

MODELO REOLÓGICO DE KELVIN SUJEITO A UMA TENSÃO LINEAR CÍCLICA

A Rheological Kelvin Model Submitted to a Cyclic Linear Stress

F. PERES-RODRIGUES*

RESUMO — Estuda-se o modelo de Kelvin sujeito a uma tensão linear cíclica de valor máximo σ_M , verificando-se que a sua extensão em função do tempo é traduzida por uma curva ondulatória; esta curva tenderá para a curva das extensões devido à fluência de uma tensão igual a metade de σ_M quando o semi-período, T , da tensão linear cíclica tender para zero.

SYNOPSIS — The Kelvin model submitted to a linear cyclic stress, with a maximum σ_M , is studied. It is verified that the strain-time relation is a wave-type curve. This curve will tend to the strain due to creep under a stress of $\sigma_M/2$ when the semi-period, T , of the linear cyclic stress tends to zero.

Como se sabe, o modelo de Kelvin é formado pela associação em paralelo de um modelo de Hooke e de um modelo de Newton (Fig. 1). Na associação em paralelo a tensão aplicada ao modelo de Kelvin (modelo composto) divide-se pelos modelos de Hooke e Kelvin (modelos simples) de tal maneira que as extensões por eles sofridas e, também, pelo modelo composto, sejam iguais.

Assim, se se designar por:

- σ — tensão aplicada ao modelo de Kelvin
- σ_H — tensão suportada pelo modelo de Hooke
- σ_N — tensão suportada pelo modelo de Newton
- ε — extensão sofrida por qualquer dos modelos
- E — constante do modelo de Hooke (mola)
- K — constante do modelo de Newton (amortecedor)

deverá ser:

$$\sigma = \sigma_H + \sigma_N \quad (1)$$

o que conduz à equação reológica do modelo de Kelvin:

$$\sigma = E\varepsilon + K \frac{d\varepsilon}{dt} \quad (2)$$

correspondendo a 1.^a parcela à equação reológica do modelo de Hooke e a 2.^a parcela à do modelo de Newton.

* Eng.º civil, Investigador pelo LNEC, Prof. Cat. convidado do IST, Especialista de Geotecnia pela OE e Técnico da ENARCO.

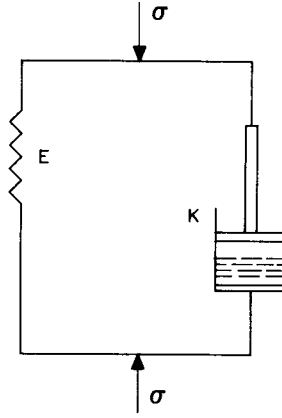


Fig. 1 — Modelo de Kelvin

Submeta-se o modelo de Kelvin a n ciclos lineares iguais de tensão de valor máximo mT e período $2T$, como se indica na Fig. 2.

Para o ciclo de ordem n , a tensão crescente, σ_c , será dada pela expressão:

$$\sigma_c = mT \left[\frac{t}{T} - (2n - 2) \right] \text{ com } n \in [\mathbf{N}] \quad (3)$$

sendo $[\mathbf{N}]$ o conjunto dos números naturais.

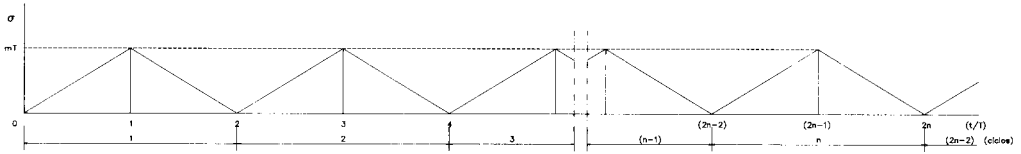


Fig. 2

A tensão decrescente, σ_d , correspondente ao mesmo ciclo de ordem n , será dada pela expressão:

$$\sigma_d = mT \left[-\frac{t}{T} + 2n \right] \text{ com } n \in [\mathbf{N}] \quad (4)$$

Os domínios da variável t são, respectivamente, para a tensão crescente, σ_c , para a tensão decrescente, σ_d , do ciclo de ordem n (ver Fig. 2):

$$(2n - 2)T \leq t \leq (2n - 1)T \quad (5)$$

e

$$(2n - 1)T \leq t \leq 2nT \quad (6)$$

A substituição de (3) em (2) permite obter a equação diferencial linear de primeira ordem da extensão correspondente ao ramo da tensão linear crescente do ciclo de ordem n :

$$\frac{d\varepsilon_c}{dt} + \frac{E}{K} \varepsilon_c = \frac{mT}{K} \left[\frac{t}{T} - (2n-2) \right] \quad (7)$$

calcule-se:

$$\gamma = \exp \left(\frac{E}{K} \int_{(2n-2)T}^t dt \right) = \exp \left(\frac{ET}{K} \left[\frac{t}{T} - (2n-2) \right] \right) \quad (8)$$

multiplique-se ambos os membros da equação diferencial (7) por (8) e integre-se membro a membro:

$$\begin{aligned} \int_{(2n-2)T}^t \left(\frac{d\varepsilon_c}{dt} \exp \left\{ \frac{ET}{K} \left[\frac{t}{T} - (2n-2) \right] \right\} + \frac{E}{K} \varepsilon_c \exp \left\{ \frac{ET}{K} \left[\frac{t}{T} - (2n-2) \right] \right\} \right) dt = \\ = \frac{mT}{K} \int_{(2n-2)T}^t \left[\frac{t}{T} - (2n-2) \right] \exp \left\{ \frac{ET}{K} \left[\frac{t}{T} - (2n-2) \right] \right\} dt \end{aligned} \quad (9)$$

O primeiro membro de (9) é um integral imediato, e, atendendo aos limites de integração, igual a:

$$\left[\varepsilon_c \exp \left\{ \frac{ET}{K} \left[\frac{t}{T} - (2n-2) \right] \right\} \right]_{(2n-2)T}^t = \varepsilon_c \exp \left\{ \frac{ET}{K} \left[\frac{t}{T} - (2n-2) \right] \right\} - \varepsilon_c [(2n-2)T] \quad (10)$$

em que $\varepsilon_c [(2n-2)T]$ é a extensão inicial do ramo da tensão linear crescente do ciclo de ordem n (ver expressão 5).

