A RELAÇÃO ENTRE A ÁREA E A INTENSIDADE DUMA FAMÍLIA DE DIACLASES*

The Relation Between the Area and the Intensity of a Joint Set

por
NUNO FEODOR GROSSMANN**

RESUMO — Apresentam-se as distribuições estatísticas usadas para a descrição da área duma família de diaclases, bem como um estudo sobre a contribuição das diferentes áreas das diaclases para a fracturação total induzida pela família de diaclases. Analisa-se a relação entre a área e a intensidade duma família de diaclases, e mostra-se que, se se desprezarem as diaclases com uma área menor que a área média da família de diaclases, o espaçamento das diaclases restantes é quase o mesmo que o espaçamento da família de diaclases completa, mas a área média das diaclases restantes é cerca do triplo da área média da família de diaclases completa.

ABSTRACT — The statistical distributions used for the description of the area of a joint set are presented, as well as a study on the contribution of the different joint areas to the total fracturing induced by the joint set. The relation between the area and the intensity of a joint set is analysed, and it is shown that, if the joints with an area smaller than the mean area of the joint set are disregarded, the spacing of the remaining joints is nearly the same as the spacing of the complete joint set, but the mean area of the remaining joints is about the triple of the mean area of the complete joint set.

1 — INTRODUÇÃO

A caracterização geométrica das famílias de diaclases que ocorrem num dado maciço rochoso é geralmente feita descrevendo a sua atitude, intensidade, área e abertura com o auxílio de distribuições estatísticas.

As distribuições estatísticas usadas para a descrição da atitude (Grossmann, 1985) e da intensidade (Grossmann, 1988) já foram tratadas. Esta comunicação começará por dar alguma informação sobre as distribuições estatísticas que podem ser usadas para a descrição da área.

2 — DISTRIBUIÇÕES ESTATÍSTICAS DA ÁREA

2.1 — Distribuição de função de Bessel

Como se afirmou noutro local (Grossmann e Muralha, 1987), há razões para acreditar que as áreas das diaclases duma família de diaclases seguem uma distribuição de função de Bessel.

---

* Versão portuguesa do trabalho apresentada ao 7.º Congresso da Sociedade Internacional de Mecânica das Rochas, Aachen, Setembro de 1991.

** Engenheiro de Minas, Investigador-Coordenador do LNEC.

Se esta hipótese é válida, a densidade de probabilidade $f(A)$ da área das diaclases A duma família de diaclases, é dada por

$$f(A) = \frac{2}{A} K_0\left(2\sqrt{\frac{A}{\bar{A}}}\right) \tag{1}$$

em que $\bar{A}$ é a área média das diaclases, e $K_0\left(2\sqrt{\frac{A}{\bar{A}}}\right)$ designa a função de Bessel modificada de 2.ª espécie e ordem 0, com o argumento $2\sqrt{\frac{A}{\bar{A}}}$. A Fig. 1 mostra que, neste caso, o gráfico da densidade de probabilidade tem uma assimptota vertical na origem, e decresce monotonamente, tendendo para zero no infinito.

A função de distribuição correspondente $F(A)$ é dada por

$$F(A) = 1 - 2\sqrt{\frac{A}{\bar{A}}}\ K_1\left(2\sqrt{\frac{A}{\bar{A}}}\right) \tag{2}$$

em que $K_1\left(2\sqrt{\frac{A}{\bar{A}}}\right)$ designa a função de Bessel modificada de 2.ª espécie e ordem 1, com o argumento $2\sqrt{\frac{A}{\bar{A}}}$. A Tabela 1 apresenta algumas das soluções habitualmente usadas da expressão (2).

O desvio padrão σ das áreas das diaclases com uma distribuição de função de Bessel é dado por

$$\sigma = \sqrt{3}\ \bar{A} \tag{3}$$

2.2 — Distribuição lognormal

No entanto, foi relatado (Piteau, 1973) que existem casos em que as dimensões das diaclases duma família de diaclases, medidas segundo a direcção das linhas de nível, e segundo a direcção das linhas de maior pendor, seguem distribuições lognormais. Num caso desses, as áreas das diaclases da família de diaclases também seguirão uma distribuição lognormal.

