

UMA ANÁLISE PROBABILÍSTICA DA ESTABILIDADE DE TALUDES ROCHOSOS*

A Probabilistic Approach to the Stability of Rock Slopes

por

JOSÉ MURALHA**

RESUMO — Este trabalho apresenta uma abordagem probabilística da segurança de taludes rochosos, baseada nos dados que estão habitualmente disponíveis neste tipo de problemas (características geométricas e mecânicas do sistema de compartimentação). Apresenta-se a base do método proposto, seguido de três exemplos de aplicação e algumas considerações finais.

SYNOPSIS — This work presents a probabilistic approach to rock slopes safety analysis based on the data that is usually available for these problems (joint geometric and mechanical characteristics). The basis of the proposed method is presented, followed by three application examples and some final remarks.

1 — INTRODUÇÃO

Em problemas de Engenharia nos quais estão envolvidos taludes rochosos, o projectista está sempre à procura do melhor compromisso entre os aspectos económicos e os aspectos da segurança da questão. Se, por um lado, quanto mais inclinado for o talude menores serão o volume escavado e os custos inerentes, pelo outro lado, taludes muito inclinados podem pôr em risco vidas e haveres.

O projecto de taludes para minas a céu aberto é um dos campos onde os riscos de rotura estão presentes e são, desde há muito, tomados em consideração nas análises económicas efectuadas.

As ferramentas e técnicas habitualmente usadas no dimensionamento de taludes em maciços rochosos, quer sejam analíticas ou gráficas e a duas ou três dimensões, geralmente, não levam em linha de conta a variabilidade e a dispersão dos parâmetros que estão envolvidos.

A orientação, área, intensidade (número de descontinuidades por metro ou inverso do espaçamento) e resistência ao deslizamento das famílias de diaclases que ocorrem num dado maciço e que podem eventualmente gerar um bloco que se destaque são alguns dos parâmetros que, habitualmente, revelam dispersões importantes e descentradas em relação à média.

Mesmo a localização da família ou famílias de descontinuidades desempenha um papel relevante na avaliação da segurança. Usualmente, as posições dos blocos, que cinematicamente podem ser instáveis, são escolhidas como aquelas que conduzam aos maiores volumes possí-

* Versão portuguesa da comunicação apresentada ao 7.º Congresso da Sociedade Internacional de Mecânica das Rochas, Aachen, Setembro de 1991.

** Engenheiro Civil, Assistente de Investigação do LNEC.

veis, de modo a assegurar que a segurança se encontra garantida. Contudo, a título de exemplo, a probabilidade de ocorrência de um bloco com o dobro do volume de um outro pode, por vezes, chegar a ser 100 vezes mais pequena.

Um outro problema a ter em conta reside no facto de, para cada talude, o maciço rochoso que se encontra por detrás dele ser um caso singular, e até para o mesmo talude podem encontrar-se condições diferentes ao longo do seu desenvolvimento longitudinal.

Qualquer análise, da segurança ou económica, deve ter presente a variabilidade dos parâmetros já mencionados, e, assim, levar em devida consideração as probabilidades de ocorrência de um certo número de cenários de rotura, considerados mais relevantes.

2 — ANÁLISE PROBABILÍSTICA

Em estudos e problemas de Mecânica das Rochas, as abordagens probabilísticas são raramente efectuadas. Em vez disso, a boa prática de engenharia conduz a todas as escolhas, desde o número e tipo de ensaios, em laboratório e/ou "in situ", que são necessários para o estudo geotécnico até aos modelos que vão ser usados, passando pela definição dos cenários de rotura que são relevantes para a obra em questão e a escolha das características resistentes dos materiais (rocha, descontinuidades ou maciço rochoso).

Uma das razões pelas quais os estudos probabilísticos são difíceis de encontrar reside no facto de as rochas e as descontinuidades serem materiais naturais, em oposição com o betão, aço e mesmo, em certos casos, os solos, que são materiais produzidos pelo Homem. Assim, as incertezas acerca das suas características e propriedades e as habituais altas dispersões dos resultados dos ensaios são uma das causas principais para o uso de valores médios e factores de segurança na maioria dos problemas de Mecânica das Rochas.

Mais ainda, os efeitos de escala, que, regra geral, não permitem a extrapolação dos resultados dos ensaios em laboratório para as condições "in situ" reais, tornam as abordagens probabilísticas ainda mais difíceis do que à primeira vista parecem.

O que foi dito não deve ser entendido como se as relações e os métodos empíricos fossem dispensáveis e sem uso significativo. O que parece ser importante é tentar saber quantificar os acréscimos de segurança que as reduções empíricas das características mecânicas (por exemplo, a anulação da coesão das juntas) ou o aumento das acções proporcionam.

Na área geomecânica, alguns estudos probabilísticos podem ser encontrados em diferentes campos, como, por exemplo, no projecto de barragens de aterro (Mineiro, 1990), em problemas de instabilidade em minas (Warburton, 1983, Esterhuizen, 1990), em estudos de estabilidade de blocos para as fundações de barragens (Londe, 1990), na análise da estabilidade de paredes de cavidades subterrâneas (Lamas, 1985) ou na estabilidade de cunhas rochosas (Kulatilake, Finley e Ghosh, 1985).

No que concerne aos taludes rochosos, os tipos de rotura que devem ser considerados são: i) deslizamento por uma superfície curva em maciços muito fracturados com uma distribuição aleatória da orientação das descontinuidades; ii) derrubamento "toppling" em maciços de rocha com boas características mecânicas e que apresentam diaclases quase verticais e paralelas à

direcção do talude; *iii*) deslizamento por uma única superfície de descontinuidade para estruturas altamente ordenadas, como ardósias e certos xistos, cuja direcção deve ser aproximadamente paralela ao talude (desvios até 20°); *iv*) rotura de cunhas rochosas formadas por duas juntas que se intersectam (Hoek e Bray, 1977, Goodman, 1976).

Neste trabalho, somente os dois últimos serão considerados porque são aqueles onde se encontra deslizamento ao longo de descontinuidades. Para estes dois tipos de rotura, uma análise probabilística deve levar em linha de conta diferentes parâmetros estatisticamente variáveis: a posição do plano (*iii*) ou cunha (*iv*), a orientação das famílias de descontinuidades, as suas áreas e intensidades e as respectivas resistências ao deslizamento, a que está associada a influência do efeito de escala.

É possível, para todos estes parâmetros, estabelecer modelos estatísticos e, através de um processo de simulação, tentar definir probabilidades de rotura.

O método utilizado começa pela definição da posição das superfícies de descontinuidades ou cunhas, continuada pela simulação da orientação da diaclase, a partir das atitudes médias e dispersões das famílias, seguida pela determinação da probabilidade de a área da diaclase ser suficientemente grande para formar um bloco capaz de deslizar e finalizada com a análise da estabilidade mecânica desse bloco. Informação mais detalhada de cada um destes passos será dada nos exemplos, que mostrarão algumas aplicações simples da análise probabilística.

Nos pontos seguintes, serão apresentados com maior detalhe os modelos estatísticos adoptados na simulação para descrever os já referidos parâmetros.

Como todas as simulações, também esta necessita de um gerador de números aleatórios. Geralmente, os computadores estão munidos de "software" próprio para executar esta tarefa, usando geradores congruenciais lineares que, em alguns casos, não estão isentos de correlação sequencial em casos sucessivos. Para evitar este problema foi usada uma sub-rotina para melhorar o gerador de números aleatórios fornecido pelo computador (Press *et al.*, 1986). É baseado num processo de mistura onde, em cada chamada, um número aleatório, fornecido pela rotina do sistema, é usado para escolher um elemento de um vector, previamente preenchido com números aleatórios fornecidos, também, pelo sistema. Os programas de simulação também necessitam de números aleatórios que sigam distribuições normais (Gauss). Para o efeito, foi empregue o método de Box-Muller, que fornece números aleatórios seguindo uma distribuição normal $N(0,1)$, usando uma rotina descrita, também, por Press *et al.* (1986).