O segundo membro de (9) é a diferença de dois integrais, o primeiro integrável por partes e o segundo de integração imediata:

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_{(2n-2)T}^t t \exp \left\{ \frac{ET}{K} \left[\frac{t}{T} - (2n-2) \right] \right\} dt &= \frac{K}{E} \left[\left(\frac{t}{T} - \frac{K}{ET} \right) \exp \left\{ \frac{ET}{K} \left[\frac{t}{T} - (2n-2) \right] \right\} \right]_{(2n-2)T}^t = \\ &= \frac{K}{E} \left[\left(\frac{t}{T} - \frac{K}{ET} \right) \exp \left\{ \frac{ET}{K} \left[\frac{t}{T} - (2n-2) \right] \right\} - (2n-2) + \frac{K}{ET} \right] \end{aligned} \quad (11)$$

e:

$$(2n-2) \frac{K}{E} \left[\exp \left\{ \frac{ET}{K} \left[\frac{t}{T} - (2n-2) \right] \right\} \right]_{(2n-2)T}^t = (2n-2) \frac{K}{E} \left[\exp \left\{ \frac{ET}{K} \left[\frac{t}{T} - (2n-2) \right] \right\} - 1 \right] \quad (12)$$

A substituição de (10), (11) e (12) em (9) permite obter depois de efectuadas as operações convenientes:

$$\begin{aligned} \varepsilon_c(t) = & \varepsilon_c[(2n-2)T] \exp\left\{-\frac{ET}{K} \left[\frac{t}{T} - (2n-2)\right]\right\} + \\ & + \frac{mT}{E} \left\{ \left[\frac{t}{T} - (2n-2)\right] - \frac{K}{ET} \left[1 - \exp\left\{\frac{ET}{K} \left[\frac{t}{T} - (2n-2)\right]\right\}\right] \right\} \end{aligned} \quad (13)$$

De igual forma, a substituição de (4) em (2) permite obter a equação diferencial linear de primeira ordem da extensão correspondente ao ramo da tensão linear decrescente do ciclo de ordem n :

$$\frac{d\varepsilon_d}{dt} + \frac{E}{K} \varepsilon_d = \frac{mT}{K} \left[-\frac{t}{T} + 2n \right] \quad (14)$$

segundo raciocínio idêntico ao anterior, tem-se:

$$y = \exp\left\{\frac{E}{K} \int_{(2n-1)T}^t dt\right\} = \exp\left\{\frac{ET}{K} \left[\frac{t}{T} - (2n-1)\right]\right\} \quad (15)$$

multiplicando (14) por (15), vem:

$$\begin{aligned} \int_{(2n-1)T}^t \left(\frac{d\varepsilon_d}{dt} \exp\left\{\frac{ET}{K} \left[\frac{t}{T} - (2n-1)\right]\right\} + \frac{E}{K} \varepsilon_d \exp\left\{\frac{ET}{K} \left[\frac{t}{T} - (2n-1)\right]\right\} \right) dt = \\ = \frac{mT}{K} \int_{(2n-1)T}^t \left[-\frac{t}{T} + 2n \right] \exp\left\{\frac{ET}{K} \left[\frac{t}{T} - (2n-1)\right]\right\} dt \end{aligned} \quad (16)$$

O primeiro membro de (16) dá:

$$\left[\varepsilon_d \exp\left\{\frac{ET}{K} \left[\frac{t}{T} - (2n-1)\right]\right\} \right]_{(2n-1)T}^t = \varepsilon_d \exp\left\{\frac{ET}{K} \left[\frac{t}{T} - (2n-1)\right]\right\} - \varepsilon_d[(2n-1)T] \quad (17)$$

onde $\varepsilon_d[(2n-1)T]$ é a extensão inicial do ramo da tensão linear decrescente do ciclo de ordem n (ver expressão 6).

A integração do segundo membro de (16), por raciocínio igual ao anterior, dá, sucessivamente:

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_{(2n-1)T}^t -t \exp\left\{\frac{ET}{K} \left[\frac{t}{T} - (2n-1)\right]\right\} dt = \frac{K}{E} \left[\left(-\frac{t}{T} + \frac{K}{ET}\right) \exp\left\{\frac{ET}{K} \left[\frac{t}{T} - (2n-1)\right]\right\} \right]_{(2n-1)T}^t = \\ = \frac{K}{E} \left[\left(-\frac{t}{T} + \frac{K}{ET}\right) \exp\left\{\frac{ET}{K} \left[\frac{t}{T} - (2n-1)\right]\right\} + (2n-1) - \frac{K}{ET} \right] \end{aligned} \quad (18)$$

e

$$2n \frac{K}{E} \left[\exp \left\{ \frac{ET}{K} \left[\frac{t}{T} - (2n-1) \right] \right\} \right]_{(2n-1)T}^t = 2n \frac{K}{E} \left[\exp \left\{ \frac{ET}{K} \left[\frac{t}{T} - (2n-1) \right] \right\} - 1 \right] \quad (19)$$

A substituição de (17), (18) e (19) em (16) permite obter, depois de efectuadas as operações convenientes:

$$\begin{aligned} \varepsilon_d(t) = & \varepsilon_d[(2n-1)T] \exp \left\{ -\frac{ET}{K} \left[\frac{t}{T} - (2n-1) \right] \right\} + \\ & + \frac{mT}{E} \left\{ \left[-\frac{t}{T} + (2n-1) \right] + \left(1 + \frac{K}{ET} \right) \left(1 - \exp \left\{ -\frac{ET}{K} \left[\frac{t}{T} - (2n-1) \right] \right\} \right) \right\} \end{aligned} \quad (20)$$

A determinação dos valores genéricos de $\varepsilon_c[2n-2)T]$ e de $\varepsilon_d[2n-1)T]$, extensões iniciais dos valores das tensões crescentes e decrescentes, respectivamente, vai ser feita utilizando o método de indução, sabendo-se que para o primeiro período ($n=1$) e no início dos tempos ($t=0$) é, por hipótese:

$$\varepsilon_c[0] = 0 \quad (21)$$

Entrando com esta condição (21) em (15), tem-se para valor final da extensão do primeiro ramo de tensão crescente ($t=T$), ou seja, o valor inicial $\varepsilon_d[T]$ da extensão do primeiro ramo da tensão decrescente:

$$n=1; t=T \rightarrow \varepsilon_d[T] = 0 + \frac{mT}{E} \left\{ 1 - \frac{K}{ET} \left[1 - \exp \left(-\frac{ET}{K} \right) \right] \right\}; \quad (22)$$

para valor inicial do segundo ramo crescente, será, atendendo a (20) e (22):

$$n=2; t=2T \rightarrow \varepsilon_c[2T] = \frac{mT}{E} \left\{ \frac{K}{ET} \left[1 - \exp \left(-\frac{ET}{K} \right) \right]^2 \right\}; \quad (23)$$

para valor inicial do segundo ramo decrescente, será, atendendo a (13) e (23):

