talude

Na Fig.10 representa-se uma sapata assente num talude à profundidade  $D$  e mostra-se a discretização usada na determinação dos factores de capacidade de carga. Adoptando  $\phi'=30^\circ$ ,  $c'=10-20\text{kPa}$  e ainda  $D/B=0,75$ , obteve-se os seguintes valores para a capacidade de carga:

$$q = 10 N'_c + 15 N'_q = 412,22 \text{ kPa} \quad (13)$$

$$q = 20 N'_c + 15 N'_q = 643,18 \text{ kPa} \quad (14)$$

A resolução deste sistema conduz a  $N'_c=23,10$  e  $N'_q=12,08$ .

Para o mesmo problema, Bowles (1988) indica os seguintes valores para os factores em apreço  $N'_c=30,14$  e  $N'_q=9,84$ . Consta-se uma diferença da ordem dos 25% entre estes valores e os avaliados na presente análise, num caso para mais e noutro para menos.

## 9 - CAPACIDADE DE CARGA DE UMA SAPATA ASSENTE NUM MACIÇO COM RESISTÊNCIA NÃO DRENADA CRESCENTE EM PROFUNDIDADE

Como é sabido em maciços argilosos homogêneos a resistência não drenada cresce em profundidade de acordo com a lei:

$$c_u = c_{u0} + b \sigma'_{v0} \quad (15)$$

em que  $c_{u0}$  é a resistência não drenada à superfície,  $b$  é o parâmetro que define o crescimento da resistência em profundidade e  $\sigma'_{v0}$  é a tensão efectiva vertical, dada por  $\gamma'z$  caso o nível freático esteja à superfície, sendo  $\gamma'$  o peso específico submerso e  $z$  a profundidade relativamente à superfície. Davis e Booker (1973) concluíram que a capacidade de carga de uma sapata assente num maciço puramente coesivo com resistência não drenada crescente linearmente em profundidade pode ser definida pela expressão:

$$q = F [(2 + \pi) c_{u0} + \rho B / 4] \quad (16)$$

em que  $F$  é um parâmetro função de  $\rho B / c_{u0}$ ,  $B$  é a largura da sapata e  $\rho = b\gamma'$ .

Na Fig.11 apresenta-se a malha de elementos triangulares criada para análise da capacidade de carga duma sapata com largura  $B=2,50\text{m}$  nas condições referidas.

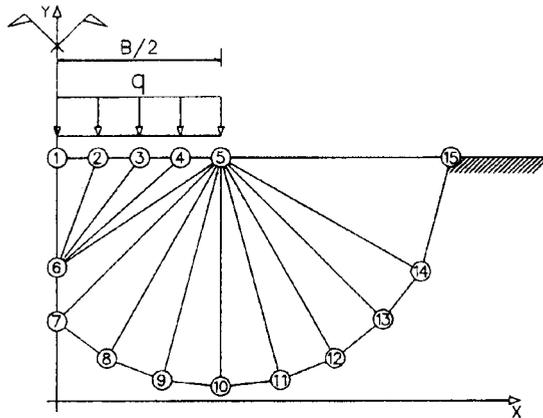


Fig. 11 - Sapata assente num maciço com resistência não-drenada crescente em profundidade

Para  $\gamma' = 8 \text{ kN/m}^3$ ,  $c_{u0} = 20 \text{ kPa}$  e  $b$  variável entre 0,0 e 0,4 obtiveram-se os valores tabelados no Quadro VIII onde são comparados com os obtidos por Davis e Booker. O valor de  $N'_c$  é definido pela razão  $q/c_{u0}$ .

Quadro VIII  
Factor  $N'_c$  para diversos valores de  $b$

| $b$              | 0,0  | 0,1  | 0,2  | 0,3  | 0,4  |
|------------------|------|------|------|------|------|
| Presente análise | 5,09 | 5,19 | 5,27 | 5,34 | 5,39 |
| Davis e Booker   | 5,14 | 5,21 | 5,28 | 5,35 | 5,42 |

Note-se a muito boa concordância entre os valores de Davis e Booker e os obtidos na presente análise. Refira-se, por outro lado, que, por exemplo, para o caso  $b=0,2$ , se obtém  $N'_c=5,98$  pelo T.R.S., considerando uma superfície circular.

## 10 - CONCLUSÕES

Apresenta-se um método da região inferior para obtenção de soluções optimizadas de problemas de estabilidade, as quais, de acordo com o enunciado do T.R.I., são garantidamente seguras. Todavia, ao utilizar soluções que, como estas, se baseiam na análise limite, deve-se ter presente que tal pressupõe que os materiais exibem comportamento plástico associado (ângulo de dilataância igual ao ângulo de atrito), o que, como é sabido, nem sempre corresponde à realidade no caso dos solos.

