

MATRIZ DE RIGIDEZ DE SAPATAS RÍGIDAS EMBEBIDAS NUM SEMI-ESPAÇO ELÁSTICO LIMITADO OU NÃO POR UM ESTRATO RÍGIDO

Stiffness matrix of rigid footings embedded in elastic half space limited or not by a rigid layer

MANUEL DE AZEREDO *

RESUMO – Determina-se a matriz de rigidez completa e consistente de sapatas rígidas com qualquer forma em planta, embebidas num meio elástico semi-infinito considerando ou não a existência de atrito entre a sapata e o meio. A sapata é representada por um conjunto de nós no seu plano, para os quais é calculada uma matriz de flexibilidade do meio semi-infinito através da solução fundamental de Mindlin, sendo discutida a necessidade de proceder a algumas integrações numéricas com vista à remoção da singularidade que surge na diagonal principal daquela matriz. Por esta razão é associado a cada nó um elemento de área de tensão constante.

A imposição, nos nós, de conjuntos de deslocamentos correspondentes aos movimentos unitários de corpo rígido da sapata é conseguida através da resolução de sistemas de equações simultâneos cuja matriz dos coeficientes é aquela matriz de flexibilidade. Finalmente, as resultantes das forças nodais obtidas são os elementos da matriz de rigidez da sapata.

A metodologia estende-se ao caso de o meio ser limitado inferiormente por um estrato rígido, revelando-se muito versátil e económica em termos de volume de cálculo. É coerente com as metodologias de análise estrutural podendo integrar-se com toda a facilidade em programas de análise estrutural.

Apresentam-se diversos exemplos obtendo-se uma excelente concordância com os resultados encontrados por outros autores, mesmo para discretizações muito rudimentares da sapata.

SYNOPSIS – In the paper a formulation to calculate the consistent stiffness matrix of a rigid footings embedded in an elastic half space is presented. The footing may have any shape and is represented by a set of nodes in its plane. Using Mindlin fundamental solution a flexibility matrix referred to those nodes is computed, associating to each node a surface element of constant stress. The need of some integration is discussed in order to remove the singularity when calculating the diagonal terms of the matrix.

To the nodes are then imposed the displacements induced by the unit rigid body displacements of the footing, and the stiffness matrix elements are obtained by summation of the corresponding nodal forces.

The formulation is extended to other cases, namely when the footing is perfectly rough or perfectly smooth, and when a rigid layer, parallel to the surface or not, exists at a certain depth.

The technique presented is fully integrated in the structural analysis formulation and leads to accurate results with a small volume of calculations. It can be easily included in structural analysis as subroutine, in order to incorporate soil structure interaction.

The technique is compared with good agreement to the results published by other authors.

* Doutor em Engenharia Civil, Professor Associado da Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto.

1 – INTRODUÇÃO

A influência da fundação no comportamento de uma estrutura pode ser introduzida directamente na análise dessa estrutura através de apoios elásticos que representem a deformabilidade dos órgãos de fundações e do terreno envolvente.

O modo mais simplificado consiste em substituir o terreno por molas - modelos de Winkler - cuja rigidez é calculada de modo a traduzir aproximadamente a deformação esperada para a fundação.

Para estimar essa deformação pode recorrer-se a qualquer das metodologias de previsão de assentamentos, as quais, de um modo geral, consistem em expressões analíticas, ábacos ou tabelas preparados a partir da integração de soluções fundamentais para meios semi-infinitos como a solução de Boussinesq [1, 2, 3, 4]. Os casos que podem ser resolvidos por este processo são quase sempre particulares e nem sempre se adaptam à realidade concreta que pretende estudar-se. Por outro lado, o recurso a ábacos adapta-se mal aos modernos meios de cálculo tornando pouco praticável uma integração, numa mesma análise, da estrutura e da fundação.

Têm sido por isso aplicados outros métodos com vista a traduzir a deformabilidade do terreno envolvente das fundações, designadamente o Método dos Elementos Finitos, incluindo ou não elementos infinitos, o Método dos Elementos de Fronteira [5, 6, 7, 8] e outros em que se procede à integração das soluções fundamentais através de transformadas [9, 10, 11]. Merece referência especial a formulação proposta inicialmente por Cheung e Zienckewicz [12] em que a técnica dos elementos finitos é aplicada em combinação com a solução de Boussinesq para a determinação da deformabilidade de fundações rectangulares à superfície. Esta ideia foi retomada por Butterfield e Banerjee [13, 14] no estudo de estacas e ancoragens embebidas num semi-espaco elástico e Sharma [15] ou Saetta e Vitaliani [16] na determinação de uma matriz de rigidez para o semi-espaco, referida à superfície.

Numa linha ligeiramente diferente Chow [17, 18, 19, 20] utiliza a versão integrada da solução de Boussinesq para o caso de uma área rígida e circular à superfície, para em seguida deduzir uma matriz de flexibilidade da sapata previamente discretizada em rectângulos, para em seguida impôr o deslocamento de corpo rígido correspondente a um assentamento global unitário. Em certos casos, em que não existe solução fundamental, este autor recorre a prévias análises de elementos finitos para deduzir os coeficientes de influência equivalentes à solução de Mindlin.

Muitas vezes, estas metodologias fornecem apenas alguns dos coeficientes de flexibilidade, senão apenas o que corresponde à direcção vertical, o que impede uma análise em que intervenha a interacção completa das várias direcções. Por outro lado, são formulações de “influência” em que nem sempre se assume completamente o carácter estrutural do problema, logo não se tirando completo partido das suas potencialidades.

No presente trabalho apresenta-se uma metodologia inteiramente numérica fundada na análise estrutural, que se aplica ao estudo de fundações constituídas por sapatas rígidas fornecendo, para uma dada sapata, uma matriz de rigidez que representa adequadamente a deformabilidade do meio elástico em que a sapata se insere. Este meio elástico prolonga-se indefinidamente em todas

as direcções ou então pode ser limitado inferiormente por um estrato rígido que simula a existência de “bed-rock”. O volume de cálculo é muito reduzido e um subprograma que realize estas operações pode ser integrado em qualquer programa de estruturas.

Aqui visa-se a adaptação a programas de cálculo de estruturas reticuladas, planas ou espaciais, pelo que se estabelecem os passos necessários à determinação de uma matriz de rigidez do conjunto sapata rígida+meio envolvente referida apenas a um ponto ou nó com seis graus de liberdade, podendo ser estendida com toda a facilidade a outros casos.

Na base do método encontra-se a solução fundamental para o meio semi-infinito devida a Mindlin, que, no caso dos estados planos de deformação, deve ser substituída pela solução de Melan [1].

2 – MATRIZ DE RIGIDEZ DA SAPATA+MEIO SEMI-INFINITO

A matriz de rigidez, K , de uma sapata rígida envolvida num meio semi-infinito, limitado superiormente por um plano horizontal, deve relacionar os deslocamentos possíveis da sapata que, por ser rígida, podem ser caracterizados pelos deslocamentos, U , de um seu ponto, O , com as forças, F , correspondentes na forma

$$K U = F \quad (2.1)$$

onde K é, no caso tridimensional, uma matriz de 6×6 elementos cujos valores são as 6 forças (3 forças e 3 momentos) que é necessário aplicar para que a sapata sofra assentamentos unitários (3 translacções e 3 rotações) cada um de per si .