$$\begin{aligned} n=2; t=3T \rightarrow \varepsilon_d[3T] = & \frac{mT}{E} \left\{ \frac{K}{ET} \left[1 - \exp \left(-\frac{ET}{K} \right) \right]^2 \exp \left(-\frac{ET}{K} \right) + \right. \\ & \left. + \left\{ 1 - \frac{K}{ET} \left[1 - \exp \left(-\frac{ET}{K} \right) \right] \right\} \right\}; \end{aligned} \quad (24)$$

para valor inicial do terceiro ramo crescente, será, atendendo a (20) e (24):

$$n=3; t=4T \rightarrow \varepsilon_c[4T] = \frac{mT}{E} \left\{ \frac{K}{ET} \left[1 - \exp \left(-\frac{ET}{K} \right) \right]^2 \left[1 + \exp \left(-2 \frac{ET}{K} \right) \right] \right\}; \quad (25)$$

para valor inicial do terceiro ramo decrescente, será, atendendo a (13) e (25):

$$n=3; t=5T \rightarrow \varepsilon_d[5T] = \frac{mT}{E} \left\{ \frac{K}{ET} \left[1 - \exp\left(-\frac{ET}{K}\right) \right]^2 \exp\left(-\frac{ET}{K}\right) \left[1 + \exp\left(-2\frac{ET}{K}\right) \right] + \right. \\ \left. + \left\{ 1 - \frac{K}{ET} \left[1 - \exp\left(-\frac{ET}{K}\right) \right] \right\} \right\}. \quad (26)$$

Atendendo às expressões (21), (23) e (25), é possível induzir a lei de formação de $\varepsilon_c [2n-2)T]$:

$$\varepsilon_c[(2n-2)T] = \frac{mT}{E} \left\{ \frac{K}{ET} \left[1 - \exp\left(-\frac{ET}{K}\right) \right]^2 \left[0 + 1 + \exp\left(-2\frac{ET}{K}\right) + \dots + \exp\left[-(2n-2)\frac{ET}{K}\right] \right] \right\}; \quad (27)$$

a série encontrada, com exclusão do primeiro termo que é nulo, corresponde a uma progressão geométrica de termo inicial $a = 1$ e razão $r = \exp\left(-2\frac{ET}{K}\right)$, sendo a soma dos seus $(n-1)$ primeiros termos dada por:

$$S_n = \frac{a(1-r^{n-1})}{1-r} = \frac{1 - \exp\left[-(2n-2)\frac{ET}{K}\right]}{1 - \exp\left(-2\frac{ET}{K}\right)}; \quad (28)$$

a substituição de (28) em (27) permite escrever a lei de formação:

$$\varepsilon_c[(2n-2)T] = \frac{mT}{E} \left\{ \frac{K}{ET} \frac{1 - \exp\left(-\frac{ET}{K}\right)}{1 + \exp\left(-\frac{ET}{K}\right)} \left\{ 1 - \exp\left[-(2n-2)\frac{ET}{K}\right] \right\} \right\}. \quad (29)$$

As expressões (22), (24) e (26) permitem induzir a lei de formação de $\varepsilon_d [2n-1)T]$, donde:

$$\varepsilon_d[(2n-1)T] = \frac{mT}{E} \left\{ \frac{K}{ET} \left[1 - \exp\left(-\frac{ET}{K}\right) \right]^2 \exp\left(-\frac{ET}{K}\right) \left[0 + 1 + \exp\left(-2\frac{ET}{K}\right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \dots + \exp\left[-(2n-2)\frac{ET}{K}\right] \right] + \left[1 - \frac{K}{ET} \left[1 - \exp\left(-\frac{ET}{K}\right) \right] \right] \right\}. \quad (30)$$

Tendo em consideração o valor da soma da série (28) obtém-se:

$$\varepsilon_d[(2n-1)T] = \frac{mT}{E} \left\{ \frac{K}{ET} \exp\left(-\frac{ET}{K}\right) \frac{1 - \exp\left(-\frac{ET}{K}\right)}{1 + \exp\left(-\frac{ET}{K}\right)} \left\{ 1 - \exp\left[-(2n-2)\frac{ET}{K}\right] \right\} + \right. \\ \left. + \left\{ 1 - \frac{K}{ET} \left[1 - \exp\left(-\frac{ET}{K}\right) \right] \right\} \right\} = \frac{mT}{E} \left\{ 1 - \frac{K}{ET} \frac{1 - \exp\left(-\frac{ET}{K}\right)}{1 + \exp\left(-\frac{ET}{K}\right)} \left\{ 1 + \exp\left[-(2n-1)\frac{ET}{K}\right] \right\} \right\}. \quad (31)$$

Das expressões (29) e (31) é possível concluir a seguinte relação:

$$\varepsilon_d[(2n-1)T] - \varepsilon_c[2nT] \exp\left(-\frac{ET}{K}\right) = 1 - \frac{K}{ET} \left[1 - \exp\left(-\frac{ET}{K}\right)\right] \quad (32)$$

independente da ordem n do ciclo.

A substituição de (29) em (13) permite, finalmente, obter a evolução da extensão $\varepsilon_c(t)$ no ramo crescente de tensão linear no ciclo de ordem n , depois de efectuadas as convenientes operações:

$$\begin{aligned} \varepsilon_c(t) = & \frac{mT}{E} \left\{ \frac{t}{T} - (2n-2) - \frac{K}{ET} \left\{ 1 - \exp\left\{-\frac{ET}{K} \left[\frac{t}{T} - (2n-2) \right] \right\} \right\} \times \right. \\ & \left. \times \left\{ 1 + \frac{1 - \exp\left(-\frac{ET}{K}\right)}{1 + \exp\left(-\frac{ET}{K}\right)} \left[1 - \exp\left[-(2n-2)\frac{ET}{K}\right] \right] \right\} \right\} \end{aligned} \quad (33)$$

A substituição de (31) em (20) permite, finalmente, obter a evolução da extensão $\varepsilon_d(t)$ no ramo decrescente de tensão linear no ciclo de ordem n , depois de efectuadas as convenientes operações:

$$\begin{aligned} \varepsilon_d(t) = & \frac{mT}{E} \left\{ -\frac{t}{T} + 2n + \frac{K}{ET} \left\{ 1 - \exp\left\{-\frac{ET}{K} \left[\frac{t}{T} - (2n-1) \right] \right\} \right\} \right. \\ & \left. \left\{ 1 + \frac{1 - \exp\left(-\frac{ET}{K}\right)}{1 + \exp\left(-\frac{ET}{K}\right)} \left[1 + \exp\left[-(2n-1)\frac{ET}{K}\right] \right] \right\} \right\} \end{aligned} \quad (34)$$

Como verificação, as expressões (33) e (34) assumem o mesmo valor para $t = (2n-1)T$, e igual a (31).