2.1 — Orientação das famílias de diaclases

Geralmente, a orientação de uma descontinuidade é dada por dois parâmetros: a direcção e a inclinação. Em estudos de taludes, de modo a evitar confusões, a direcção das linhas de maior declive, em vez da direcção das linhas de nível, é, também, frequentemente utilizada.

Uma família de diaclases é um grupo de descontinuidades que apresentam, aproximadamente, a mesma direcção. A dispersão em torno da atitude média é, desde há muito, descrita por modelos estatísticos.

Os modelos mais comuns podem ser divididos em dois conjuntos principais — isotrópicos e anisotrópicos — conquanto sejam ou não independentes da direcção considerada.

No primeiro conjunto, consideram-se as distribuições de Arnold (Mahtab *et al.*, 1972), Fisher (Mahtab *et al.*, 1972, Agterberg, 1974, Kulatilake, 1985), isotrópica de Bingham (Agterberg, 1974, Kohlbeck e Scheidegger, 1976) e bivariada normal isotrópica (LNEC, 1973). A principal desvantagem destas distribuições reside no facto de a larga maioria das famílias de diaclases ocorrentes em maciços rochosos apresentar parâmetros estatísticos diferentes para cada direcção considerada.

No segundo conjunto, a distribuição bivariada normal usando as coordenadas geológicas (Maranhão, 1973, Kulatilake, 1986) revela uma adaptação bastante insatisfatória quando as famílias são aproximadamente horizontais e a distribuição anisotrópica de Bingham (Shanley e Mahtab, 1975) assume que uma descontinuidade perpendicular à atitude média da família ainda tem uma probabilidade de ocorrência não nula.

Assim, a distribuição que é utilizada para modelar a orientação das famílias de diaclases é a bivariada normal no plano tangente à atitude média (Grossmann, 1977 e 1985). Para definir completamente esta distribuição são necessários 5 parâmetros: a orientação (direcção e inclinação), as dispersões (máxima e mínima) e a direcção da dispersão máxima, visto que as direcções das dispersões máxima e mínima são perpendiculares.

De uma colecção de dados geológicos, a definição das diferentes famílias de diaclases pode ser efectuada tanto para amostragens uniformes como para amostragens não-uniformes (Grossmann, 1983). A determinação da atitude média e dos parâmetros de dispersão pode ser feita usando a formulação deduzida por Grossmann (1985).

Para simular elementos de uma família de diaclases com uma distribuição bivariada normal no plano tangente à orientação média, conhecidos a direcção (σ) e inclinação (δ) médias, as dispersões máxima e mínima (σ_m , σ_n) e o ângulo entre a dispersão máxima e a direcção das linhas de maior declive (ω_m), é necessário gerar dois números aleatórios de distribuição normal $N(0,1)$, x e y , e transformá-los num ângulo ϵ na esfera auxiliar e noutro ângulo em relação à direcção da máxima dispersão ω e dados por

$$\begin{aligned}\epsilon &= \arctg \sqrt{x^2 + y^2} \\ \omega &= \arctg \frac{y}{x}\end{aligned}\quad (1)$$

A direcção e inclinação (σ_p , δ_p) da descontinuidade que pertence à família é, então, determinada, resolvendo um triângulo esférico, usando as leis dos cosenos e dos senos

$$\cos \delta_p = \cos \epsilon \cdot \cos \delta + \sin \epsilon \cdot \sin \delta \cdot \cos (\omega_m + \omega)$$

$$\frac{\sin \delta_p}{\sin (\omega_m + \omega)} = \frac{\sin \epsilon}{\sin (\sigma - \sigma_p)} \quad (2)$$

permitindo, assim, gerar uma família de diaclases com os parâmetros requeridos.

2.2 — Área e intensidade de famílias de diaclases

É materialmente impossível medir directamente as áreas das discontinuidades de uma família. Quando se estuda uma dada família de diaclases, os únicos dados que, para este efeito, se possuem são os comprimentos das intersecções numa superfície plana de uma galeria, de uma trincheira ou de um poço.

As fórmulas necessárias para determinar a área média (Grossmann, 1987, Grossmann e Muralha, 1987) não são independentes das distribuições estatísticas que se assumem.

A habitual descentragem para a esquerda dos histogramas de frequências das áreas levou à utilização das distribuições de Bessel e log-normais. As últimas parecem ter fortes razões físicas a apoiá-las: a existência de uma discontinuidade é um fenómeno de ocorrência muito pouco comum, e, assim, deve cair na área das distribuições exponenciais (Priest e Hudson 1976) e, como a maioria das diaclases parece terminar umas nas outras (Kikuchi *et al.*, 1985), isto leva a pensar que uma distribuição de Bessel para as áreas deriva do produto de duas distribuições exponenciais. Esta conclusão já foi experimentalmente verificada (Hudson e Priest, 1979).

A função de densidade de probabilidades das áreas $f(A)$, assumindo uma distribuição de Bessel com uma área média $\bar{A}$ é dada por (Grossmann e Muralha, 1987)

$$f(A) = \frac{2}{\bar{A}} K_0 \left(2 \sqrt{\frac{A}{\bar{A}}} \right) \quad (3)$$

onde K_0 representa a função de Bessel modificada de 2.^a espécie e ordem zero.

A intensidade de uma família de discontinuidades não costuma ser considerada como mais do que o inverso do respectivo espaçamento (que possui um significado físico muito simples e atractivo), retirando, portanto, parte da grande importância que este parâmetro possui.

Uma definição mais geral e melhor de intensidade de uma família de diaclases é a área de discontinuidades dessa família que pode ser encontrada num volume unitário. Logo, quando se fala de intensidade, a unidade que deve ser utilizada é o m^2/m^3 .

Como a definição indica, este parâmetro está intimamente ligado à área. A experiência mostra que famílias de diaclases com áreas grandes têm, também, grandes intensidades (ou baixos espaçamentos) e que famílias com intensidades pequenas (ou muito espaçadas) têm, pelo seu lado, áreas pequenas.

Como a intensidade, bem como o espaçamento, está associada a um fenómeno de Poisson, a probabilidade de encontrar uma ou mais discontinuidades de uma dada família ao longo de um dado comprimento d de uma dada direcção pode ser dada por

$$P(\geq 1) = 1 - e^{-I \cdot d \cdot \cos \alpha} \quad (4)$$

onde I é a intensidade média da família e α o ângulo entre a direcção e a normal à orientação média da família.

A maior parte das vezes, e também neste caso, não é a ocorrência de qualquer discontinuidade que importa, mas sim somente a das discontinuidades com áreas superiores a um dado valor imposto pelas condições geométricas do problema.

A determinação da probabilidade de encontrar uma diaclase desse tipo, $P(A \geq A_c)$, pode ser feita usando a equação (4), mas onde a intensidade da família é substituída pela intensidade das descontinuidades com áreas maiores que A_c (I_c) dada por

$$I_c = 2 I \frac{A_c}{A} \left[K_2 \left(2 \sqrt{\frac{A_c}{A}} \right) + \sqrt{\frac{A}{A_c}} K_1 \left(2 \sqrt{\frac{A_c}{A}} \right) \right] \quad (5)$$

Estas são as fórmulas utilizadas para determinar as probabilidades apresentadas nos exemplos de aplicação. Os dados necessários são a área média e a intensidade média de cada família de diaclases, que podem ser obtidos de um estudo geológico consistindo de uma campanha de medições no local e posterior estudo do sistema de compartimentação.