Para as análises da região superior, um corolário do T.R.S. mostra que qualquer limite superior de um material com comportamento plástico associado também o é se a plasticidade for não-associada. Pelo contrário, não existe um corolário equivalente do T.R.I., isto é, não está demonstrado que um limite inferior para um material com comportamento plástico associado também o seja no caso não-associado. Porém, na prática tem-se constatado que os limites inferiores e superiores da carga de colapso de problemas de estabilidade de estruturas geotécnicas, determinados supondo fluxo plástico associado, concordam razoavelmente com as observações experimentais.

No artigo apresenta-se soluções quer de problemas relativamente simples, para os quais há soluções teóricas exactas, quer de problemas formalmente mais complexos, para os quais existem apenas soluções semi-empíricas ou determinadas por metodologias de certo modo análogas à agora utilizada. Em qualquer dos casos os resultados obtidos concordam com os recolhidos na bibliografia consultada. Deve, não obstante, observar-se que, como seria de esperar, as soluções encontradas dependem da configuração e dimensão das malhas de elementos finitos utilizadas.

Consequentemente, a aferição da metodologia desenvolvida efectuada no âmbito do presente trabalho assegura que ficam bem assentes as bases para a sua posterior utilização na resolução de problemas complexos, tanto no respeitante à geometria e ao tipo de solicitação como no tocante à heterogeneidade dos maciços terrosos, problemas esses importantes do ponto de vista prático mas para cuja solução não há métodos analíticos alternativos.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BASUDHAR, P. K., VALSANGKAR, A. J. e MADHAV, M. R. - *Optimal lower bound of passive earth pressure using finite elements and non-linear programming*. Int. J. for Num. and Anal. Meth. in Geomechanics, Vol. 3, pp. 367-379, 1979.
- BOTTERO, A., NEGRE, R., PASTOR, J. e TURGEMAN, S. - *Finite element method and limit analysis theory for soil mechanics problems*. Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., Vol. 22, pp. 131-149, 1980.
- BOWLES, J. E. - *Foundation Analysis and Design*. 4rd edition, McGraw-Hill Inc., Singapore, 1988.
- CHEN, W. F. - *Soil mechanics and theorems of limit analysis*. J. of the Soil Mech. and Found. Div., ASCE, Vol. 95, SM2, pp. 493-518, 1969
- CHEN, W. F. e LIU, X. L. - *Limit Analysis in Soil Mechanics*. Developments in Geotechnical Engineering 52, Elsevier Science Publishers, Amsterdam, 1990.
- DAVIS, E. H. e BOOKER, J. R. - *The effect of increasing strength with depth on the bearing capacity of clays*. Geotechnique 23, nº 4, pp. 551-563, 1973.
- FREITAS, J. C. G. - *Estudo de Problemas de Mecânica dos Solos pelo Teorema da Região Inferior com recurso à Programação Linear*. Dissertação de Mestrado, Faculdade de Engenharia, Porto, 1994.

- FREITAS, J. C. G. e CARDOSO, A. S. - *Aplicação do teorema da região inferior e da programação linear à resolução de problemas de mecânica dos solos*. Actas do 5º Congresso Nacional de Geotecnia, Vol. 2, pp. 375-392, 1995.
- FREITAS, J. C. G. e CARDOSO, A. S. - *Soluções para problemas de muros de suporte e de estabilidade de taludes aplicando o teorema da região inferior*. Actas do 5º Congresso Nacional de Geotecnia, Vol. 2, pp. 393-400, 1995.
- GUEDES DE MELO, F. - *Equilíbrios limite*. Capítulo de *Mecânica dos Solos. Equilíbrios Limite e Estados Críticos*, Curso 110-2, LNEC, Lisboa, 1975.
- LYSMER, J. - *Limit analysis of plane problems in soil mechanics*. J. of the Soil Mech. and Found. Div., ASCE, Vol. 96, SM4, pp. 1311-1334, 1970.
- MEYERHOF, G. G. - *The bearing capacity of foundations under eccentric and inclined loads*. Proc. of the 3rd Int. Conf. Soil Mech. and Found. Eng., Vol. 1, pp. 440-445, 1953.
- SINGH, D. N. e BASUDHAR, P. K. - *Determination of optimal lower bound bearing capacity of reinforced soil retaining walls by using finite elements and non-linear programming*. Geotextiles and Geomembranes, 12, pp. 665-686, 1993.
- SLOAN, S. W. - *Lower bound limit analysis using finite elements and linear programming*. Int. J. for Num. and Anal. Meth. in Geomechanics, Vol. 12, pp. 61-77, 1988.