As expressões (33) e (34) representam cada uma, uma família de exponenciais de parâmetro n , a primeira com a concavidade dirigida no sentido dos ε positivos e a segunda com a concavidade dirigida no sentido dos ε negativos.

As exponenciais homólogas das duas famílias encontram-se em cada ciclo de ordem n , no seu ponto médio, de coordenadas:

$$t = (2n-1)T \rightarrow \varepsilon = \varepsilon_d[(2n-1)T] < > \text{expressão (31)} \quad (35)$$

e, também, nos pontos comuns dos ciclos:

$$t = (2n-2)T \rightarrow \varepsilon = \varepsilon_c[(2n-2)T] < > \text{expressão (29)} \quad (36)$$

Os lugares geométricos destes dois conjuntos de pontos (35) e (36) são definidos por curvas de tipo exponencial, expressões (31) e (29), respectivamente, e que admitem, cada uma, uma assíntota ε_c^a paralela ao eixo dos t . Assim, ter-se-á, para a expressão (29):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_c[(2n-2)T] = \frac{mT}{E} \left[\frac{K}{ET} \frac{1 - \exp\left(-\frac{ET}{K}\right)}{1 + \exp\left(-\frac{ET}{K}\right)} \right] = \varepsilon_c^a \quad (37)$$

e para a expressão (31) a assíntota ϵ_d^a paralela ao eixo dos t :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon_d [(2n-1)T] = \frac{mT}{E} \left[1 - \frac{K}{ET} \frac{1 - \exp\left(-\frac{ET}{K}\right)}{1 + \exp\left(-\frac{ET}{K}\right)} \right] = \epsilon_d^a \quad (38)$$

A média aritmética das ordenadas destas duas assíntotas, tem o valor de:

$$\frac{\epsilon_c^a + \epsilon_d^a}{2} = \frac{1}{2} \frac{mT}{E}. \quad (39)$$

A família de exponenciais (33), correspondente aos ramos crescentes, tem como vértices (valores mínimos), os pontos de abcissas t_{vc} :

$$\frac{d\epsilon_c}{dt} = 0 \rightarrow t_{vc} = (2n-2)T + \frac{K}{E} \ln \left\{ 1 + \frac{1 - \exp\left(-\frac{ET}{K}\right)}{1 + \exp\left(-\frac{ET}{K}\right)} \left[1 - \exp\left[-(2n-2)\frac{ET}{K}\right] \right] \right\} \quad (40)$$

cujas ordenadas ϵ_{vc} se obtêm substituindo (40) em (33) e efectuando as operações, donde:

$$\epsilon_{vc} = \frac{mT}{E} - \frac{K}{ET} \ln \left\{ 1 + \frac{1 - \exp\left(-\frac{ET}{K}\right)}{1 + \exp\left(-\frac{ET}{K}\right)} \left[1 - \exp\left[-(2n-2)\frac{ET}{K}\right] \right] \right\}. \quad (41)$$

A família de exponenciais (34), correspondente aos ramos decrescentes, tem como vértices (valores máximos), os pontos de abcissas t_{vd} :

$$\frac{d\epsilon_d}{dt} = 0 \rightarrow t_{vd} = (2n-1)T + \frac{K}{E} \ln \left\{ 1 + \frac{1 - \exp\left(-\frac{ET}{K}\right)}{1 + \exp\left(-\frac{ET}{K}\right)} \left[1 + \exp\left[-(2n-1)\frac{ET}{K}\right] \right] \right\} \quad (42)$$

cujas ordenadas ϵ_{vd} se obtêm substituindo (42) em (34) e efectuando as operações, donde:

$$\epsilon_{vd} = \frac{mT}{E} - \left[1 - \frac{K}{ET} \ln \left\{ 1 + \frac{1 - \exp\left(-\frac{ET}{K}\right)}{1 + \exp\left(-\frac{ET}{K}\right)} \left[1 + \exp\left[-(2n-1)\frac{ET}{K}\right] \right] \right\} \right]. \quad (43)$$

Os lugares geométricos dos vértices das duas famílias de exponenciais (33) e (34) são curvas logarítmicas, dadas, respectivamente, pelas expressões (41) e (43) e que admitem, cada uma, uma assíntota, ϵ_{vc}^a ou ϵ_{vd}^a , paralela ao eixo dos t ; assim, tem-se, para a expressão (41):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon_{vc} = \frac{mT}{E} - \frac{K}{ET} \ln \left[1 + \frac{1 - \exp\left(-\frac{ET}{K}\right)}{1 + \exp\left(-\frac{ET}{K}\right)} \right] = \epsilon_{vc}^a \quad (44)$$

e para a expressão (43):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon_{vd} = \frac{mT}{E} \left\{ 1 - \frac{K}{ET} \ln \left[1 + \frac{1 - \exp\left(-\frac{ET}{K}\right)}{1 + \exp\left(-\frac{ET}{K}\right)} \right] \right\} = \epsilon_{vd}^a. \quad (45)$$

A média aritmética das coordenadas (44) e (45), correspondentes às assíntotas dos lugares geométricos dos vértices das duas famílias de exponenciais (33) e (34), tem o mesmo valor já encontrado em (39) para as assíntotas dos lugares geométricos dos pontos de encontro das mesmas famílias:

$$\frac{\epsilon_{vc}^a + \epsilon_{vd}^a}{2} = \frac{1}{2} \frac{mT}{E}. \quad (46)$$

Os vértices correspondentes aos ramos crescentes, situam-se, como se irá demonstrar, no domínio do ciclo da ordem n considerado, expressão (5), e no seu início, para o primeiro ciclo; atendendo a (40), deverá verificar-se a dupla desigualdade:

$$0 \leq \frac{K}{E} \ln \left\{ 1 + \frac{1 - \exp\left(-\frac{ET}{K}\right)}{1 + \exp\left(-\frac{ET}{K}\right)} \left[1 - \exp\left[-(2n-2)\frac{ET}{K}\right] \right] \right\} \leq T \quad (47)$$

a qual resolvida conduz a:

$$\begin{cases} 0 \leq (n-1) \frac{ET}{K} \\ \exp\left[-(2n-1)\frac{ET}{K}\right] \geq -1 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} n \geq 1 \\ n \in [\mathbb{N}] \end{cases} \quad \text{com} \quad \frac{ET}{K} > 0. \quad (48)$$

Os vértices correspondentes aos ramos decrescentes situam-se sempre dentro do domínio (6) do ciclo da ordem n , pelo que atendendo a (42) se deverá verificar a dupla desigualdade:

$$0 < \frac{K}{E} \ln \left\{ 1 + \frac{1 - \exp\left(-\frac{ET}{K}\right)}{1 + \exp\left(-\frac{ET}{K}\right)} \left[1 + \exp\left[-(2n-1)\frac{ET}{K}\right] \right] \right\} < T \quad (49)$$

a qual resolvida conduz a:

$$n > 0 \quad \text{ou} \quad n \in [\mathbb{N}] \quad \text{com} \quad \frac{ET}{K} > 0. \quad (50)$$