A Figura 2.1 ilustra os elementos desta matriz para o caso plano (2 translacções e 1 rotação).

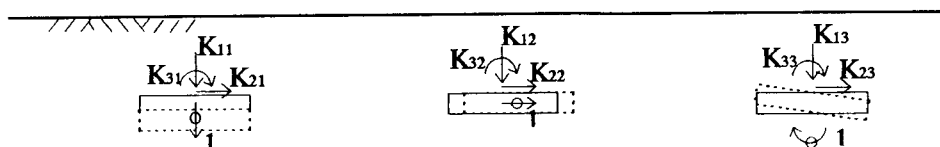


Fig. 2.1

Seja então, para representar o terreno de fundação, um meio semi-infinito caracterizado pelo seu módulo de elasticidade, E , e coeficiente de Poisson, ν , nele embebida à profundidade h uma sapata de dimensões em planta $2L \times 2B$ e considere-se na sapata um ponto O ao qual se pretende referir a matriz de rigidez do conjunto sapata+meio semi-infinito.

A sapata vai ser representada por uma malha de pontos, por simplicidade, dispostos ortogonalmente e com espaçamento constante (Figura 2.2).

Para o meio semi-infinito elástico é conhecida uma solução fundamental, devida a Mindlin (1936) [1], isto é, as expressões analíticas dos deslocamentos de um ponto - de coordenadas x,y,z - qualquer do meio, devidos à actuação de uma força unitária num outro ponto (a fonte)

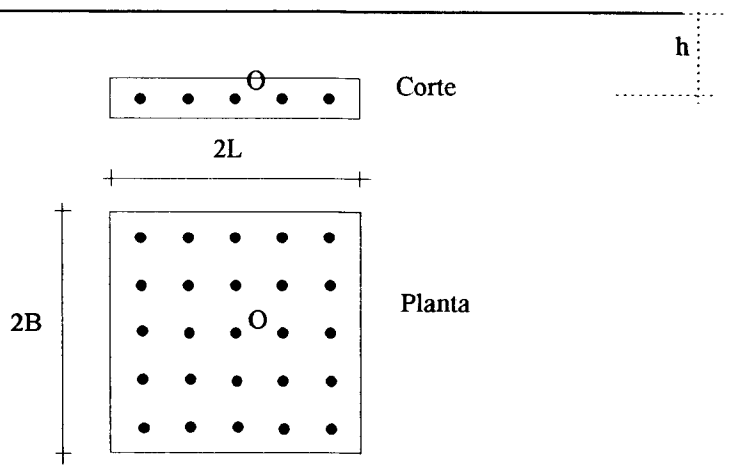


Fig. 2.2

– de coordenadas 0,0,h – quer na direcção vertical, quer na direcção horizontal. Reproduzem-se essas expressões [1]:

– para uma força unitária vertical (ver figura 2.3)

$$u_z = \frac{1}{16 \pi G (1 - \nu)} \left[\frac{3 - 4\nu}{R_1} + \frac{8(1 - \nu)^2 - (3 - 4\nu)}{R_2} + \frac{(z - h)^2}{R_1^3} + \frac{(3 - 4\nu)(z + h)^2 - 2hz}{R_2^3} + \frac{6hz(z + h)^2}{R_2^5} \right] \quad (2.2.a)$$

$$u_r = \frac{R}{16 \pi G (1 - \nu)} \left[\frac{z - h}{R_1^3} + \frac{(3 - 4\nu)(z - h)}{R_2^3} - \frac{4(1 - \nu)(1 - 2\nu)}{R_2(R_2 + z + h)} + \frac{6hz(z + h)}{R_2^5} \right] \quad (2.2.b)$$

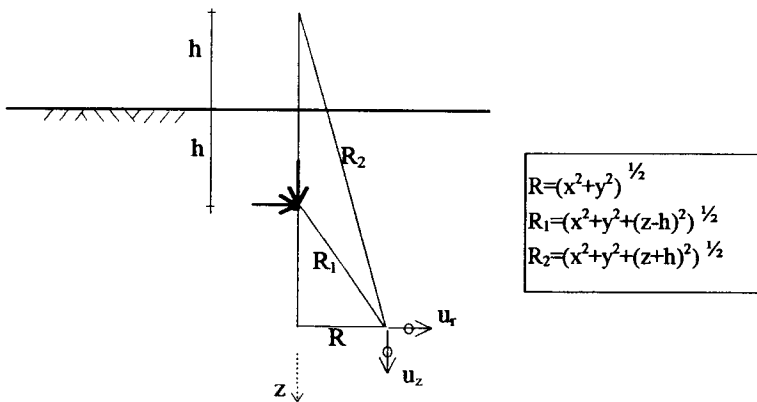


Fig. 2.3

– para uma força horizontal unitária na direcção x

$$u_x = \frac{1}{16 \pi G (1 - \nu)} \left[\frac{3 - 4\nu}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{x^2}{R_1^3} + \frac{(3 - 4\nu) x^2}{R_2^3} + \frac{2hz}{R_2^3} \left(1 - \frac{3x^2}{R_2^2} \right) + \frac{4(1 - \nu)(1 - 2\nu)}{R_2 + z + h} \left(1 - \frac{x^2}{R_2(R_2 + z + h)} \right) \right] \quad (2.2.c)$$

$$u_y = \frac{xy}{16 \pi G (1 - \nu)} \left[\frac{1}{R_1^3} + \frac{(3 - 4\nu)}{R_2^3} - \frac{6hz}{R_2^5} - \frac{4(1 - \nu)(1 - 2\nu)}{R_2(R_2 + z + h)^2} \right] \quad (2.2.d)$$

$$u_z = \frac{x}{16 \pi G (1 - \nu)} \left[\frac{z - h}{R_1^3} + \frac{(3 - 4\nu)(z - h)}{R_2^3} + \frac{6hz(z + h)}{R_2^5} + \frac{4(1 - \nu)(1 - 2\nu)}{R_2(R_2 + z + h)} \right] \quad (2.2.e)$$

Estacionando a fonte em cada um dos nós da sapata e aplicando a força unitária sucessivamente nas três direcções ortogonais, é possível determinar, através daquelas expressões, os deslocamentos de todos os outros nós da sapata. Estes deslocamentos podem ser ordenados numa matriz, Θ , que é uma matriz de flexibilidade do meio semi-infinito referida àqueles nós.

Nesta matriz os elementos tendem a decrescer à medida que se afastam da diagonal principal, uma vez que são deslocamentos de pontos, em princípio, mais afastados da fonte; porém, na diagonal principal as expressões de Mindlin conduzem a um valor infinito que corresponde à situação teórica de aplicação de uma carga rigorosamente concentrada. Esquematicamente a matriz apresenta o aspecto seguinte:

$$\begin{bmatrix} \infty & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \infty & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \infty & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \infty & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \infty & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \infty \end{bmatrix}$$

Assim, a matriz não tem inversa mas, embora adiante se retome o problema do tratamento desta singularidade, pode para já admitir-se que a força unitária não é rigorosamente concentrada mas distribuída numa área pequena em torno do nó em questão.