A densidade de probabilidade correspondente $f(A)$ da área das diaclases A da família de diaclases, é dada por

$$f(A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_A A} e^{-\frac{1}{2\sigma_A^2}\left(\ln\frac{A}{\xi_A}\right)^2} \tag{4}$$

em que ξ_A é a área mediana das diaclases, e σA o desvio padrão da distribuição lognormal. A Fig. 1 apresenta o gráfico da densidade de probabilidade para 7 distribuições lognormais diferentes, que têm todas a mesma área média.

A função de distribuição $F(A)$, no caso duma distribuição lognormal, é dada por

$$F(A) = P\left(\frac{1}{\sigma_A}\ln\frac{A}{\xi_A}\right) \tag{5}$$

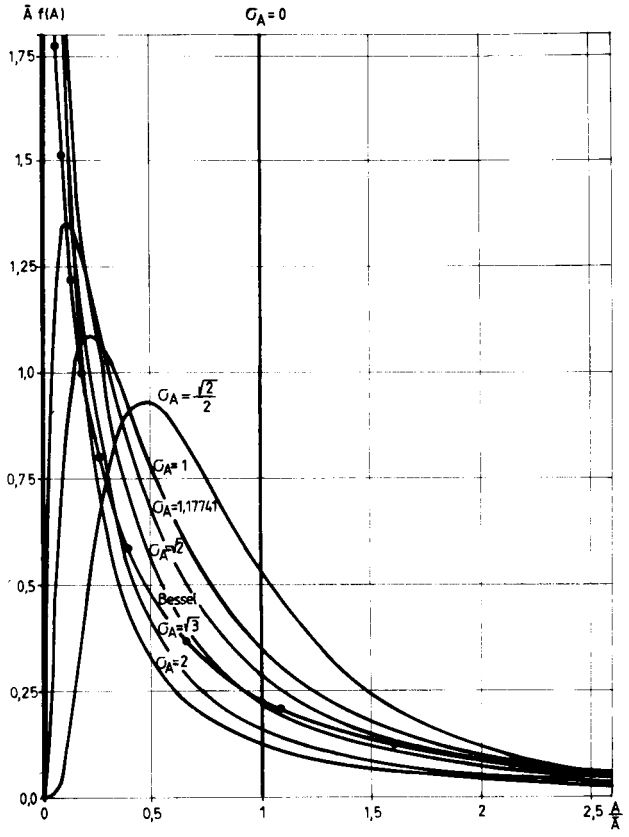

Fig. 1 — Densidade de probabilidade $f(A)$ da área das diaclases A duma família de diaclases, para a distribuição de função de Bessel, e para 7 distribuições lognormais diferentes, todas com a mesma área média $\overline{A}$ (σ_A – desvio padrão da distribuição lognormal)

TABELA 1

Valores da função de distribuição $F(A)$ da área das diaclases A duma família de diaclases, para a função de distribuição de Bessel com a área média $\overline{A}$

$F(A)$	$\frac{A}{\overline{A}}$
0,001	0,000143
0,0025	0,00037
0,005	0,00076
0,01	0,00162
0,025	0,0048
0,05	0,0116
0,1	0,029
0,25	0,111
0,5	0,39

$F(A)$	$\frac{A}{\overline{A}}$
0,5	0,39
0,75	1,14
0,90	2,6
0,95	4,0
0,975	5,7
0,99	8,3
0,995	10,6
0,9975	13,2
0,999	16,9

em que $P\left(\frac{1}{\sigma_A} \ln \frac{A}{\xi_A}\right)$ designa a área definida pela distribuição normal (de Gauss) padrão, à esquerda do valor $\frac{1}{\sigma_A} \ln \frac{A}{\xi_A}$ da variável padrão.

A área média das diaclases $\bar{A}$ é, neste caso, dada por

$$\bar{A} = \xi_A e^{\frac{\sigma_A^2}{2}} \tag{6}$$

e o desvio padrão σ das áreas das diaclases (que não deve ser confundido com o desvio padrão σ_A da distribuição lognormal) por

$$\sigma = \xi_A e^{\frac{\sigma_A^2}{2}} \sqrt{e^{\sigma_A^2} - 1} \tag{7}$$

2.3 — Observações gerais

A análise da Fig. 1 mostra que, excepto para o caso limite da distribuição de áreas constante (i. e., a distribuição lognormal com um desvio padrão de 0), de que nunca foi relatada a existência na prática, todas as distribuições de áreas de diaclases, consideradas apresentam uma forte assimetria positiva. Isto significa que a maioria das diaclases de qualquer família de diaclases, tem uma área que é menor que a área média das diaclases daquela família, e que, por isso, um observador inexperiente tenderá a subestimar a área média das diaclases.