As exponenciais homólogas das duas famílias admitem as mesmas tangentes nos pontos comuns (31) ou (35), pelo que basta verificar que os coeficientes angulares dessas tangentes

são iguais. Os coeficientes angulares $a_c(t)$ das tangentes às exponenciais pertencentes à família (33) são dados por:

$$a_c(t) = \frac{d\varepsilon_c(t)}{dt} = \frac{m}{E} \left\{ 1 - \exp \left\{ -\frac{ET}{K} \left[\frac{t}{T} - (2n-2) \right] \right\} \right\} \times$$

$$\times \left\{ 1 + \frac{1 - \exp \left(-\frac{ET}{K} \right)}{1 + \exp \left(-\frac{ET}{K} \right)} \left[1 - \exp \left[- (2n-2) \frac{ET}{K} \right] \right] \right\} \quad (51)$$

tomando nos pontos de encontro (35) dados pela expressão (31), para $t = (2n-1)T$, depois de efectuadas as operações convenientes, os valores:

$$a_c[(2n-1)T] = \frac{mT}{ET} \frac{1}{T} \left[1 - \exp \left(-\frac{ET}{K} \right) \right] \left\{ 1 - \frac{\exp \left(-\frac{ET}{K} \right)}{1 + \exp \left(-\frac{ET}{K} \right)} \left[1 - \exp \left[- (2n-2) \frac{ET}{K} \right] \right] \right\} \quad (52)$$

Os coeficientes angulares $a_d(t)$ das tangentes às exponenciais pertencentes à família (34), são dados por:

$$a_d(t) = \frac{d\varepsilon_d(t)}{dt} = \frac{m}{E} \left\{ -1 + \exp \left\{ -\frac{ET}{K} \left[\frac{t}{T} - (2n-1) \right] \right\} \right\} \times$$

$$\times \left\{ 1 + \frac{1 - \exp \left(-\frac{ET}{K} \right)}{1 + \exp \left(-\frac{ET}{K} \right)} \left[1 + \exp \left[- (2n-1) \frac{ET}{K} \right] \right] \right\} \quad (53)$$

tomando nos pontos de encontro (35) dados pela expressão (31), para $t = (2n-1)T$, depois de efectuadas as operações convenientes, os valores:

$$a_d[(2n-1)T] = \frac{mT}{E} \frac{1}{T} \left[1 - \exp \left(-\frac{ET}{K} \right) \right] \left\{ 1 - \frac{\exp \left(-\frac{ET}{K} \right)}{1 + \exp \left(-\frac{ET}{K} \right)} \left[1 - \exp \left[- (2n-2) \frac{ET}{K} \right] \right] \right\} \quad (54)$$

Dada a igualdade das expressões (52) e (54), os pontos comuns a meio do ciclo de ordem n admitem a mesma tangente à esquerda e à direita, embora diferentes para cada ciclo, por serem função da ordem n do ciclo.

Os pontos de transição entre os ciclos de ordem $(n - 1)$ e ordem n terão os seguintes coeficientes angulares; para o ramo decrescente, substituindo n por $(n - 1)$ na expressão (34) e derivando, tem-se:

$$a_d(t) = \frac{d\varepsilon_d(t)}{dt} = \frac{m}{E} \left\{ -1 + \exp \left\{ -\frac{ET}{K} \left[\frac{t}{T} - (2n-3) \right] \right\} \right\} \times$$

$$\times \left\{ 1 + \frac{1 - \exp \left(-\frac{ET}{K} \right)}{1 + \exp \left(-\frac{ET}{K} \right)} \left[1 + \exp \left[- (2n-3) \frac{ET}{K} \right] \right] \right\}, \quad (55)$$

tomando nos pontos de encontro (36), para $t = (2n - 2)T$, depois de efectuadas as operações convenientes, os valores:

$$a_d[(2n-2)T] = -\frac{mT}{E} \frac{1}{T} \frac{1 - \exp \left(-\frac{ET}{K} \right)}{1 + \exp \left(-\frac{ET}{K} \right)} \left[1 - \exp \left[- (2n-2) \frac{ET}{K} \right] \right]. \quad (56)$$

A expressão (51) toma nos pontos de encontro (36), para $t = (2n - 2)T$, depois de efectuadas as operações convenientes, os valores:

$$a_c[(2n-2)T] = -\frac{mT}{E} \frac{1}{T} \frac{1 - \exp \left(-\frac{ET}{K} \right)}{1 + \exp \left(-\frac{ET}{K} \right)} \left[1 - \exp \left[- (2n-2) \frac{ET}{K} \right] \right], \quad (57)$$

idênticos ao da expressão (56), o que prova a existência de tangentes comuns, à esquerda e à direita, dos pontos de encontro (36), embora com coeficientes angulares diferentes em cada ciclo, dada a dependência de n das expressões (56) e (57).

Cada exponencial da família (33), referente aos ramos crescentes, admite uma assíntota oblíqua, de equação:

$$\varepsilon = k t + p \quad (58)$$

em que

$$k = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon_c(t)}{t} = \frac{m}{E}$$

e

$$p = \lim_{t \rightarrow \infty} [\varepsilon_c(t) - k t] = \frac{mT}{E} \left[- (2n-2) - \frac{K}{ET} \right]$$

(59)

valores que substituídos em (58) conduzem à equação genérica das assíptotas:

$$\varepsilon = \frac{mT}{E} \left\{ \frac{t}{T} - \left[(2n-2) + \frac{K}{ET} \right] \right\} \quad (60)$$

constituindo uma família de rectas paralelas, por admitir um coeficiente angular independente de n .

Raciocínio idêntico para a família de exponenciais (34) conduz a:

$$k = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon_d(t)}{t} = -\frac{m}{E} \quad (61)$$

$$p = \lim_{t \rightarrow \infty} [\varepsilon_d(t) - k t] = \frac{mT}{E} \left[2n + \frac{K}{ET} \right]$$

e para equação genérica das assíptotas:

$$\varepsilon = \frac{mT}{E} \left\{ -\frac{t}{T} + \left[2n + \frac{K}{ET} \right] \right\} \quad (62)$$

constituindo, igualmente, uma família de rectas paralelas com coeficiente angular simétrico do da família (60).