O deslocamento a inscrever na diagonal principal passará a ser finito mas muito grande relativamente aos restantes elementos da matriz. Esta substituição da força concentrada por uma distribuição “muito concentrada” mantém os restantes elementos inalteráveis, uma vez que, suficientemente afastados daquela área, o princípio de Saint Venant assegura que só dependem da resultante.

O deslocamento pode até ser arbitrado, sendo certo que a cada valor suficientemente elevado corresponde uma certa distribuição de forças aplicadas cuja resultante é unitária.

A matriz Θ , cuja singularidade foi eliminada deste modo, estabelece uma relação entre as forças aplicadas nos nós, representadas pelo vector f e os correspondentes deslocamentos agrupados no vector u

$$\Theta f = u \quad (2.3)$$

Ora a matriz de rigidez do conjunto sapata-meio pode obter-se impondo ao meio semi-infinito os deslocamentos correspondentes aos movimentos de corpo rígido da sapata em cada um dos deslocamentos unitários que há que imprimir-lhe (Fig. 2.1), ou seja impondo aos nós esses deslocamentos.

Assim, por exemplo, para determinar os elementos da 1ª coluna da matriz de rigidez do conjunto sapata+meio há que impor deslocamentos unitários na direcção vertical em todos os nós, e nulos nas restantes direcções, para em seguida determinar a resultante em O das forças que surgem nos nós que constituirão os elementos daquela 1ª coluna da matriz.

Matricialmente estas operações podem apresentar-se do modo que a seguir se descreve.

Representando por $U^T = \{u_x, u_y, u_z, q_x, q_y, q_z\}$ os deslocamentos da sapata referidos a O e por $u^T = \{u_x^1, u_y^1, u_z^1, u_x^2, u_y^2, u_z^2, \dots\}$ os deslocamentos dos nós, a indeformabilidade da sapata permite escrever

$$u = T^T U \quad (2.4)$$

onde T é uma matriz de transformação (com o sentido habitual da análise estrutural) cujos elementos só dependem da posição relativa entre cada nó e o ponto O.

Sendo f as forças correspondentes a u e F a sua resultante referida a O, o Princípio da Contragradência assegura que:

$$F = T f \quad (2.5)$$

Introduzindo estas últimas relações na expressão (2.3) vem sucessivamente

$$\begin{aligned} \Theta f &= T^T U \\ f &= \Theta^{-1} T^T U \\ T f &= T \Theta^{-1} T^T U \\ F &= T \Theta^{-1} T^T U \end{aligned}$$

ou seja, a relação entre forças aplicadas à sapata e os correspondentes deslocamentos, isto é, a relação 2.1, sendo portanto

$$K = T \Theta^{-1} T^T \quad (2.6)$$

Como é de esperar a matriz de rigidez assim obtida não está correcta uma vez que parte de um valor arbitrado para a diagonal principal. A Figura 2.4 representa o elemento K_{11} (rigidez na direcção vertical) obtido para valores crescentes do elemento introduzido na diagonal principal (em abcissas representa-se a relação entre valor do elemento da diagonal θ_{ii} e o deslocamento na mesma direcção, θ_{jj} , do nó mais próximo j).

$$\theta_{ij} = \alpha \cdot \theta_{ij} \quad (2.7)$$

Note-se que para valores demasiado baixos a matriz mostra-se mal condicionada surgindo erros numéricos, para valores um pouco maiores de α a rigidez é sobreavaliada enquanto para valores elevados a rigidez se torna inferior à teórica (obtida da referência [1]). Este fenómeno, que facilmente se explica, observa-se também nos restantes elementos da matriz K .

A formulação anterior pode ser com toda a facilidade estendida à situação em que entre a base da sapata e o meio semi-infinito não existe qualquer ligação nas direcções tangenciais. Nestas circunstâncias, os movimentos de corpo rígido da sapata apenas condicionam os deslocamentos verticais do meio e, quer a matriz inicial Θ , quer a matriz T que relaciona aqueles deslocamentos, só devem ter elementos relativos às direcções verticais do meio. A matriz K vem, em consequência reduzida à dimensão 3×3 , com elementos referentes à direcção vertical e a rotações em torno de eixos horizontais. Adiante, no número 4 apresentam-se resultados em que este efeito é considerado.

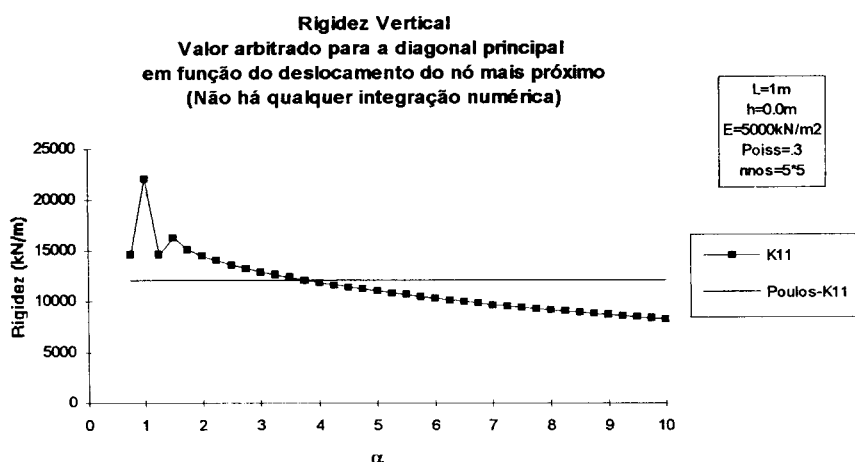


Fig. 2.4

3 – DETERMINAÇÃO DOS ELEMENTOS DA MATRIZ DE FLEXIBILIDADE. TRATAMENTO DA SINGULARIDADE

O estado de tensão na base da sapata devido a qualquer conjunto de forças nela aplicada não deve ter uma variação pronunciada de ponto para ponto.

Parece portanto indicado que em vez da carga concentrada se imponha um estado de tensão na vizinhança de cada ponto que seja capaz de, por sobreposição de efeitos, reproduzir razoavelmente o estado de tensão final de variação suave. A solução apresentada no número anterior não pode obviamente reproduzir essa variação já que as tensões se concentram em torno dos nós, tanto mais quanto maior o valor arbitrado para a diagonal principal.

Por isso, dividindo a área da sapata em elementos, cada um com o seu nó, pode admitir-se que a tensão naqueles elementos é constante com valor igual ao que a tensão toma no nó central de cada um. (Está assim a dividir-se a sapata em elementos de tensão constante, mas poderiam também usar-se elementos lineares ou parabólicos, etc., considerando mais nós em cada elemento).

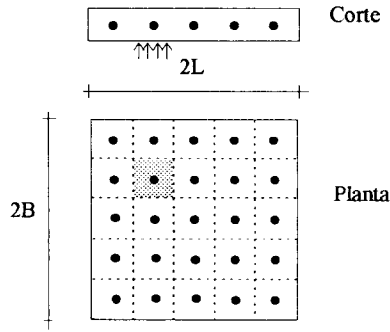


Fig. 3.1

A matriz Θ será agora constituída pelos deslocamentos nos nós quando em cada nó é aplicada uma força unitária que é a resultante de uma distribuição de tensões uniformes no elemento. Sendo Ω_i a área do elemento i , essa tensão é:

$$\sigma = \frac{1}{\Omega_i} \quad (3.1)$$

Note-se que os deslocamentos dos nós mais distantes não sofrem qualquer alteração de acordo com o Princípio de Saint Venant.