A distribuição lognormal com o mesmo desvio padrão σ das áreas das diaclases com a distribuição de função de Bessel é aquela cujo desvio padrão σ_A é dado por

$$\sigma_A = \sqrt{\ln 4} \cong 1{,}17741 \tag{8}$$

Esta distribuição lognormal apresenta valores da densidade de probabilidade mais elevados que a distribuição de função de Bessel, no domínio

$$\approx 0{,}119\,\bar{A} < A < \approx 2{,}0\,\bar{A} \tag{9}$$

sendo a relação máxima entre aquelas 2 densidades de probabilidade de cerca de 1,43, para

$$A \approx 0{,}42\,\bar{A} \tag{10}$$

3 — CONTRIBUIÇÃO DAS DIFERENTES ÁREAS DAS DIACLASES PARA A FRACTURAÇÃO TOTAL

Para uma dada família de diaclases, a contribuição das diaclases com uma dada área A, para a fracturação total induzida por aquela família de diaclases no maciço rochoso, é dada por

$$\frac{A f(A)}{\int_0^\infty A f(A)\, dA} = \frac{A}{\bar{A}} f(A) \tag{11}$$

e, portanto, para a distribuição de função de Bessel, por

$$\frac{A}{\overline{A}} f(A) = \frac{2A}{\overline{A}} K_0\left(2\sqrt{\frac{A}{\overline{A}}}\right) \tag{12}$$

e, para a distribuição lognormal, por

$$\frac{A}{\overline{A}} f(A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\ \xi_A \sigma_A e^{\frac{\sigma_A^2}{2}}} e^{-\frac{1}{2\sigma_A^2}\left(\ln \frac{A}{\xi_A}\right)^2} \tag{13}$$

A contribuição das diaclases com uma área que é menor que ou igual a uma dada área A, para a fracturação total induzida pela família de diaclases considerada no maciço rochoso, é, pois, para a distribuição de função de Bessel, dada por

$$\frac{\int_0^A A f(A)\, dA}{\overline{A}} = 1 - 2\frac{A}{\overline{A}}\left[K_2\left(2\sqrt{\frac{A}{\overline{A}}}\right) + \sqrt{\frac{A}{\overline{A}}} K_1\left(2\sqrt{\frac{A}{\overline{A}}}\right)\right] \tag{14}$$

em que $K_2\left(2\sqrt{\frac{A}{\overline{A}}}\right)$ designa a função de Bessel modificada de 2.ª espécie e ordem 2, com o argumento $2\sqrt{\frac{A}{\overline{A}}}$, e, para a distribuição lognormal, por

$$\frac{\int_0^A A f(A)\, dA}{\overline{A}} = P\left(\frac{1}{\sigma_A} \ln \frac{A}{\xi_A e^{\sigma_A^2}}\right) \tag{15}$$

A Fig. 2, na qual as abcissas são apresentadas com uma escala logarítmica, e as ordenadas com uma escala de probabilidades normal (de Gauss), permite a solução gráfica da expressão (14) (distribuição de função de Bessel) e de 7 casos particulares da expressão (15) (distribuição lognormal), que têm todos a mesma área média $\overline{A}$.

A análise desta figura mostra que, excepto para o caso limite da distribuição de áreas constante, a contribuição das diaclases com uma área A, que é menor que ou igual a cerca de 0,5 $\overline{A}$, para a fracturação total induzida pela família de diaclases considerada no maciço rochoso, é sempre só de cerca de 10%, embora aquelas diaclases correspondam a cerca de 50% (entre 26% e 74%, dependendo da distribuição escolhida) do número total de diaclases da família de diaclases considerada. Por outro lado, a Fig. 2 também indica que as diaclases com uma área A maior que cerca de $9\overline{A}$ (entre $3\overline{A}$ e $100\overline{A}$, dependendo da distribuição) também contribuem com 10% para a fracturação total induzida pela família de diaclases, embora estas diaclases grandes só correspondam a cerca de 0,74% (entre 0,052% e 2,3%) do número total

de diaclases da família de diaclases. Esta última conclusão realça mais uma vez o perigo de extrapolar resultados sobre a área das diaclases duma família de diaclases, a partir duma amostra com só algumas diaclases, quando o observador não tem experiência acerca das distribuições estatísticas dos parâmetros das diaclases.