O lugar geométrico dos pontos de encontro das assíptotas homólogas é definido pela recta paralela ao eixo dos t , de equação:

$$\varepsilon = \frac{mT}{E} \quad , \quad (63)$$

que se obtém eliminando o parâmetro n , pela soma das expressões (60) e (62). A abcissa genérica, do ponto de encontro, de cada par de assíptotas homólogas, é:

$$t = \left[(2n-1) + \frac{K}{ET} \right] T \quad (64)$$

e obtém-se substituindo (63) em (60) ou (62).

A extensão média, ε_m , no ciclo de ordem n , devido à lei de tensão aplicada, obtém-se dividindo a área, A_e , limitada pelas curvas das extensões e pelo eixo dos t , pela amplitude, $2T$, do ciclo, donde:

$$\varepsilon_m = \frac{1}{2T} \left[\int_{(2n-2)T}^{(2n-1)T} \varepsilon_c(t) dt \right] + \left[\int_{(2n-1)T}^{2nT} \varepsilon_d(t) dt \right] ; \quad (65)$$

atendendo às expressões (33) e (34) e depois de efectuadas as operações convenientes, obtém-se:

$$\varepsilon_m = \frac{mT}{2E} \left\{ 1 - \left\{ \frac{K}{ET} \left[1 - \exp\left(-\frac{ET}{K}\right) \right] \exp\left[-(n-1)\frac{ET}{K}\right] \right\}^2 \right\}. \quad (66)$$

Sabendo-se que as extensões no modelo de Kelvin devidas à fluência de uma tensão normal constante de valor igual a metade da tensão linear máxima considerada neste estudo, são dadas por*:

$$\varepsilon = \frac{mT}{2E} \left[1 - \exp\left(-\frac{E}{K} t\right) \right], \quad (67)$$

a extensão média, ε_{fm} , do ciclo da ordem n , será dada por:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{fm} &= \frac{1}{2T} \int_{(2n-2)T}^{2nT} \frac{mT}{2E} \left[1 - \exp\left(-\frac{E}{K} t\right) \right] dt = \\ &= \frac{mT}{2E} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \frac{K}{ET} \left[1 - \exp\left(-2 \frac{ET}{K}\right) \right] \exp\left[-(2n-2) \frac{ET}{K}\right] \right\}. \end{aligned} \quad (68)$$

Calcule-se a diferença, $\Delta\varepsilon$, entre as duas extensões médias obtidas:

$$\begin{aligned} \Delta\varepsilon &= \varepsilon_m - \varepsilon_{fm} = \\ &= \frac{mT}{2E} \left\{ \frac{K}{ET} \left[1 - \exp\left(-\frac{ET}{K}\right) \right] \exp\left[-(2n-2) \frac{ET}{K}\right] \left\{ \frac{K}{ET} \left[1 - \exp\left(-\frac{ET}{K}\right) \right] - \frac{1}{2} \left[1 + \exp\left(-\frac{ET}{K}\right) \right] \right\} \right\} \end{aligned} \quad (69)$$

e verifique-se que esta diferença $\Delta\varepsilon$ é sempre positiva, para o que basta provar que:

$$\frac{K}{ET} \left[1 - \exp\left(-\frac{ET}{K}\right) \right] - \frac{1}{2} \left[1 + \exp\left(-\frac{ET}{K}\right) \right] > 0 \quad (70)$$

daqui resulta, que deverá ser:

$$\frac{ET}{K} < \ln \frac{1 + \frac{ET}{K}}{1 - \frac{ET}{2K}}. \quad (71)$$

Desenvolvendo em série de MacLaurin o segundo membro, tem-se:

$$\frac{ET}{K} < 2 \sum_{i=1}^n \frac{1}{2n-1} \left(\frac{ET}{2K} \right)^{2n-1} \quad (72)$$

* Ver, por exemplo, *Mecânica das Rochas* de Manuel Rocha, 1981, pág. 186.

ou seja:

$$\frac{ET}{K} < \frac{ET}{K} + \frac{1}{12} \left(\frac{ET}{K} \right)^3 + \dots + \frac{1}{(2n-1) 2^{2n-2}} \left(\frac{ET}{K} \right)^{2n-1} \quad (73)$$

que prova a afirmação feita.

Esta constatação mostra que a elasticidade retardada do modelo de Kelvin é mais lenta para a tensão linear cíclica de valor máximo, mT , do que para a fluência da tensão média, $\frac{mT}{2}$, embora com o aumento do número de ciclos, as extensões médias de ambas tendam para o valor comum $\frac{mT}{2E}$; dado que atendendo a (66) e (69) se verifica:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_m = \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_{fm} = \frac{mT}{2E} \quad (74)$$

Na fig. 3, encontra-se representado o caso que se acaba de analisar, para o valor particular de $K/ET = 2$. A curva ondulatória a traço contínuo grosso representa a extensão ε do modelo de Kelvin sujeito a uma tensão linear cíclica, e é formado por troços das duas famílias de exponenciais correspondentes aos ramos crescentes e decrescentes das tensões lineares, aqui representadas por ponteadado fino, nas partes não pertencentes à curva ondulatória, e identificadas pelo número, entre parêntesis, da expressão que as definem e pelo número n do ciclo a que pertencem.

As assíptotas das duas famílias de exponenciais acima referidas, rectas oblíquas, estão representadas por traço-ponto fino, sendo identificadas pelos números da expressão e do ciclo que as definem.

Os pontos máximos e mínimos da curva ondulatória da extensão ε tenderão, respectivamente, para as assíptotas paralelas ao eixo do tempo (horizontal), definidas pelas expressões (45) e (44).

Indica-se, também, em eixos coincidentes, o diagrama dos ramos da tensão linear cíclica bem como o número das expressões que os definem e o número do ciclo a que pertencem.

Analise-se agora o caso de o semi-período T tender para zero, conservando o valor máximo da tensão cíclica, mT , isto é, a sua amplitude, σ_M . Nesta hipótese, ter-se-á:

$$\lim_{\substack{T \rightarrow 0 \\ m \rightarrow \infty}} mT = \sigma_M \quad (75)$$

A família de exponenciais correspondente aos ramos de tensão crescente, expressão (33), tendo em atenção (75) e também que, no limite, se pode considerar:

$$(2n - 2)T = t \quad (76)$$

tenderá para:

$$\lim_{T \rightarrow 0} \varepsilon_c(t) = \frac{\sigma_M}{E} \left(\frac{t}{T} - \frac{t}{T} - \frac{K}{E} \lim_{T \rightarrow 0} \frac{1 - \left(1 + \frac{1 - \exp\left(-\frac{ET}{K}\right)}{1 + \exp\left(-\frac{ET}{K}\right)} \left[1 - \exp\left(-\frac{E}{K} t\right) \right] \right)}{T} \right) \quad (77)$$