2.3 — Resistência de famílias de diaclases e efeito de escala

No que concerne o deslizamento de taludes em maciços rochosos, onde as tensões são sempre muito baixas ou quase nulas, os mecanismos de rotura são governados pela resistência das descontinuidades e, nesse caso, a deformabilidade e a resistência da rocha não desempenham nenhum papel significativo.

Tendo por base os resultados de ensaios, o critério linear de Coulomb adapta-se, para muitos propósitos, de uma forma bastante simples e muito satisfatória, à representação da resistência ao deslizamento de diaclases e das respectivas famílias. Contudo, para tensões normais baixas, Patton (1966) demonstrou a maior importância do mecanismo de deslizamento que consiste no cavalgamento das asperezas, em oposição à rotura por corte da rugosidade.

De forma a ser consistente com este pressuposto, o modelo utilizado para representar o comportamento mecânico das juntas relaciona linearmente a resistência ao deslizamento, τ_{Rd} , e a tensão normal, σ_n , somente através de um ângulo de atrito, ϕ , ou de um coeficiente de atrito, $\tan \phi$, e, portanto, sem coesão aparente (intersecção com o eixo das ordenadas do diagrama $\tau - \sigma_n$).

$$\tau_{Rd} = \sigma_n \cdot \tan \phi \quad (6)$$

Os valores dos ângulos e coeficientes de atrito podem ser determinados experimentalmente por meio de ensaios a tensão normal quase nula, inclinação progressiva ("tilt") e sem força normal aplicada ("pull") (Barton e Choubey, 1977), ou por ensaios de deslizamento, sob uma única, e tão baixa quanto possível, tensão normal.

No que se refere à distribuição estatística da resistência tangencial, o modelo que foi usado neste trabalho toma, para adaptar os dados experimentais, distribuições normais com as médias variando linearmente com a tensão normal e os desvios padrão revelando, também, uma relação linear com σ_n (Muralha e Cunha, 1990a).

$$s_\tau = a + b \cdot \sigma_n \quad (7)$$

Como a tensão tangencial aumenta mais rapidamente que o desvio padrão, os coeficientes de variação (quociente entre o desvio padrão e a média) apresentam, geralmente, uma tendência para decrescer à medida que a tensão normal aumenta. Por outro lado, para tensões normais baixas, os seus valores podem ir até 40%. Assim, quando se pretendeu gerar, no processo de simulação, a resistência tangencial das diaclases, foram tomadas as devidas precauções de modo a não permitir que resistências negativas aparecessem.

Outro aspecto importante, que também foi levado em consideração, relaciona-se com o efeito de escala, que é particularmente importante no deslizamento. Este problema é desde há muito estudado e existe um grande interesse ao seu redor, o que leva, sempre que grandes projectos ou obras estejam envolvidos, à realização de ensaios em laboratório bem como "in situ".

A importância do decréscimo da resistência ao deslizamento com o aumento da área foi, pela primeira vez, estabelecida por Barton e Choubey (1977) e, posteriormente, desenvolvida por Bandis, Lumsden e Barton (1981). O critério de rotura de juntas, baseado nos parâmetros JRC e JCS, que são dependentes da área, é usado com bastante frequência; apesar disso, também outros autores tentaram estabelecer outras relações entre a resistência e a área (Muralha e Cunha, 1990b).

Um ponto geralmente aceite é que a influência da direcção transversal no efeito de escala é, em termos médios, passível de ser desprezada (Bandis, 1980, Muralha e Cunha, 1990a). Por isso, o parâmetro que será considerado, em termos de efeito de escala, é o comprimento das discontinuidades segundo a direcção do deslizamento.

Nos exemplos de aplicação foram usados dois modelos distintos. Nos dois primeiros exemplos, o coeficiente de atrito decresce linearmente com o logaritmo do comprimento da diaclase (L , em cm)

$$\operatorname{tg} \phi = a + b \cdot \ln L \quad (8)$$

Os valores de a e b são determinados a partir de ensaios laboratoriais e "in situ", sobre amostras de comprimentos à volta de 15 e 70 cm, respectivamente.

No exemplo que envolve o escorregamento de uma cunha, a relação entre a resistência e o comprimento, também expresso em cm, é assintótica a um valor limite definido como a média aritmética menos o desvio padrão, para uma das famílias de discontinuidades, ou como a média menos 1,645 vezes esse valor (95° percentil), para a outra família.

A equação, onde os parâmetros são, também, encontrados a partir dos resultados de ensaios "in situ" e em laboratório, é da seguinte forma

$$\operatorname{tg} \phi = a + b \cdot e^{-c \cdot L} \quad (9)$$

A vantagem desta última equação reside no facto de a utilização da expressão (8) poder conduzir, mesmo que só no caso de diaclases de grande dimensão, a valores de resistência bastante baixos, que são pouco prováveis de ocorrer.

A simulação da resistência ao deslizamento das descontinuidades é conseguida começando pela determinação da tensão normal e do comprimento da diaclase, depois usando as equações (8) ou (9) é determinado o coeficiente de atrito e utilizando, em seguida, a expressão (7) calcula-se a resistência tangencial média. Por fim, depois da geração de um número aleatório proveniente de uma distribuição normal $N(0,1)$, a verdadeira resistência é calculada, tomando em atenção que o desvio padrão é o produto da média pelo coeficiente de variação.

3 — EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

Os exemplos de aplicação, que vão ser apresentados, baseiam-se na simulação de um elevado número de situações de um determinado cenário de rotura previamente definido.

Os dados requeridos a este tipo de análise não são diferentes dos que, em termos mínimos, são necessários à execução de qualquer cálculo determinístico:

- um estudo geológico com o levantamento das descontinuidades permite a determinação das principais famílias de diaclases e dos respectivos parâmetros geométricos (atitude média e sua dispersão, orientação da dispersão, área e intensidade);
- um conjunto de ensaios de deslizamento em laboratório e/ou "in situ" para caracterizar as propriedades mecânicas das famílias de juntas necessárias aos cálculos de estabilidade.

É óbvio que, por razões económicas, o planeamento dos ensaios deve ser feito somente após uma análise preliminar, mas cuidada, da compartimentação, de modo a permitir definir quais os cenários de rotura mais importantes e, por isso, escolher as descontinuidades a ensaiar.

O processo de simulação foi programado num dos computadores centrais do LNEC (VAX 8700), para permitir a execução do maior número de iterações possíveis dentro de um espaço de tempo razoável. Os pontos seguintes apresentarão um esquema do processo:

- 1) Geração da posição do bloco que pode deslizar. Isto é conseguido, para o caso de deslizamentos planos, definindo a posição da intersecção da face do talude com a descontinuidade e, para o caso da cunha, definindo o ponto onde a recta de intersecção das duas diaclases encontra a face do talude.
- 2) Geração da orientação da diaclase ou diaclases, usando o processo explicado no ponto 2.1, que se baseia nos seguintes parâmetros: atitude média (directão, ou directão da inclinação, e inclinação), desvios padrão máximo e mínimo e sua posição, relativamente à directão das linhas de maior declive.
- 3) Determinação das características geométricas, como, por exemplo, as áreas e os comprimentos de intersecção das descontinuidades e o volume do bloco, bem como o cálculo das tensões actuates (σ_n , τ_{sd}).
- 4) Cálculo da probabilidade desse bloco ocorrer usando as expressões (4) e (5), lembrando que, quando são necessárias duas diaclases para formar um bloco, é requerida a probabilidade conjunta.