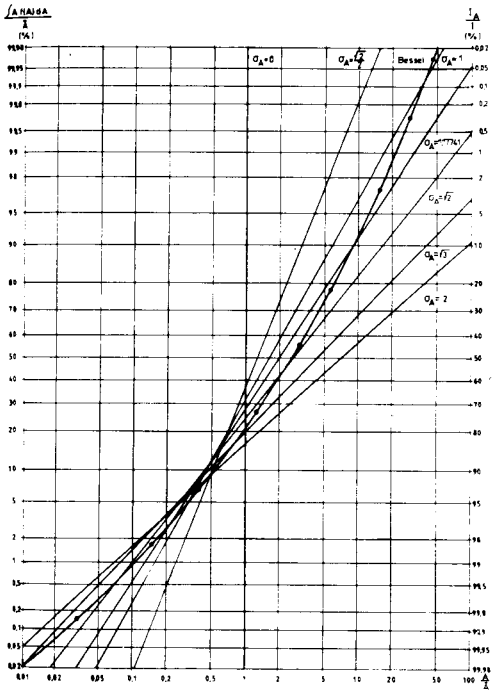

Fig. 2 — Contribuição das diaclases com uma área ≤ A para a fracturação total $\frac{\int_0^A A f(A)\, dA}{\bar{A}}$, e intensidade restante $\frac{I_A}{I}$, para a distribuição de função de Bessel, e para 7 distribuições lognormais diferentes, todas com a mesma área média $\bar{A}$ (σ_A — desvio padrão da distribuição lognormal)

4 — RELAÇÃO ENTRE A ÁREA E A INTENSIDADE OU ESPAÇAMENTO

4.1 — Intensidade

A expressão geral que relaciona a intensidade I duma família de diaclases com a sua área média $\bar{A}$

$$I = n\bar{A} \tag{16}$$

em que n é o número de centros de diaclase daquela família de diaclases, por unidade de volume, já foi deduzida noutro local (Grossmann, 1988).

Usando um raciocínio semelhante, a expressão para a intensidade I_A duma família de diaclases, só devida às suas diaclases com uma área igual a ou maior que A, é dada por

$$I_A = n \int_A^{\infty} A\, f\,(A)\, dA \tag{17}$$

em que $f(A)$ designa novamente a densidade de probabilidade da distribuição de áreas da família de diaclases, e, portanto, para uma família de diaclases que apresenta uma distribuição de áreas de função de Bessel, por

$$I_A = 2\frac{A}{\overline{A}}\left[K_2\left(2\sqrt{\frac{A}{\overline{A}}}\right)+\sqrt{\frac{A}{\overline{A}}}\,K_1\left(2\sqrt{\frac{A}{\overline{A}}}\right)\right] I \tag{18}$$

e, para uma família de diaclases que apresenta uma distribuição de áreas lognormal, por

$$I_A = Q\left(\frac{1}{\sigma_A}\ln\frac{A}{\xi_A e^{\sigma_A^2}}\right) I \tag{19}$$

em que $Q\left(\frac{1}{\sigma_A}\ln\frac{A}{\xi_A e^{\sigma_A^2}}\right)$ designa a área definida pela distribuição normal (de Gauss) padrão, à direita do valor $\frac{1}{\sigma_A}\ln\frac{A}{\xi_A e^{\sigma_A^2}}$ da variável padrão.

Devido à semelhança entre as expressões (14) e (18), e (15) e (19), a Fig. 2 também permite a solução gráfica da expressão (18) e de 7 casos particulares da expressão (19).