O Teorema de Betti (aplicação de uma unidade fictícia de carga) permite determinar o deslocamento de um ponto j como (ver figura 3.2):

$$u_{ji} = \int_{\Omega_i} \sigma u_j d\Omega = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega_i} u_j d\Omega \quad (3.2)$$

expressão válida também para $j \equiv i$, em que são os deslocamentos na direcção i provocados por uma força unitária aplicada na direcção j , ou seja, os elementos da linha j matriz Θ são integrais da solução fundamental estacionada no nó j , em cada um dos elementos de área em que a sapata foi dividida. A expressão 3.2 traduz ainda que, neste caso de elementos de tensão constante, u_{ji} é o deslocamento médio no elemento.

Em resumo, ao substituir a carga concentrada unitária por uma distribuição de tensões, a solução fundamental passa a ter de ser integrada em cada elemento, dispensando-se no entanto a integração no caso dos nós afastados da fonte em que o deslocamento médio coincide com o deslocamento do nó.



Fig. 3.2

Este facto que resulta directamente do princípio de Saint Venant, pode demonstrar-se determinando a variação do deslocamento num elemento afastado da fonte. De facto, diferenciando as expressões da solução fundamental (expressões 2.2), atendendo à sua forma em que a distância à fonte aparece com maior grau no denominador, facilmente se verifica que du tende para zero à medida que a distância aumenta, ou seja, o deslocamento tende a ser constante, logo o seu valor médio coincide com o valor do nó.

A avaliação numérica destes integrais, por conter particularidades no caso $i \equiv j$, é referida adiante no número 5.

4 – RESULTADOS OBTIDOS. COMPARAÇÃO COM VALORES TEÓRICOS

A metodologia exposta nos números anteriores foi aplicada ao caso de uma sapata quadrada rígida situada à superfície de um semi-espaco elástico para a qual existem soluções apresentadas por vários autores na forma de expressões analíticas ou ábacos.

Essas expressões embora com uma forma semelhante diferem de autor para autor, nos valores a considerar para certos parâmetros. Para a rigidez à translacção na direcção vertical, a mais estudada, encontram-se diferenças da ordem dos 12%. Estas diferenças podem, em parte justificar-se pela consideração ou não, de ligação entre a sapata e o meio na direcção tangencial (atrito).

As Figuras 4.1 e 4.2 representam a variação da rigidez à translacção vertical (elemento K_{11}) para diferentes discretizações da sapata, respectivamente, em valor absoluto e relativo. Embora a convergência seja relativamente lenta, mesmo para um número de nós baixo – 3×3 , 4×4 ou 5×5 – encontram-se valores muito próximos da solução exacta, qualquer que ela seja.

As Figuras 4.3 e 4.4 representam a mesma variação para a rigidez à translacção horizontal (K_{22}) e à rotação em torno de um eixo principal da sapata (K_{55}).

Neste último as diferenças são maiores para as discretizações com menor número de pontos o que facilmente se explica porque o elemento de tensão constante reproduz mal o estado de tensão aproximadamente linear que existe na base da sapata.

A análise das figuras anteriores demonstra a validade da metodologia exposta, cujo rigor poderia ser ainda aumentado, quer por aumento da discretização, quer pela utilização de elementos de tensão variável (linear, parabólica, etc.).

Nas Figuras 4.5 e seguintes apresentam-se os deslocamentos em vários pontos do meio devidos aos movimentos unitários impostos à sapata, neste caso para uma sapata situada a uma certa distância da superfície. Embora a análise seja tridimensional, os pontos em que os deslocamentos são representados estão num plano vertical que contém o eixo da sapata no caso das Figuras 4.5 a 4.7 e na Figura 4.8, em que a representação se faz em planta, os pontos do lado esquerdo situam-se no plano horizontal que contém a sapata e os que figuram à direita da sapata encontram-se à superfície.

O gráfico 4.5 refere-se à influência de ligação entre a sapata e o meio, devida ao atrito, para diferentes valores do coeficiente de Poisson. Deve referir-se que nos casos reais existe sempre atrito capaz de assegurar esta ligação, embora as soluções teóricas que se encontram com mais frequência são relativas a ausência de atrito.