- 5) Definição da resistência ao deslizamento mobilizada pela junta ou juntas (τ_{Rd}), baseada no coeficiente de atrito devidamente convertido de modo a tomar em consideração o efeito de escala e na dispersão da resistência das descontinuidades (ponto 2.3).
- 6) Avaliação do factor de segurança, SF , definido como a relação entre a tensão tangencial resistente e a tensão tangencial actuante ou entre as forças mobilizadas por atrito ao longo das descontinuidades e as forças de deslizamento.

$$SF = \frac{F_{Rd}}{F_{Sd}} \quad \text{ou} \quad SF = \frac{\tau_{Rd}}{\tau_{Sd}} \quad (10)$$

3.1 — Deslizamento plano. Exemplo 1

Este primeiro exemplo refere-se a um cenário de rotura por um deslizamento plano, onde uma família de descontinuidades, com uma inclinação de 34° possui uma direcção paralela à direcção de um talude com uma inclinação de 1:5 (aproximadamente 79°) e com 20 m de altura (H). Estas características geométricas podem ser vistas na Fig. 1, onde se apresenta um esquema de um bloco de um escorregamento plano.

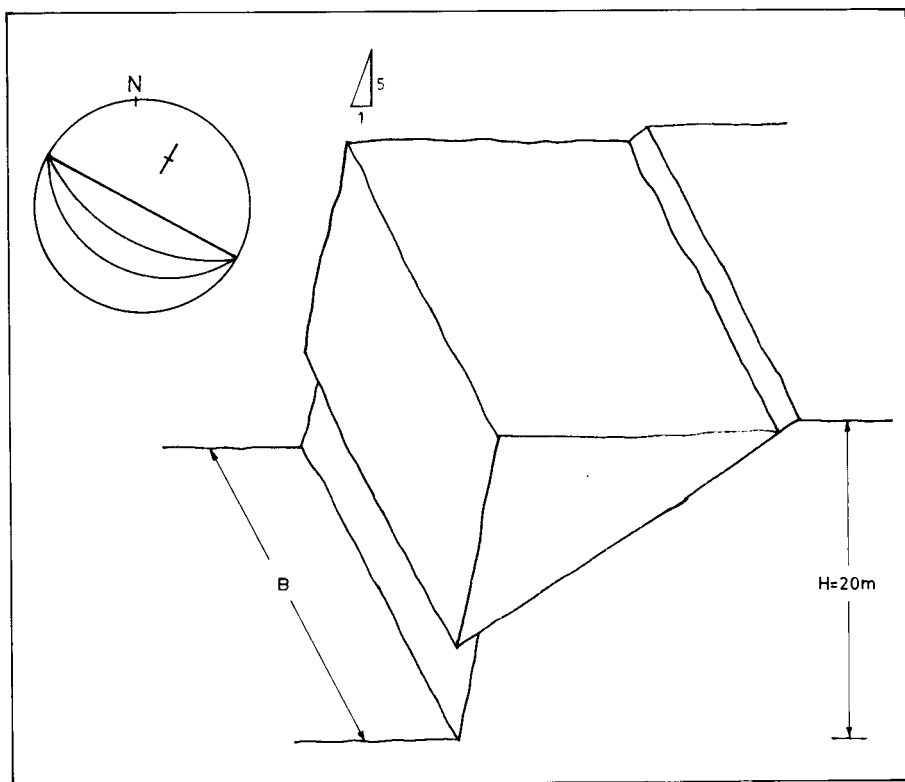


Fig. 1 — Esquema da geometria de um deslizamento plano

Os restantes parâmetros da família são: área média 2,2 m², intensidade 1,3 m²/m³, que corresponde a um espaçamento de 0,77 m e um desvio padrão de 15° paralelamente à direcção das linhas de nível do talude e, por razões de simplicidade, nenhuma dispersão segundo a direcção longitudinal do talude (equivalente à direcção da família e do talude). Os parâmetros da resistência mecânica foram baseados em 10 ensaios de laboratório, em amostras com um comprimento médio ao longo da direcção do deslizamento de 12,7 cm e uma tensão tangencial resistente média igual a 0,38 MPa para uma tensão normal de 0,3 MPa, que induz um valor de 1,270 para o coeficiente de atrito (tg ϕ), e em 3 ensaios de campo, em blocos com um comprimento médio de 69,0 cm e um τ médio de 0,31 MPa para uma tensão normal idêntica, o que conduz a tg ϕ = 1,022. Usando a equação (8) com estes parâmetros é possível estabelecer a seguinte relação

$$\text{tg } \phi = 1,642 - 0,146 \cdot \ln L \tag{11}$$

O emprego desta expressão não parece ser irrealista, especialmente após a análise do Quadro 1, onde se apresenta um conjunto de comprimentos de diaclases com as respectivas características de resistência.

QUADRO 1

Características resistentes de diaclases em função do comprimento de deslizamento. Efeito de escala

<i>L</i> (m)	tg ϕ	ϕ (°)
Lab.	1,270	51,8
"in situ"	1,022	45,6
1	0,968	44,1
2	0,866	40,9
5	0,732	36,2
10	0,631	32,2
20	0,529	27,9
50	0,395	21,6
100	0,294	16,4

Em cada iteração, os resultados da simulação são o volume do bloco, o factor de segurança, que fornece informação acerca da estabilidade do bloco, e a probabilidade de ocorrência da diaclase com área igual ou superior à necessária para formar o bloco.

A primeira análise que pode ser efectuada tem por base os gráficos apresentados na Fig. 2, onde, para dois comprimentos longitudinais do talude distintos (*B* igual a 20 e 50 m), se encontram, para cada iteração, os factores de segurança em função das probabilidades de ocorrência. Nestes gráficos, só se encontram os primeiros 5000 resultados da simulação de modo a não tornar as figuras confusas e a permitir uma melhor leitura das mesmas. No extremo direito dos gráficos, aparece um número aparentemente elevado de pontos com a mesma probabilidade (10⁻²⁴). Tal deve-se à introdução de um limite, igual a esse valor, colocado no programa, com o propósito de evitar problemas numéricos ("underflow").