Os comentários feitos atrás, acerca da contribuição das diaclases com uma certa área, para a fracturação total, podem, portanto, também ser expressos como se segue: excepto para o caso limite da distribuição de áreas constante, a intensidade I_A duma família de diaclases, só devida às suas diaclases com uma área A, que é igual a ou maior que cerca de 0,5 $\overline{A}$, é sempre cerca de 90% da intensidade I da família de diaclases, e, se só devida às suas diaclases com uma área igual a ou maior que cerca de $9\overline{A}$ (entre $3\overline{A}$ e $100\overline{A}$, dependendo da distribuição escolhida), cerca de 10% da intensidade I.

4.2 — Espaçamento

O espaçamento duma família de diaclases é o volume do maciço rochoso, no qual a soma das áreas das diaclases da família de diaclases considerada, que nela ocorrem, corresponde a

uma área unitária (Grossman, 1967). A relação entre o espaçamento s e a intensidade I duma família de diaclases é, portanto, dada por

$$s = \frac{1}{I} \tag{20}$$

O espaçamento s_A das diaclases com uma área igual a ou maior que A, duma dada família de diaclases com o espaçamento s, é, pois, para a distribuição de áreas de função de Bessel, dado por

$$s_A = \frac{s}{2\frac{A}{\bar{A}}\left[K_2\left(2\sqrt{\frac{A}{\bar{A}}}\right) + \sqrt{\frac{A}{\bar{A}}}K_1\left(2\sqrt{\frac{A}{\bar{A}}}\right)\right]} \tag{21}$$

e, para a distribuição de áreas lognormal, por

$$s_A = \frac{s}{Q\left(\frac{1}{\sigma_A}\ln\frac{A}{\xi_A e^{\sigma_A^2}}\right)} \tag{22}$$

A Fig. 3, na qual tanto as abcissas como as ordenadas são apresentadas com uma escala logarítmica, permite a solução gráfica da expressão (21) (distribuição de função de Bessel) e de 7 casos particulares da expressão (22) (distribuição lognormal), todos com a mesma área média $\bar{A}$.

A análise desta figura mostra que, para uma família de diaclases com um espaçamento s, e excepto para o caso limite da distribuição de áreas constante, o desprezar das diaclases com uma área A, que é menor que a área média $\bar{A}$, irá conduzir a um espaçamento s_A das diaclases restantes de cerca de 1,27 s (entre 1,19 s e 1,57 s, dependendo da distribuição escolhida), i. e., que o desprezar tem só um efeito reduzido no espaçamento. Por outro lado, a Fig. 3 também indica que o espaçamento s_A das diaclases com uma área maior que cerca de $9\bar{A}$ (entre $3\bar{A}$ e $100\bar{A}$, dependendo da distribuição) é de cerca de 10 s.

4.3 — Área média duma distribuição de áreas truncada

A área média $\bar{A}_A$ das diaclases com uma área igual a ou maior que A, duma família de diaclases com a área média $\bar{A}$, é dada por

$$\bar{A}_A = \frac{\int_A^\infty A f(A)\, dA}{\int_A^\infty f(A)\, dA} \tag{23}$$