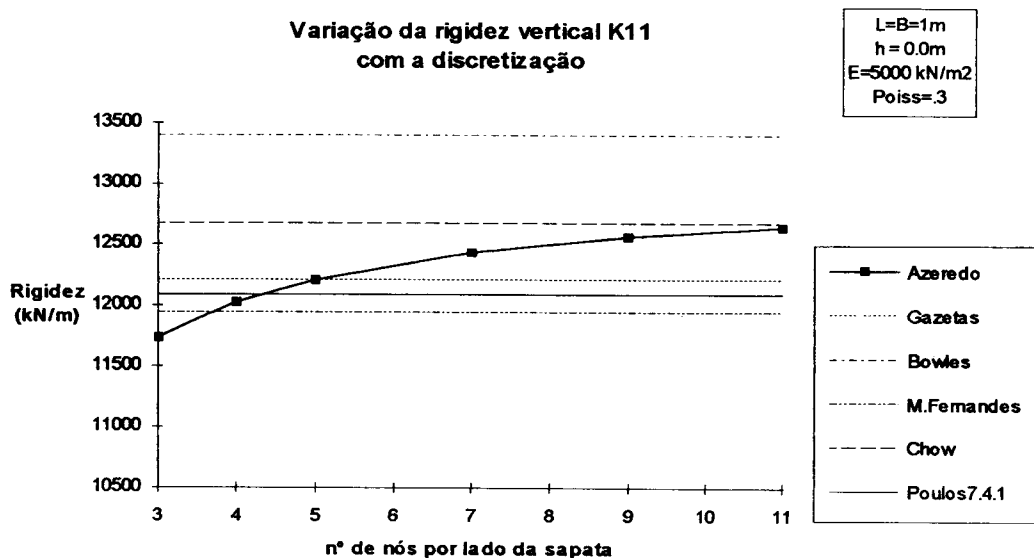


Fig. 4.1

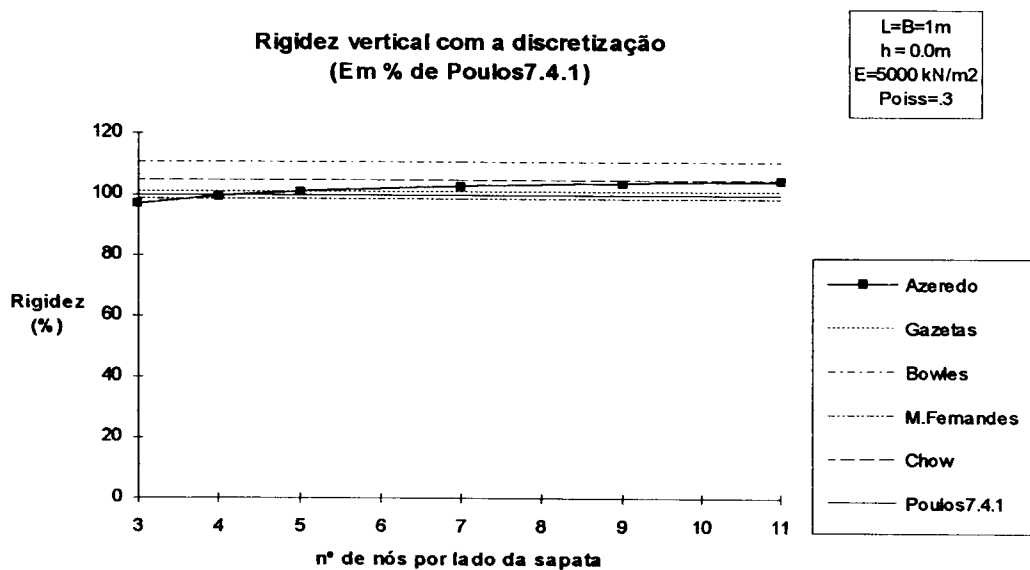


Fig. 4.2

**Rigidez horizontal (K22)
para uma sapata quadrada
representada por $n \times n$ nós**

$L=B=1\text{m}$
 $h=0.0\text{m}$
 $E=5000\text{ kN/m}^2$
 $\text{Poisson}=0.3$

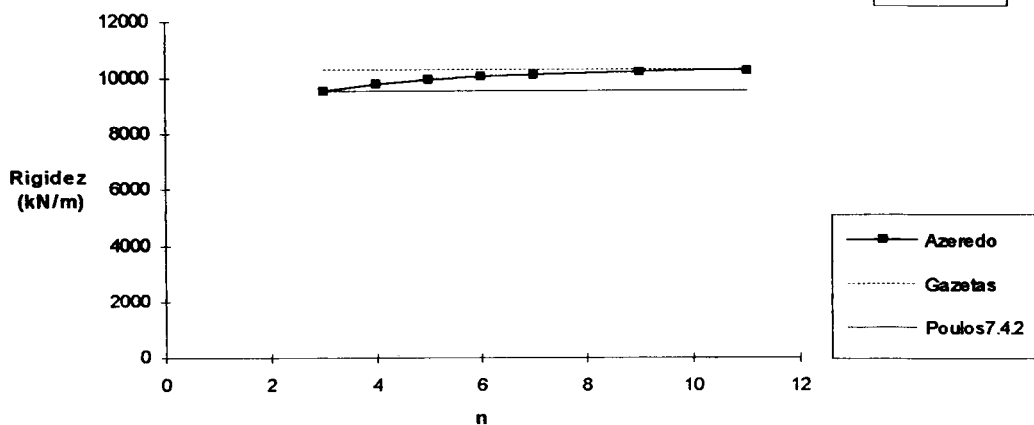


Fig. 4.3

**Rigidez à rotação (K44)
para uma sapata quadrada
representada por $n \times n$ nós**

$L=B=1\text{m}$
 $h=0.0\text{m}$
 $E=5000\text{ kN/m}^2$
 $\text{Poisson}=0.3$

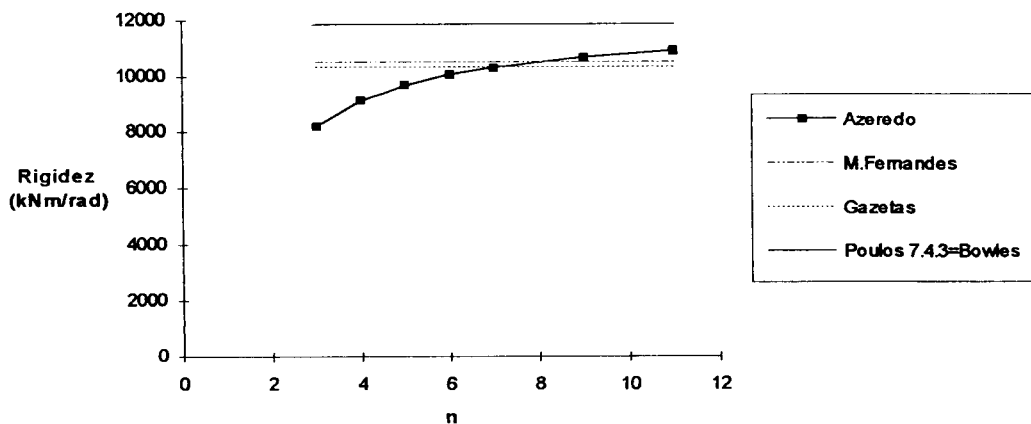


Fig. 4.4

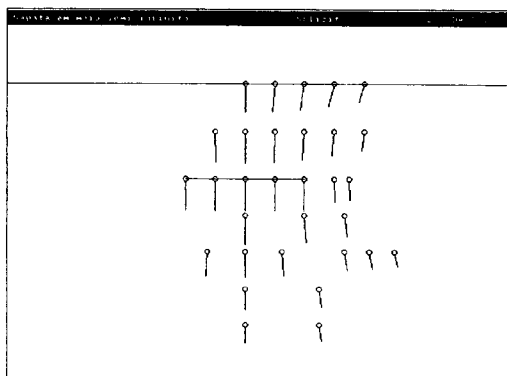


Fig. 4.5

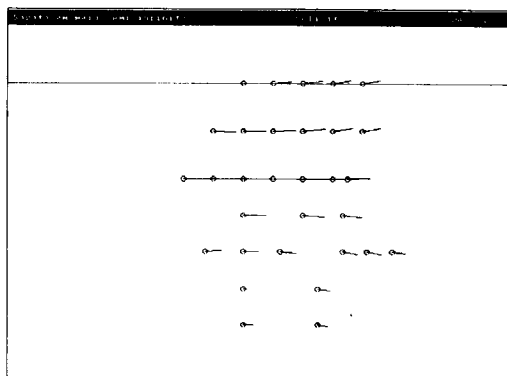


Fig. 4.6

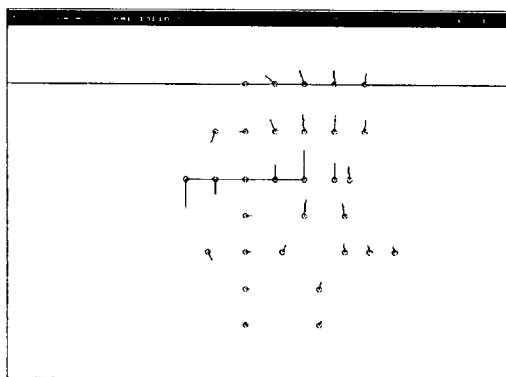


Fig. 4.7

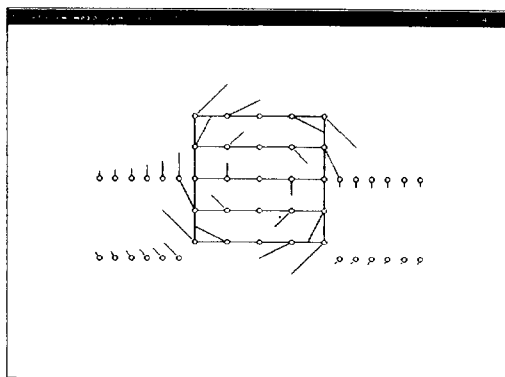


Fig. 4.8

Influência do atrito

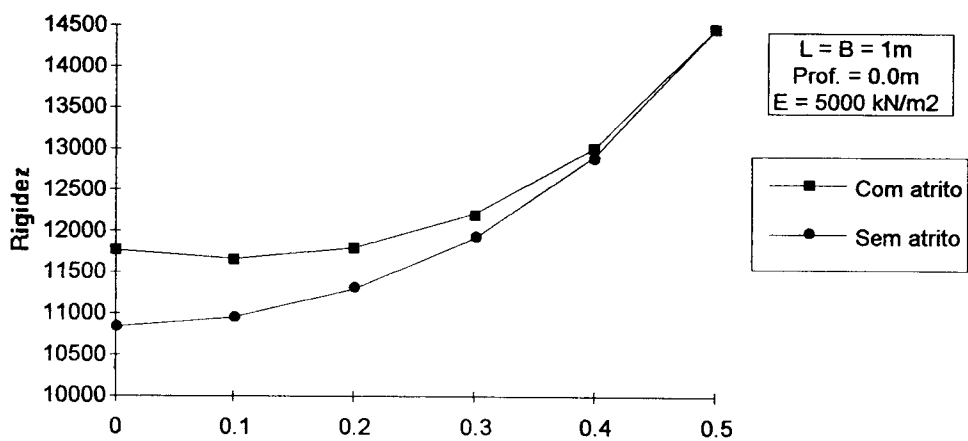


Gráfico 4.9

5 – CÁLCULO DOS ELEMENTOS DA MATRIZ DE FLEXIBILIDADE

Como se referiu, nos nós próximos da fonte o deslocamento deve ser determinado por integração da solução fundamental (expressão 3.2).

Quando $i \neq j$ a integração não tem qualquer dificuldade podendo usar-se uma quadratura gaussiana de baixo grau.

Se os elementos de área forem rectangulares de dimensão Δx e Δy , facilmente se verifica que:

$$u_{ji} = \frac{1}{4} \sum_k \sum_l u_{(kl)j} w_k w_l \quad (5.1)$$

onde $u_{(kl)j}$ é o deslocamento provocado pela força unitária em j no ponto de Gauss kl do elemento de área associado ao nó i , e w_k e w_l os respectivos pesos para a integração nas duas direcções.

No caso de $i \equiv j$ a função a integrar tem uma singularidade no nó pelo que poderia ter de procurar-se uma técnica de integração mais elaborada.

No entanto, os resultados atrás descritos que podem considerar-se muito satisfatórios, foram obtidos usando igualmente uma quadratura gaussiana em que se dividiu o domínio de integração em quatro parcelas de modo a reproduzir melhor a forma da função a integrar (Fig. 5.1).

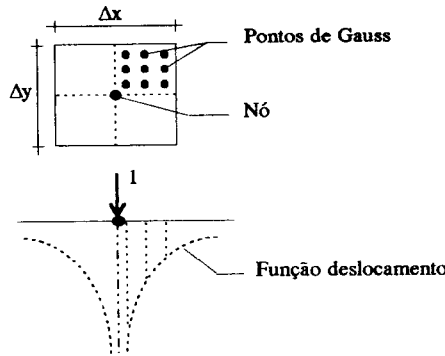


Fig. 5.1

Atendendo à simetria existente, o integral é quatro vezes o que corresponde a 1/4 do domínio de integração

$$u_{ii} = \frac{1}{\Delta x \Delta y} 4 \frac{\Delta x}{2} \frac{\Delta y}{2} \sum_k \sum_l u_{(kl)i} w_k w_l = \frac{1}{4} \sum_k \sum_l u_{(kl)i} w_k w_l$$

ou seja, a mesma expressão, com a diferença de neste caso os pontos de Gauss serem todos escolhidos a um dos lados do nó, quer na direcção x , quer na direcção y .