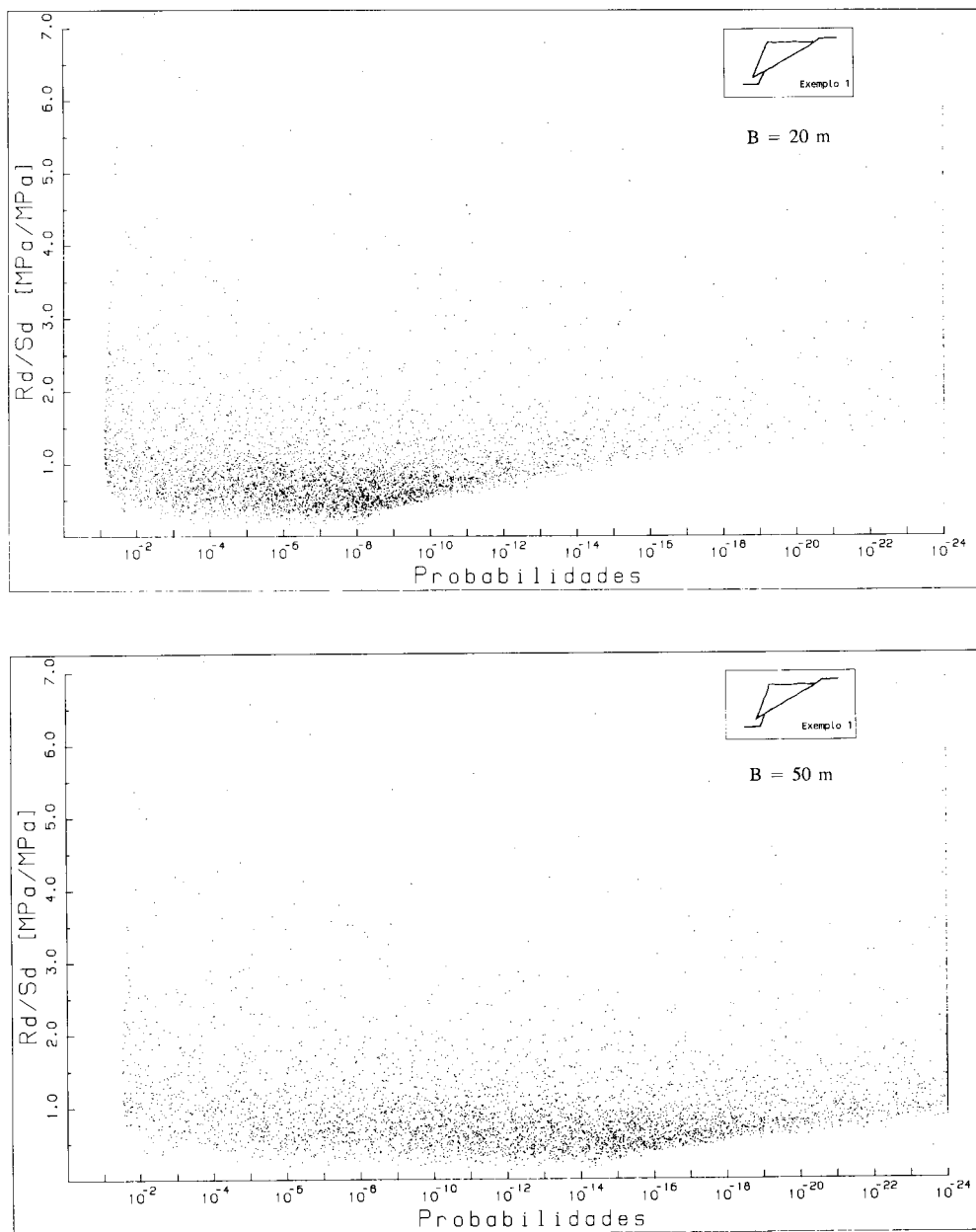


Fig. 2 — Factores de segurança e as respectivas probabilidades para o exemplo 1

Para o talude de comprimento menor, as probabilidades são todas inferiores a 10^{-1} e as primeiras roturas aparecem também por volta do mesmo valor. A maioria dos pontos parece ter um factor de segurança inferior a 1, correspondendo, por isso, ao deslizamento do talude. A maior densidade de pontos encontra-se para uma probabilidade de cerca de 10^{-8} e para a direita deste valor são mais escassos do que para a esquerda.

Para o talude com o comprimento maior, apesar de a maioria dos pontos representar blocos instáveis, as probabilidades são bastante mais baixas, como seria de esperar, devido às maiores áreas que são necessárias para formar um bloco geometricamente capaz de deslizar. As probabilidades mais elevadas reduzem-se a cerca de metade (0,1 para 0,05) e a maior densidade encontra-se agora em torno de 10^{-15} . O deslocamento dos valores das probabilidades para a direita pode, também, reconhecer-se pelo aumento da quantidade de pontos que se encontram no limite inferior, para o talude com 50 m de desenvolvimento.

Na continuação da análise, que será doravante baseada nos resultados de 250 000 iterações do programa de simulação, pode ser desenhado um segundo tipo de gráficos, que traça as curvas cumulativas dos factores de segurança. Estas curvas representam o somatório das probabilidades de uma certa relação entre as tensões resistentes e actuantes, SF_c , não ser excedida sobre a soma de todas as probabilidades

$$F(SF) = \frac{\sum P(SF < SF_c)}{\sum P(SF)} \quad (12)$$

Na Fig. 3, apresentam-se essas curvas cumulativas, para os taludes com 20 e 50 m de comprimento. Destes gráficos, é clara a já mencionada influência do comprimento do talude sobre as probabilidades.

Com os mesmos resultados que permitiram o traçado da Fig. 3, pode ser efectuado um outro tipo de estudo. Quando os critérios de dimensionamento ou projecto impõem um factor de segurança superior a 1,0 — 1,3 e 1,5 são valores correntes em análise de taludes (Hoek e Bray 1977) —, o que está de facto a fazer-se é a reduzir as características mecânicas e/ou a aumentar as forças actuantes, de uma forma empírica e desconhecida. Logo, impor que o factor de segurança, FS , seja superior a um certo valor (1,5, por exemplo) é o mesmo que considerar que Rd/Sd , entendido como a razão entre a tensão tangencial resistente mobilizada e a actuante (de acordo com o ponto de vista do Eurocode 7: Fundações), deve ser maior que o inverso desse valor ($1/1,5 = 0,667$).

Esta influência é analisada no Quadro 2, onde se apresentam, para taludes com desenvolvimentos longitudinais entre 20 e 60 m, valores das curvas de frequências acumuladas de blocos cinematicamente instáveis dado um certo critério de dimensionamento, igual ou superior a 1.

Das tabelas anteriores, podem ser retiradas algumas conclusões importantes acerca de como os critérios de projecto afectam os níveis de segurança. Por exemplo, no que respeita ao talude mais curto (20 m), a probabilidade de ocorrerem deslizamentos é reduzida 2,1 vezes se for imposto um critério de projecto com FS igual a 1,3; 3,6 se esse valor for de 1,5; e 14,6 se for de 2,0. Para taludes de maior desenvolvimento (60 m), estes factores aumentam para 2,5, 4,7 e 30,7, no que concerne as mesmas relações. Em termos globais, a principal conclusão a retirar é que, em termos médios, utilizar um critério de dimensionamento com FS igual ou superior a 1,3 equivale a reduzir o número de blocos instáveis a metade e impôr um valor de 1,5 é equivalente a uma redução desse número para um quarto.