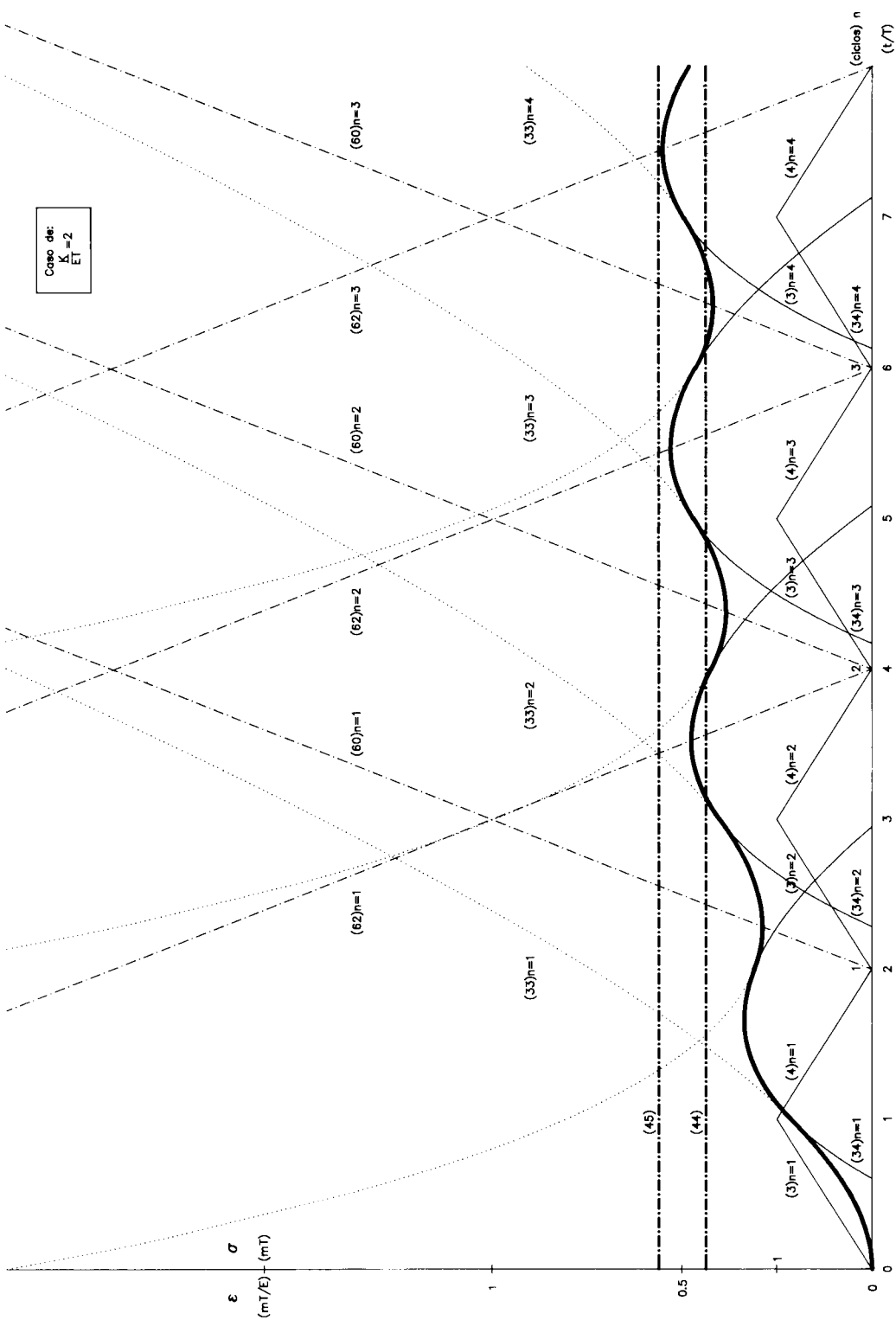


Fig. 3

a aplicação da regra de l'Hôpital permite, depois de efectuadas as operações convenientes, obter:

$$\lim_{T \rightarrow 0} \varepsilon_c(t) = \frac{\sigma_M}{2E} \left[1 - \exp\left(-\frac{E}{K} t\right) \right]. \quad (78)$$

O resultado obtido mostra que, quando o semi-período T tende para zero, as exponenciais da família (33) tendem para a curva das extensões devidas à fluência de uma tensão igual a metade da tensão máxima σ_M .

A família de exponenciais correspondentes aos ramos da tensão decrescente, expressão (34), tendo em atenção (75) e também que, no limite, se pode considerar:

$$(2n - 1)T = t \quad (79)$$

tenderá para:

$$\lim_{T \rightarrow 0} \varepsilon_d(t) = \frac{\sigma_M}{E} \left\{ -\frac{t}{T} + \frac{t}{T} + 1 + \frac{K}{E} \lim_{T \rightarrow 0} \frac{1 - \left\{ 1 + \frac{1 - \exp\left(-\frac{ET}{K}\right)}{1 + \exp\left(-\frac{ET}{K}\right)} \left[1 + \exp\left(-\frac{E}{K} t\right) \right] \right\}}{T} \right\} \quad (80)$$

a aplicação da regra de l'Hôpital permite, depois de efectuadas as operações convenientes, obter:

$$\lim_{T \rightarrow 0} \varepsilon_d(t) = \frac{\sigma_M}{2E} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left[1 + \exp\left(-\frac{E}{K} t\right) \right] \right\} = \frac{\sigma_M}{2E} \left[1 - \exp\left(-\frac{E}{K} t\right) \right] \quad (81)$$

resultado idêntico a (78), como seria de esperar.

Os pontos de encontro (29) ou (36) das duas famílias de exponenciais (33) e (34), tendo em atenção (75) e (76), tendem para:

$$\lim_{T \rightarrow 0} \varepsilon_c[(2n-2)T] = \frac{\sigma_M}{E} \frac{K}{E} \lim_{T \rightarrow 0} \frac{\frac{1 - \exp\left(-\frac{ET}{K}\right)}{1 + \exp\left(-\frac{ET}{K}\right)} \left[1 - \exp\left(-\frac{E}{K} t\right) \right]}{T} \quad (82)$$

aplicando a regra de l'Hôpital:

$$\lim_{T \rightarrow 0} \varepsilon_c[(2n-2)T] = \frac{\sigma_M}{2E} \left[1 - \exp\left(-\frac{K}{E} t\right) \right] \quad (83)$$

igualmente os pontos de encontro (31) ou (35), tendo em atenção (75) e (79), tendem para o mesmo limite:

$$\lim_{T \rightarrow 0} \varepsilon_d[(2n-1)T] = \frac{\sigma_M}{E} \left\{ 1 - \frac{K}{E} \lim_{T \rightarrow 0} \frac{\frac{1 - \exp\left(-\frac{ET}{K}\right)}{1 + \exp\left(-\frac{ET}{K}\right)} \left[1 + \exp\left(-\frac{E}{K} t\right) \right] \right\} \quad (84)$$

aplicando a regra de l'Hôpital vem:

$$\lim_{T \rightarrow 0} \varepsilon_d[(2n-1)T] = \frac{\sigma_M}{E} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left[1 + \exp\left(-\frac{E}{K} t\right) \right] \right\} = \frac{\sigma_M}{2E} \left[1 - \exp\left(-\frac{E}{K} t\right) \right]. \quad (85)$$