Este procedimento corresponde aproximadamente a utilizar uma integração de Gauss com 4 vezes mais pontos no domínio completo. Note-se também que se se usasse o domínio completo a ordem de integração deveria ser par para que nenhum ponto de Gauss viesse a coincidir com a fonte onde o deslocamento é infinito.

A Figura 5.2 representa a variação da rigidez à translacção vertical (elemento K_{11}) com a ordem de integração usada para obter os elementos θ_{ii} , ou seja, o deslocamento do nó em que é aplicada a força. As diferenças são, como se verifica, muito pequenas.

Como já se referiu no cálculo dos deslocamentos dos nós distantes da fonte não será necessário proceder aquela integração, usando-se o valor do deslocamento desses nós obtido directamente da expressão da solução fundamental.

A Figura 5.3 representa ainda a variação da rigidez vertical, agora quando apenas se procede à integração numérica nos nós a uma distância da fonte inferior a R . Assim para $R = 0$ em nenhum nó diferente da fonte se procede a integração numérica; para $R = 1$ no máximo em 4 nós se faz essa integração e assim sucessivamente. As variações são mais uma vez diminutas.

6 – SIMULAÇÃO DE UM ESTRATO RÍGIDO

A existência de uma situação em que uma estrutura se funda num terreno cuja uniformidade em profundidade seja associável a um meio semi-infinito é certamente rara, embora na prática se utilize frequentemente esta situação teórica por dificuldade em obter soluções mais realistas.

O método proposto pode no entanto ser estendido a uma situação muito frequente que é a da existência de uma camada que possa considerar-se rígida a uma determinada profundidade H ("bedrock").

Esta camada pode ser simulada por um novo conjunto de nós idênticos aos que representam a sapata, nos quais serão impostos deslocamentos nulos ao mesmo tempo que nos da sapata são impostos os deslocamentos correspondentes aos assentamentos unitários da sapata.

A matriz de flexibilidade inicial terá agora a forma:

$$\Theta = \begin{bmatrix} \Theta_{SS} & \Theta_{SR} \\ \Theta_{RS} & \Theta_{RR} \end{bmatrix} \quad (6.1)$$

em que os índices S e R se referem respectivamente aos nós da sapata e aos nós que simulam o estrato rígido; o conjunto de deslocamentos a impor é dado por:

$$u = \begin{bmatrix} T^T U_S \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.2)$$

sendo as incógnitas as forças nodais:

$$f = \begin{bmatrix} f_S \\ f_R \end{bmatrix} \quad (6.3)$$

Resolvendo o sistema de equações:

$$\Theta f = u \quad (6.4)$$

obtém-se as forças f , sendo finalmente, como no primeiro caso

$$K = K_{SS} = T f_S \quad (6.5)$$

Variação da rigidez vertical com a ordem da quadratura (ngaus*ngaus)