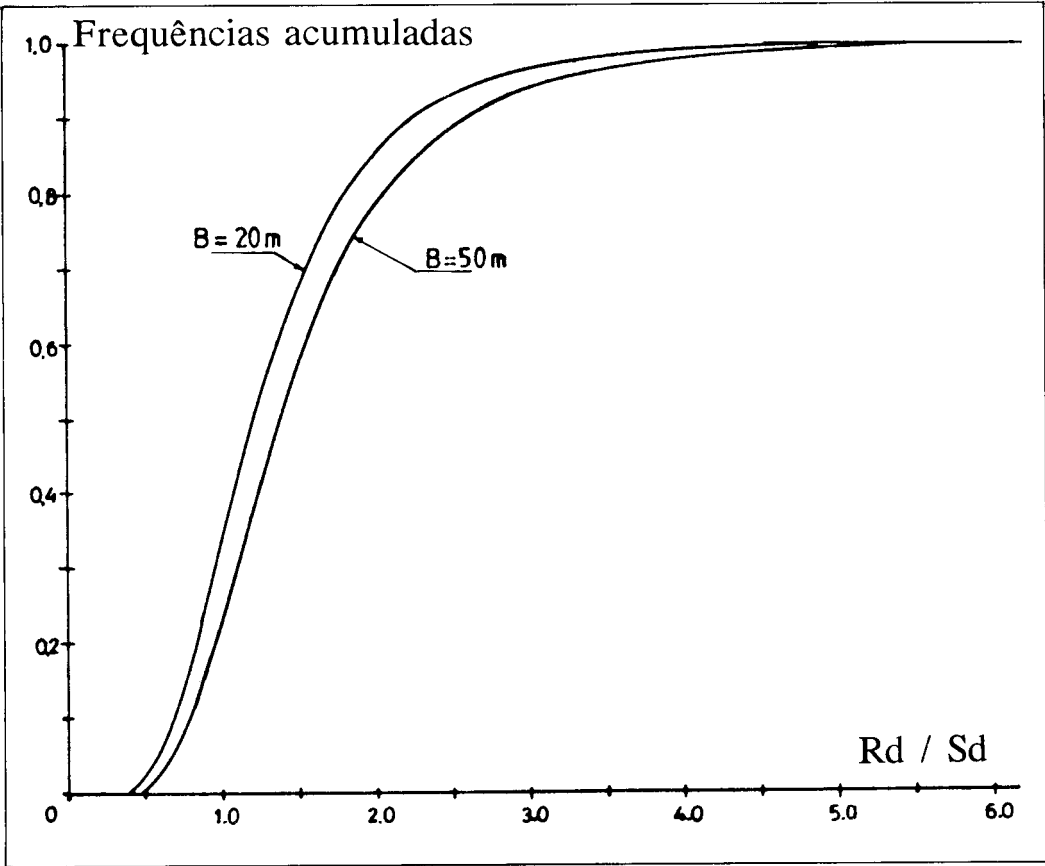


Fig. 3 — Curvas cumulativas dos factores de segurança para o exemplo 1

QUADRO 2

Probabilidades acumuladas para diversos critérios de dimensionamento
e para diversos comprimentos de talude

B (m)	$FS > 1,0$ $R_s/S_d > 1,00$ (%)	$FS > 1,3$ $R_d/S_d > 0,77$ (%)	$FS > 1,5$ $R_d/S_d > 0,67$ (%)	$FS > 2,0$ $R_d/S_d > 0,50$ (%)
20	33,4	15,9	9,4	2,3
30	28,5	12,7	7,3	1,5
40	25,4	10,8	6,0	1,1
50	23,2	9,5	5,2	0,9
60	21,5	8,5	4,6	0,7

Este tipo de conclusões está estritamente relacionado com critérios de projecto e a avaliação das suas influências na segurança. Se se pretender um estudo económico baseado numa análise dos riscos, os resultados devem sofrer um tratamento inteiramente diferente.

A Fig. 4 apresenta, para dois taludes com a mesma altura de 20 m e comprimentos distintos, os histogramas de frequências dos blocos instáveis, para diversos critérios de dimensionamento (*FS*), em função das probabilidades desses blocos ocorrerem, face às áreas das descontinuidades de que necessitam para se formarem. O eixo horizontal é similar ao apresentado na Fig. 2 e o vertical representa o número de pontos encontrados na vizinhança de uma dada probabilidade, e menores que um certo factor valor de *FS*, sobre o total de resultados disponíveis.

A influência do comprimento do talude é, aqui, bastante mais explícita. Mas a conclusão mais importante é que com estes gráficos é possível determinar a probabilidade de ocorrência dos primeiros deslizamentos, simplesmente através da multiplicação das coordenadas *x* e *y* dos pontos mais à esquerda dos gráficos. Estes resultados encontram-se compilados no Quadro 3, para os diferentes comprimentos de talude e para diversos critérios de projecto.

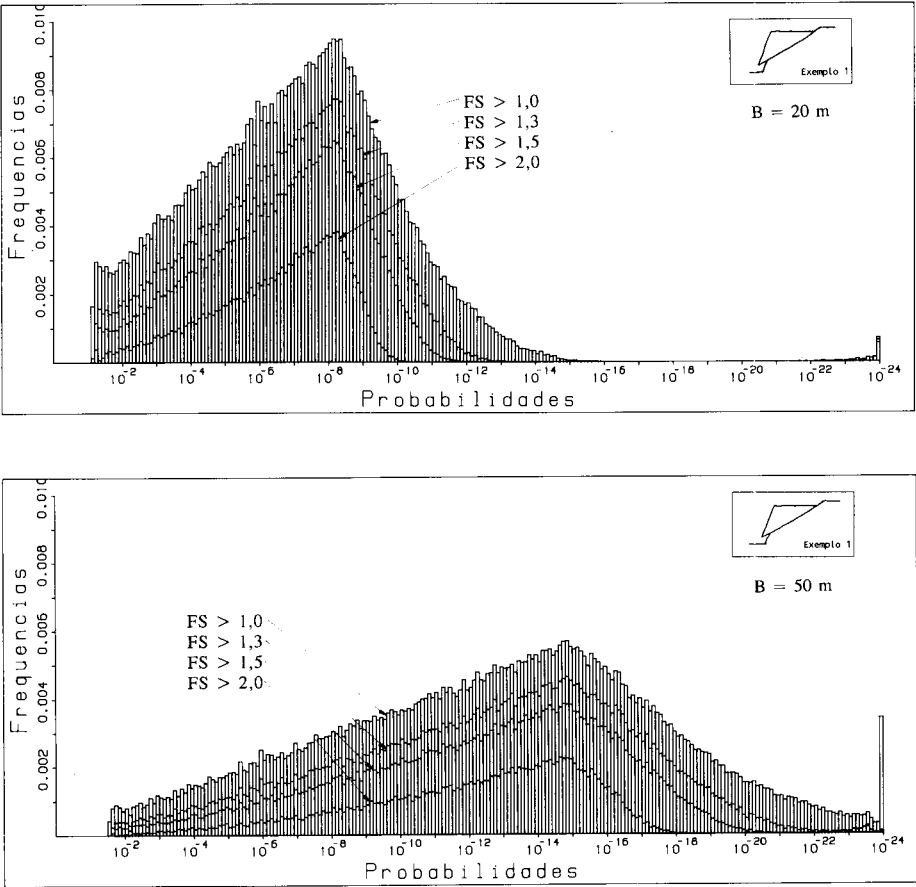


Fig. 4 — Gráficos frequências-probabilidades para diversos critérios de projecto (Exemplo 1)

QUADRO 3

Probabilidades de rotura

<i>B</i> (m)	<i>FS</i> > 1,0 <i>Rs/Sd</i> > 1,00	<i>FS</i> > 1,3 <i>Rd/ Sd</i> > 0,77	<i>FS</i> > 1,5 <i>Rd/Sd</i> > 0,67	<i>FS</i> > 2,0 <i>Rd/Sd</i> > 0,50
20	$1,67 \times 10^{-4}$	$7,12 \times 10^{-5}$	$4,66 \times 10^{-5}$	$8,28 \times 10^{-6}$
30	$6,97 \times 10^{-5}$	$2,50 \times 10^{-5}$	$1,35 \times 10^{-5}$	$2,10 \times 10^{-6}$
40	$3,12 \times 10^{-5}$	$1,15 \times 10^{-5}$	$6,67 \times 10^{-6}$	$7,96 \times 10^{-7}$
50	$1,80 \times 10^{-5}$	$6,73 \times 10^{-6}$	$3,75 \times 10^{-6}$	$4,67 \times 10^{-7}$
60	$1,21 \times 10^{-5}$	$4,38 \times 10^{-6}$	$2,62 \times 10^{-6}$	$2,57 \times 10^{-7}$

Este procedimento é facilmente adaptável à execução de estudos de segurança ou económicos em que certos riscos são assumidos. Por exemplo, se fosse permitido que pequenos volumes da face do talude ($0,75 \text{ m}^2$ por metro de desenvolvimento longitudinal, correspondentes aos 5% superiores da altura) pudessem deslizar, por as suas consequências não serem perigosas ou importantes, os valores que seriam obtidos, para substituir os seus homólogos do Quadro 3, seriam os que se encontram no Quadro 4. Esta influência pode, também, ser vista na Fig. 5 e na sua comparação com a figura anterior.