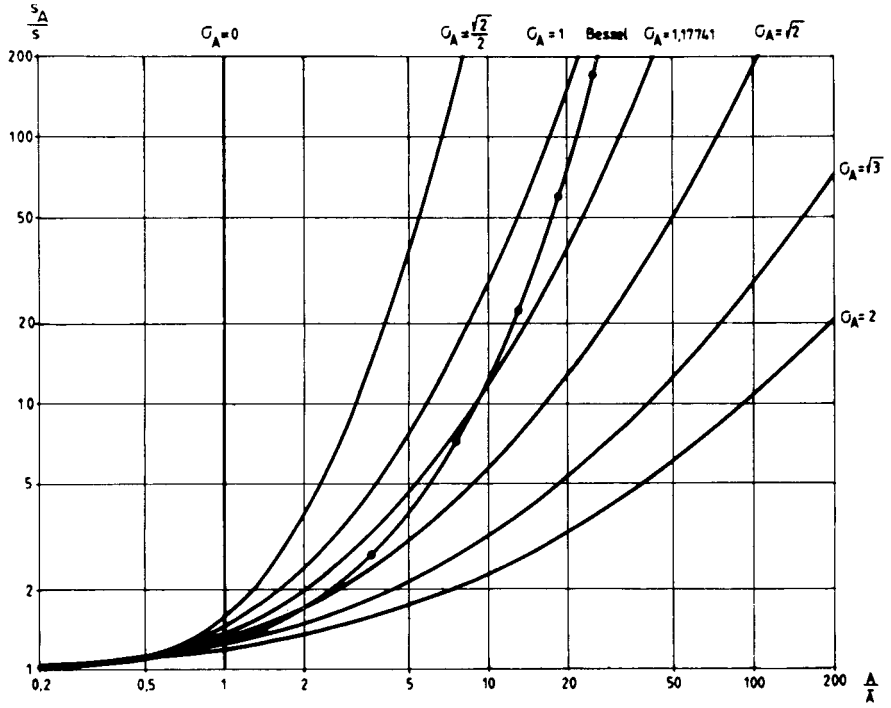

Fig. 3 — Espaçamento s das diaclases com uma área $\geq A$, duma família de diaclases com o espaçamento s, para a distribuição de função de Bessel, e para 7 distribuições lognormais diferentes, todas com a mesma área média $\bar{A}$ (σ_A – desvio padrão da distribuição lognormal)

em que $f(A)$ designa novamente a densidade de probabilidade da distribuição de áreas da família de diaclases, e, portanto, para uma família de diaclases que apresenta uma distribuição de áreas de função de Bessel por

$$\bar{A}_A = \sqrt{\frac{A}{\bar{A}}} \left[\frac{K_2\left(2\sqrt{\frac{A}{\bar{A}}}\right)}{K_1\left(2\sqrt{\frac{A}{\bar{A}}}\right)} + \sqrt{\frac{A}{\bar{A}}} \right] \bar{A} \tag{24}$$

e, para uma família de diaclases que apresenta uma distribuição de áreas lognormal, por

$$\bar{A}_A = \frac{Q\left(\frac{1}{\sigma_A} \ln \frac{A}{\xi_A e^{\sigma_A^2}}\right)}{Q\left(\frac{1}{\sigma_A} \ln \frac{A}{\xi_A}\right)} \xi_A \, e^{\frac{\sigma_A^2}{2}} \tag{25}$$

Assim, o desprezar das diaclases com uma área A, que é menor que a área média $\overline{A}$ da família de diaclases considerada, irá conduzir a uma área média $\overline{A}_A$ das diaclases restantes, de cerca de 2,8 $\overline{A}$, para a distribuição de função de Bessel, e de cerca dum valor entre 1,76 $\overline{A}$ e 5,3 $\overline{A}$, para a distribuição lognormal, dependendo do seu desvio padrão (entre $\frac{\sqrt{2}}{2}$ e 2).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

GROSSMANN, N. F. — *Contribuição para a discussão do Tema 2.* In Relatos do 1.º Congresso da SIMR (Lisboa, Portugal 1966, Setembro 25-Outubro 01), vol. 3, pp. 232-234. Lisboa: Laboratório Nacional de Engenharia Civil 1967.

GROSSMANN, N. F. — *The bivariate normal distribution on the tangent plane at the mean attitude, uma conferência introdutória.* In O. Stephansson (ed.), Fundamentals of Rock Joints (Relatos do Simpósio Internacional, Bjoerkliden Suécia, 1985, Setembro 15-20), pp. 3-11. Lulea: Centek Publishers 1985.

GROSSMANN, N. F. — *About the joint set intensity.* In M. Romana (ed.), Rock Mechanics and Power Plants (Relatos do simpósio da SIMR, Madrid, Espanha 1988, Setembro 12-16), vol. 1, pp. 41-47. Roterdão: Balkema 1988.

GROSSMANN, N. F.; MURALHA, J. J. R. D. — *About the mean área of a joint set.* In G. Herget & S. Vongpaisal (ed.), Relatos do 6.º Congresso Internacional de Mecânica das Rochas (Montreal PQ Canadá 1987, Agosto 30-Setembro 03), vol. 1, pp. 373-376. Roterdão: Balkema 1987.

PITEAU, D. R. — *Characterizing and extrapolating rock joint properties in the engineering practice.* In Rock Mechanics. Suppl. 2: 5-31, 1973.