Com raciocínio idêntico se verifica que os vértices (valores mínimos) (41) da família de exponenciais (33) e os vértices (valores máximos) (43) da família de exponenciais (34) tendem para o mesmo limite (83) ou (85); será, pois, sucessivamente:

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow 0} \varepsilon_{vc} &= \frac{\sigma_M}{E} \frac{K}{E} \lim_{T \rightarrow 0} \frac{\ln \left\{ 1 + \frac{1 - \exp\left(-\frac{ET}{K}\right)}{1 + \exp\left(-\frac{ET}{K}\right)} \left[1 - \exp\left(-\frac{E}{K} t\right) \right] \right\}}{T} = \\ &= \frac{\sigma_M}{E} \frac{K}{E} \lim_{T \rightarrow 0} \frac{\frac{E}{K} \frac{1}{2} \left[1 - \exp\left(-\frac{E}{K} t\right) \right]}{\frac{1 - \exp\left(-\frac{ET}{K}\right)}{1 + \exp\left(-\frac{ET}{K}\right)} \left[1 - \exp\left(-\frac{E}{K} t\right) \right]} = \frac{\sigma_M}{2E} \left[1 - \exp\left(-\frac{E}{K} t\right) \right]; \end{aligned} \quad (86)$$

para os vértices (41), e:

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow 0} \varepsilon_{vd} &= \frac{\sigma_M}{E} \left\{ 1 - \frac{K}{E} \lim_{T \rightarrow 0} \frac{\ln \left\{ 1 + \frac{1 - \exp\left(-\frac{ET}{K}\right)}{1 + \exp\left(-\frac{ET}{K}\right)} \left[1 + \exp\left(-\frac{E}{K} t\right) \right] \right\}}{T} \right\} = \\ &= \frac{\sigma_M}{E} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left[1 + \exp\left(-\frac{E}{K} t\right) \right] \right\} = \frac{\sigma_M}{2E} \left[1 - \exp\left(-\frac{E}{K} t\right) \right] \end{aligned} \quad (87)$$

para os vértices (43).

Na Fig. 4, à semelhança da Fig. 3, encontra-se representada a evolução da extensão ε devida à tensão linear cíclica quando o seu período tende para zero e os números das expressões correspondentes que a definem; representa-se também a assíntota (88) resultante da posição média das assíntotas (44) e (45) da Fig. 3. Igualmente se representou a tensão linear cíclica aplicada com um período tendendo para zero.

Pelo que se acaba de expor, pode concluir-se que à medida que o semi-período, T , da extensão linear cíclica de valor máximo, σ_M , tende para zero, a amplitude e o período da curva ondulatória das extensões do modelo reológico de Kelvin diminuem, tendendo a evanescer de forma a que a curva das extensões se confunda com a curva das extensões devida à fluência de uma tensão igual a metade de σ_M .

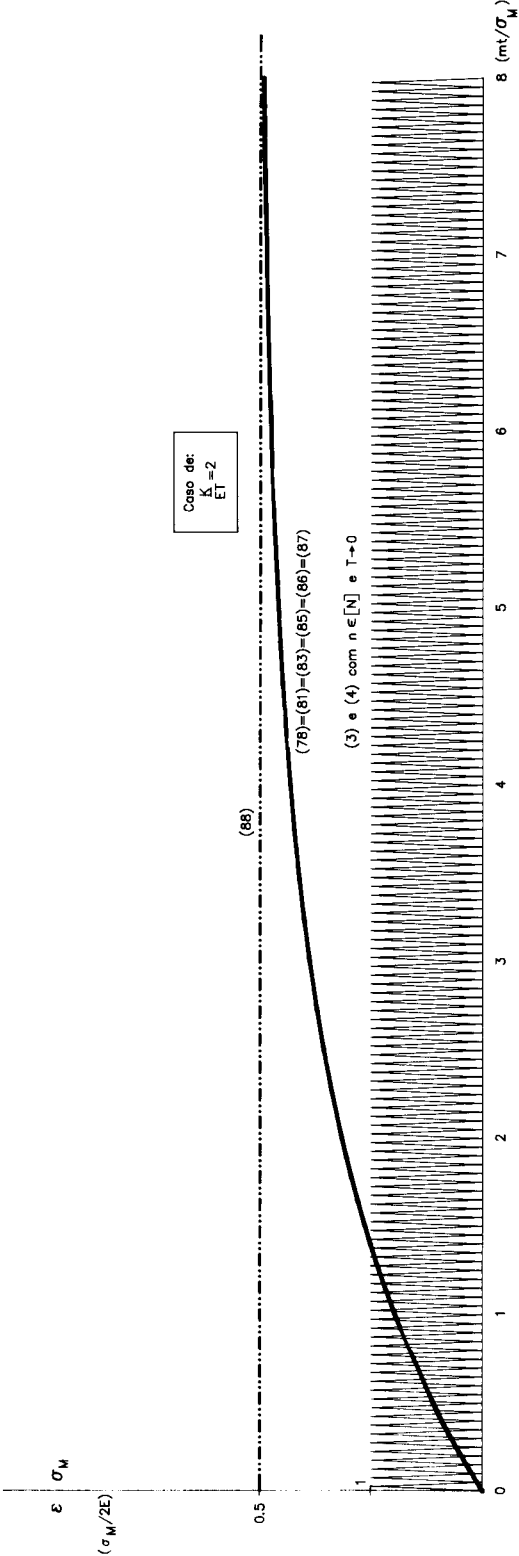


Fig. 4

A não existência de uma mola (modelo de Hooke) em série no modelo de Kelvin conduz à não existência de uma curva de extensão vibratória que tenderia a acelerar a ruína de um material, por deformação excessiva ou por rotura, quando o semi-período, T , da tensão linear tendesse para zero, desde que esse material tivesse um comportamento que fosse traduzido satisfatoriamente pelo modelo de Kelvin. Esta afirmação está apoiada, também, num estudo semelhante efectuado para o modelo reológico de Maxwell*.

* Ver Geotecnia n.º 60, "*Modelo reológico de Maxwell sujeito a uma tensão linear cíclica*".