QUADRO 4

Probabilidades de rotura de blocos com volumes superiores a $0,75 \times B$

<i>B</i> (m)	<i>FS</i> > 1,0 <i>Rs/Sd</i> > 1,00	<i>FS</i> > 1,3 <i>Rd/ Sd</i> > 0,77	<i>FS</i> > 1,5 <i>Rd/Sd</i> > 0,67	<i>FS</i> > 2,0 <i>Rd/Sd</i> > 0,50
20	$2,80 \times 10^{-5}$	$1,33 \times 10^{-5}$	$8,65 \times 10^{-6}$	$1,97 \times 10^{-6}$
50	$2,95 \times 10^{-7}$	$1,02 \times 10^{-7}$	$5,01 \times 10^{-8}$	$1,08 \times 10^{-8}$

3.2 — Deslizamento plano. Exemplo 2

O exemplo seguinte adiciona ao anterior a existência de uma família muito persistente (com uma intensidade elevada ou um espaçamento baixo), quase vertical, com uma área média grande. A sua direcção média é, também, paralela à face do talude e a sua inclinação é de 85° , mas na direcção oposta à inclinação do talude e da família sub-horizontal. A sua dispersão foi tomada igual a 3° , somente segundo a direcção das linhas de nível. A área média é de 220 m^2 e a intensidade média de $12,5 \text{ m}^2/\text{m}^3$ (espaçamento de 8 cm). Esta família corresponde aos planos de xistosidade de um maciço rochoso de metamorfismo acentuado.

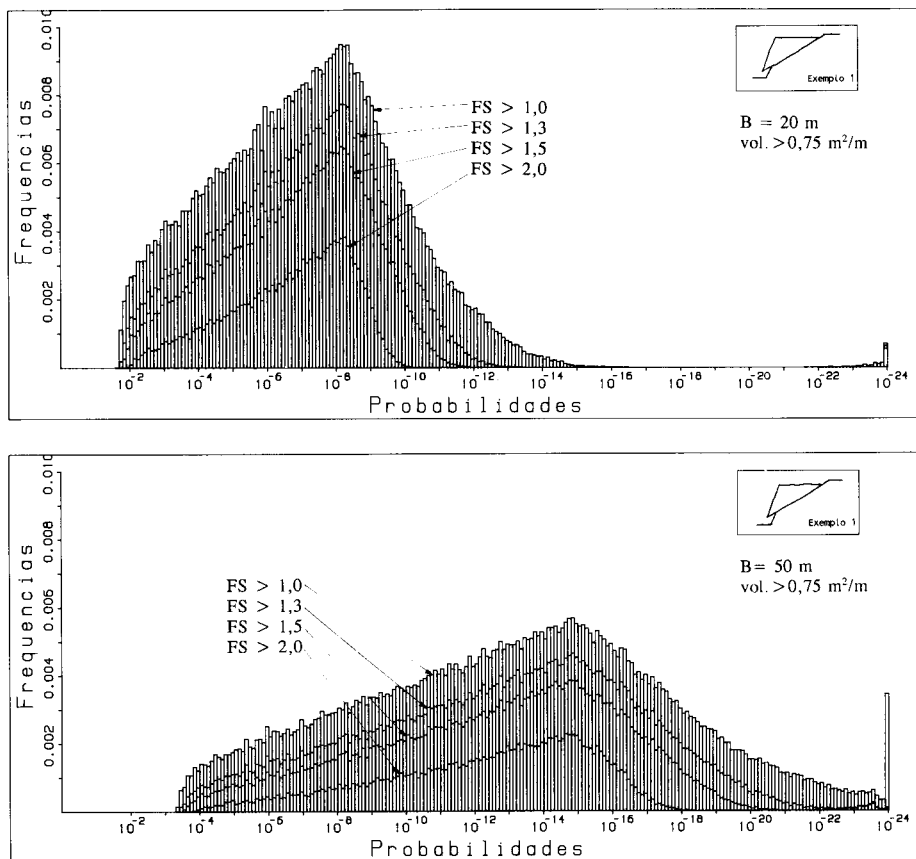


Fig. 5 — Gráficos frequências-probabilidades para diversos critérios de projecto não considerando blocos de dimensões reduzidas (Exemplo 1)

A influência da introdução desta nova família de descontinuidades pode ser facilmente identificada na Fig. 6 e na sua comparação com a Fig. 4. As probabilidades de ocorrência de roturas são maiores neste último caso. Esta conclusão pode ser tirada qualitativamente das figuras e quantitativamente da comparação do Quadro seguinte com o Quadro 3.

QUADRO 5

Probabilidades de rotura

<i>B</i> (m)	<i>FS</i> > 1,0 <i>Rs/Sd</i> > 1,00	<i>FS</i> > 1,5 <i>Rd/ Sd</i> > 0,67	<i>FS</i> > 2,0 <i>Rd/Sd</i> > 0,50
20	$3,64 \times 10^{-3}$	$5,10 \times 10^{-4}$	$8,81 \times 10^{-5}$
30	$2,00 \times 10^{-3}$	$2,62 \times 10^{-4}$	$3,62 \times 10^{-5}$
40	$1,21 \times 10^{-3}$	$1,36 \times 10^{-4}$	$2,29 \times 10^{-5}$
50	$7,68 \times 10^{-4}$	$9,69 \times 10^{-5}$	$1,25 \times 10^{-5}$
60	$4,95 \times 10^{-4}$	$6,10 \times 10^{-5}$	$8,11 \times 10^{-6}$

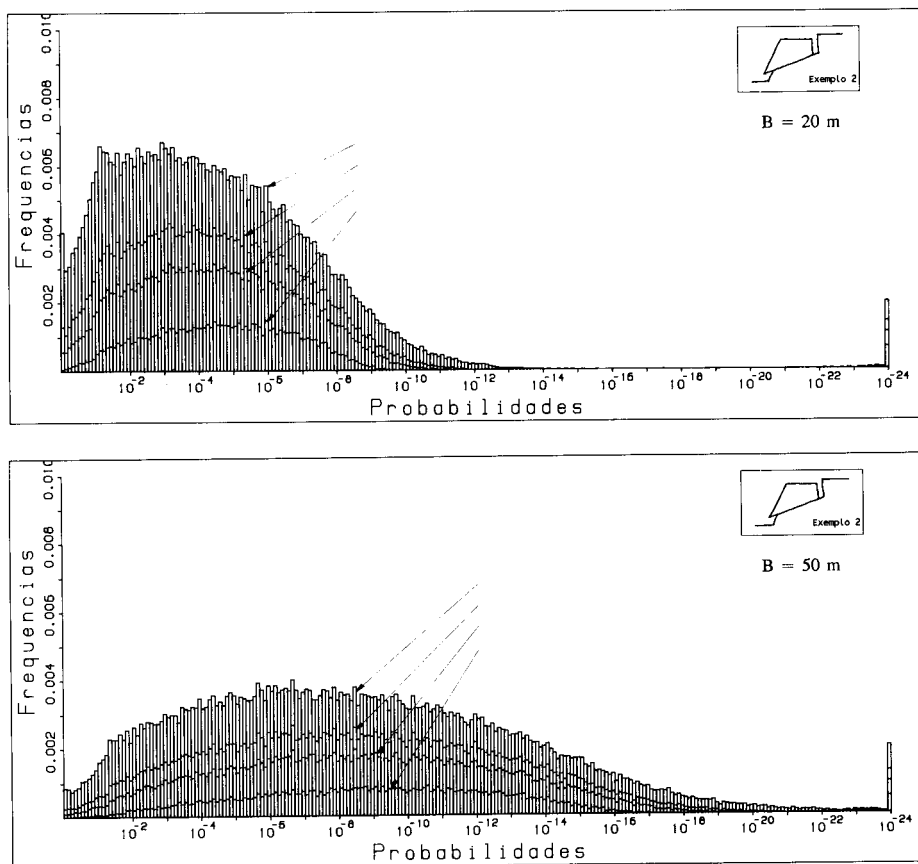


Fig. 6 — Gráficos frequências-probabilidades para diversos critérios de projecto (Exemplo 2)