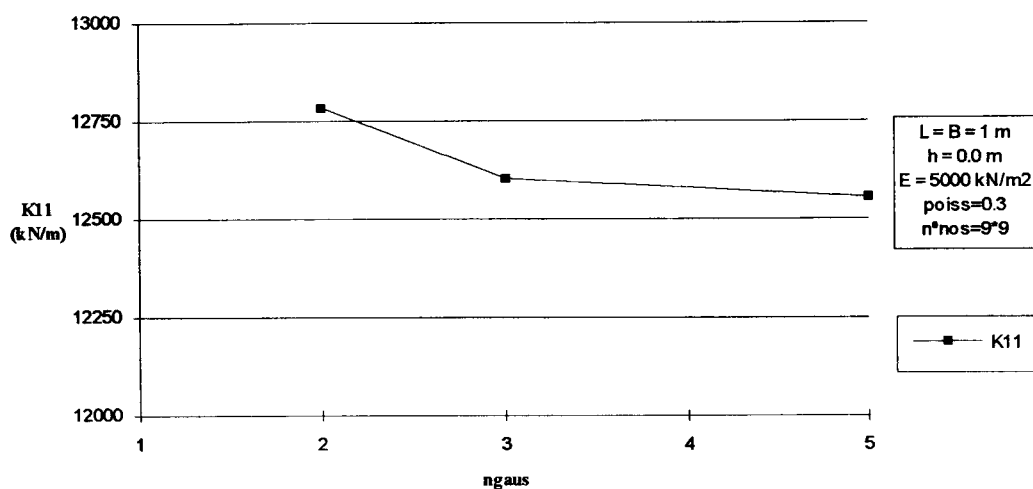


Fig. 5.2

Variação da rigidez vertical
com o raio da zona de perturbação
(DX - mínima distância entre nós)

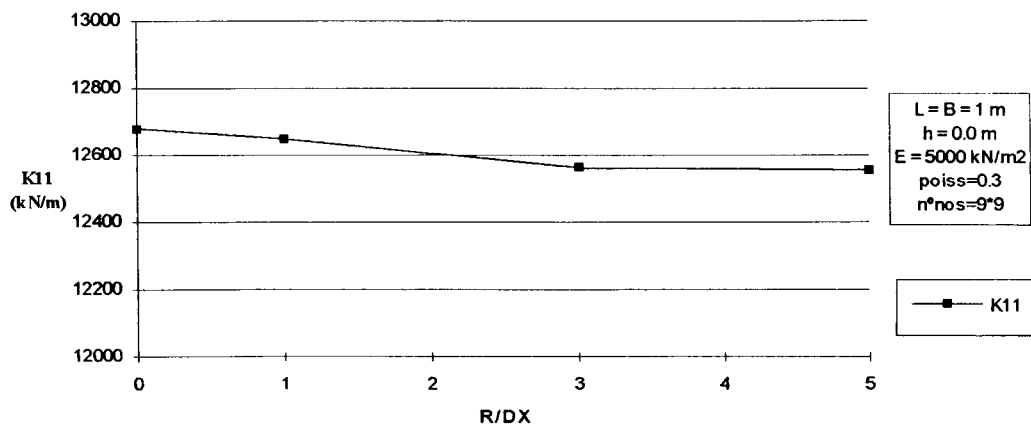


Fig. 5.3

No exemplo que se apresenta na Figura 6.1, o estrato rígido foi simulado por uma discretização que é imagem da discretização da sapata correspondendo a uma transformação por homotetia a 45°.

A Figura 6.2 representa a comparação entre os valores obtidos e a solução de Poulos [1] (só existente para $\nu = 0.5$) para diversas profundidades do estrato para uma sapata quadrada à superfície, considerando ainda a inexistência de ligação tangencial entre a sapata e o meio.

Como se verifica, os resultados são um pouco mais rígidos, particularmente no caso em que o estrato rígido está muito próximo da sapata, caso em que H se torna da ordem de grandeza da própria discretização utilizada. Apresentam-se ainda resultados de Milovic [4] (para um coeficiente de Poisson de 0.45) que, não coincidindo com os de Poulos são ainda um pouco inferiores aos obtidos com a presente técnica.

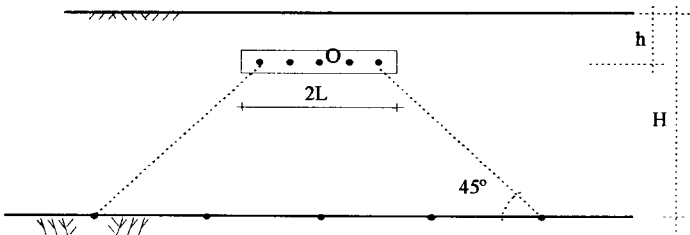


Fig. 6.1

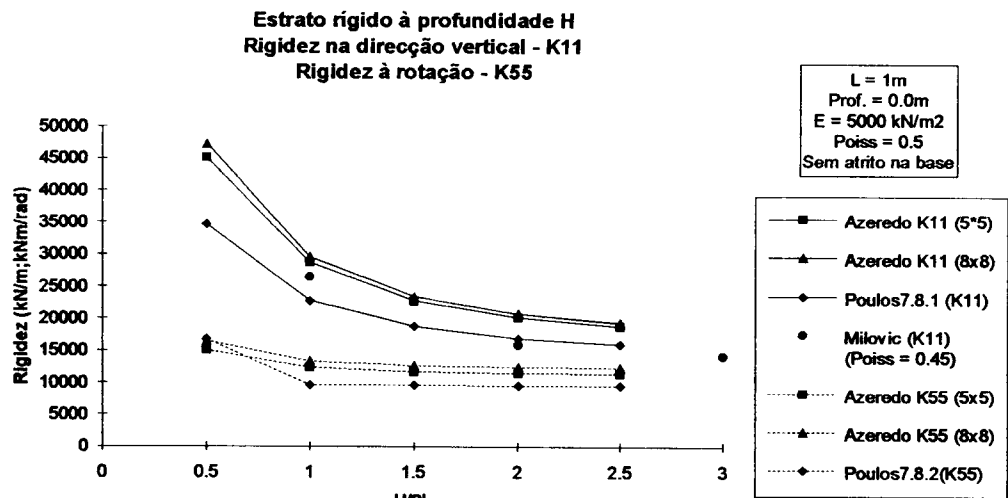


Fig. 6.2

7 – GENERALIZAÇÃO A ALGUMAS OUTRAS SITUAÇÕES

O método proposto pode ser explorado de muitos modos, desde logo aplicando-se ao caso dos estados planos de deformação, em que o semi-espaco elástico se transforma num semi-plano, para o qual existe a solução fundamental (devida a Melan - 1932), para representar sapatas rígidas muito extensas numa das direcções (fundações de paredes, por exemplo).

No entanto, uma outra aplicação que facilmente se deduz é a determinação da rigidez de um conjunto de sapatas referida a um nó em cada uma delas, nos quais se ligará uma superestrutura.

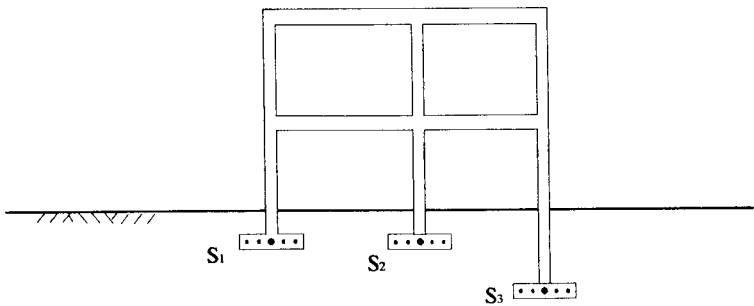


Fig. 7.1

A matriz de rigidez do conjunto será, no exemplo da figura 7.1, uma matriz

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix}$$

em que a submatriz K_{ij} tem 6×6 elementos no caso tridimensional e representa as forças que surgem na sapata i devidas a assentamentos unitários na sapata j . A influência da fundação pode assim ser introduzida de um modo global na estrutura, envolvendo uma adequada interacção entre as várias sapatas.

Neste trabalho usaram-se elementos planos e todos horizontais. No entanto o elemento associado a um nó pode orientar-se de qualquer modo. Deste modo, é possível, por exemplo, simular com toda a facilidade a existência de um estrato rígido inclinado ou até irregular.

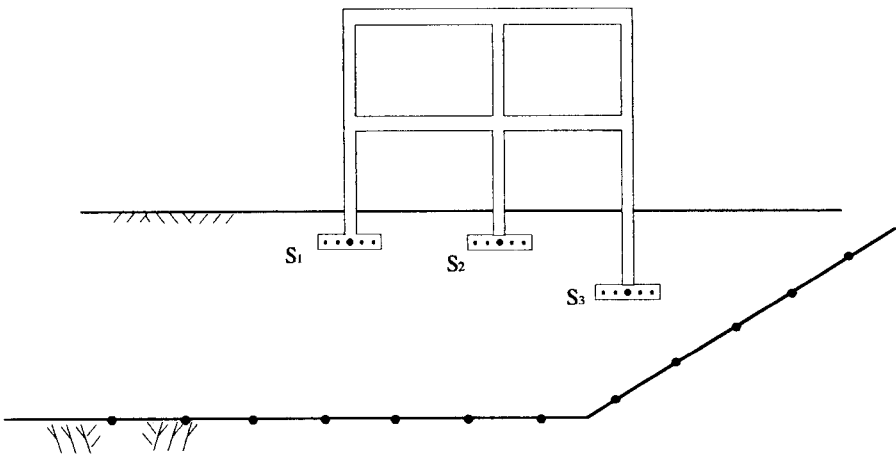


Fig. 7.2

8 – CONCLUSÕES

A metodologia exposta tem uma grande simplicidade e pode ser utilizada para o estudo de inúmeras situações com interesse prático.

Envolve um volume de cálculo muito pequeno sobretudo na preparação das matrizes cujos elementos dispensam, com pequeno número de exceções, recurso a integração numérica, a qual não envolve também qualquer dificuldade.

Encontra-se, por outro lado, perfeitamente integrada nas metodologias da análise estrutural, pelo que pode envolver-se com enorme simplicidade e elegância como subrotina de programas de cálculo automático de estruturas.

Finalmente, os resultados obtidos são muito satisfatoriamente concordantes com os de outros autores, apresentando, mesmo para uma discretização grosseira, uma precisão compatível com a generalidade dos problemas de fundações que à partida contêm um certo grau de incerteza.

9 – AGRADECIMENTOS

Manifesta-se o reconhecimento ao Eng^o João Paulo Miranda Guedes pela colaboração que prestou na fase inicial da preparação dos programas de cálculo automático.

10 – BIBLIOGRAFIA

- [1] POULOS, H. G.; DAVIS, E. H. – Elastic Solutions for Soil and Rock Mechanics – John Wiley & Sons, 1974.
- [2] BOWLES, J. E. – Foundation Analysis and Design – 3rd Edition. McGraw- Hill International, 1982.
- [3] MATOS FERNANDES, M. – Mecânica dos Solos – Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, 1995.
- [4] MILOVIC, D. – Stress and Displacements for Shallow Foundations – Elsevier Science Publ., 1992.
- [5] VENTURINI, W. S.; BREBBIA, C. A. – Some Applications of the Boundary Element Method in Geomechanics – Int. Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, Vol. 7, 419-433, 1983.
- [6] GAZETAS, G.; TASSOULAS, J. L.; DOBRY, R.; O'ROURKE, M. J. – Elastic Settlement of Arbitrarily Shaped Foundations Embedded in Half-space - Géotechnique, 35, 339-346. 1985.
- [7] GAZETAS, G.; HATZIKONSTANTINO, E. – Elastic Formulae for Lateral Displacement and Rotation of Arbitrarily-Shaped Embedded Foundations – Géotechnique, 38 (3), 439-444, 1988.
- [8] MAIER, G.; NOVATI, G. – Boundary Element Elastic Analysis of Layered Soils by successive Stiffness Method – Int Journal for Numerical Methods in Geomechanics, Vol. 11, 435, 447, 1987.
- [9] SELVADURAI, A. P. S. – A Theoretical Estimate of the Tilt of a Surface Foundation due to an Inclined Anchor Load Applied at the Interior of the Soil Medium – Int. Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, Vol. 5, 369-378. 1981.

- [10] SELVADURAI, A. P. S. – Fundamental Results Concerning the Settlement of a Rigid Foundation on an Elastic Medium due to an Adjacent Surface Load – *Int. Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Vol. 7, 209-223, 1983.
- [11] SELVADURAI, A. P. S. – The Axial Loading of a Rigid Circular Anchor Plate Embedded in an Elastic Half-Space – *Int. Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Vol. 17, 343-353, 1993.
- [12] CHEUNG, Y. K.; ZIENKIEWICZ, O. C. – Plates and Tanks on Elastic Foundation – an Application of Finite Element Method – *Int. J. Solids and Structures*, 1 (4), 452-461, 1965.
- [13] BUTTERFIELD, R.; BANERJEE, P. K. – A Disk Embedded in an Elastic Half Space – *Geotechnical Engineering*, Vol. 2, 35-52, 1971.
- [14] BUTTERFIELD, R.; BANERJEE, P. K. – The Problem of Pile Group-Pile Cap Interaction – *Géotechnique*, Vol. 21 (2), 135-142, 1971.
- [15] SHARMA, K. G. – Condensation of Elastic Half Space Soil Stiffness Matrix Considering Symmetry – *Int. Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Vol. 9, 391-395, 1985.
- [16] SAETTA, A. V.; VITALIANI, R. V. – A Finit Element Analysis of Three Dimensional Box-Type Structures Interacting with Soil – *Computers and Geotechnics*, 12, 179-208, 1991.
- [17] CHOW, Y. K. – Vertical Deformation of Rigid Foundations of Arbitrary Shape on Layered Soil Media – *Int. Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Vol. 11, 1-15, 1987.
- [18] CHOW, Y. K. – Analysis of Vertically Loadded Pile Groups – *Int. Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Vol. 10, 59-72, 1986.
- [19] LEUNG, C. F.; CHOW, Y. K. – Response of Pile Groups Subjected to Lateral Loads – *Int. Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Vol. 11, 307-314, 1987.
- [20] CHOW, Y. K. – Axial and Lateral Response of Pile Groups Embedded in Nonhomogeneous Soils – *Int. Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Vol. 11, 621-638, 1987.