3.3 — Rotura de uma cunha. Exemplo 3

Este exemplo trata do caso de uma rotura de um bloco formado por uma cunha, com a descrição esquemática que pode ser vista na Fig. 7.

As duas famílias de descontinuidades, que são necessárias para formar uma cunha num talude rochoso, têm as seguintes atitudes médias: família A — $N40^\circ E 44^\circ NW$, família B — $N46^\circ W 72^\circ SW$. O talude tem direcção N-S e uma inclinação de 1:5 (como nos exemplos anteriores dos pontos 3.1 e 3.2) para W. A família A possui uma dispersão máxima de 18° , formando um ângulo de 25° com a dispersão da inclinação, e uma dispersão mínima de 10° . Pela sua parte, a família B, 12° e 4° , respectivamente para as dispersões máximas e mínimas, e um ângulo de 90° com a direcção das linhas de nível.

Neste caso, foram considerados dois conjuntos de parâmetros da geometria das famílias, de modo a testar a influência da dimensão da área num estudo deste tipo. Estes valores podem ser consultados no Quadro 6 e serão referenciados como altos e baixos, respectivamente, para as áreas e intensidades maiores e menores.

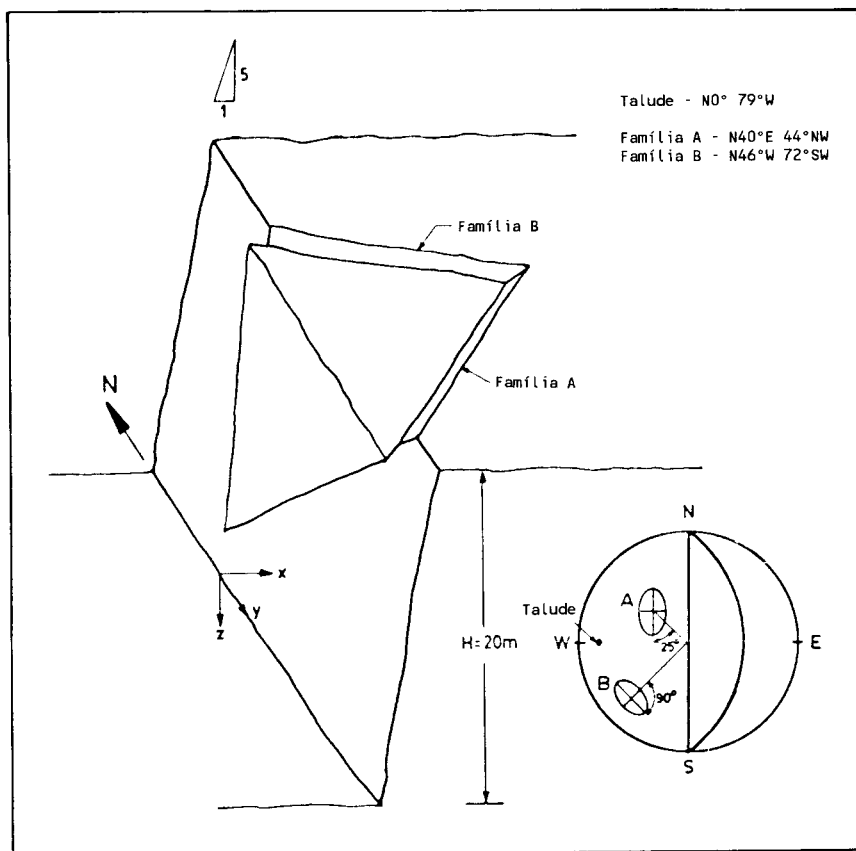


Fig. 7 — Esquema da geometria de um escorregamento de uma cunha

QUADRO 6

Parâmetros geométricos da dimensão das famílias

Família	Área (m ²)		Intensidade (m ² /m ³)		Espaçamento (/m)	
	A	B	A	B	A	B
Alto	4,5	3,2	1,3	0,8	0,8	1,2
Baixo	1,3	2,1	0,8	0,5	1,2	2,0

Os efeitos de escala nas características mecânicas de ambas as famílias foram modelados com base na equação (9) da seguinte forma:

$$\text{Família A: } \operatorname{tg} \phi = 0,595 + 1,300 \cdot e^{(-0,028L)} \quad (13)$$

$$\text{Família B: } \operatorname{tg} \phi = 0,884 + 0,477 \cdot e^{(-0,018L)}$$

Para tentar mostrar mais claramente a influência do efeito de escala, o Quadro 7 apresenta as resistências das juntas para diversos comprimentos de deslizamento das mesmas.

QUADRO 7

Características resistentes de diaclases das duas famílias para diferentes comprimentos de deslizamento. Efeito de escala

<i>L</i> (m)	<i>Família A</i>		<i>Família B</i>	
	Tg ϕ	ϕ	tg ϕ	ϕ
Lab	1,448	55,4	1,270	51,8
"in situ"	0,754	37,0	1,022	45,6
1	0,674	34,0	0,965	44,0
2	0,599	30,9	0,898	41,9
5	0,595	30,7	0,884	41,5
10	0,595	30,7	0,884	41,5

Estes valores foram determinados dos resultados de ensaios de laboratório e "in situ", referidos no Quadro, e podem ser usados para comparar as duas descrições do efeito de escala, expressões (8) e (9), visto que a família B assumiu os mesmos resultados dos ensaios da família sub-horizontal dos exemplos anteriores (Quadro 1). Por um lado, a equação (8) induz parâmetros de resistência muito baixos se o comprimento ou a área da descontinuidade for muito grande; por outro lado, a expressão (9) conduz a pequenas diferenças de resistência entre juntas com mais de 2 m de comprimento.

A dispersão da resistência ao deslizamento é considerada, para ambas as famílias de diaclases, através dos coeficientes de variação, respectivamente 28 e 36% para as famílias A e B.

A simulação foi efectuada de uma forma similar à descrita no ponto 3.1 e os seus resultados, para um talude com 20 m de altura, podem ser vistos nas Figs. 8 e 9, para ambos os conjuntos de parâmetros geométricos da persistência das famílias.

Na Fig. 8, para um talude rochoso com 20 m de altura, a influência da área é bastante explícita. As probabilidades de ocorrência das descontinuidades são mais elevadas para as áreas maiores do que para as menores e esta redução é de cerca de 50%. Outra conclusão que pode ser tirada é que os factores de segurança se encontram numa faixa de valores entre 0,5 e 4,5, significando que, se, como critérios de projecto, a relação entre as forças resistentes e actuantes fosse tomada sempre superior a 0,5, então a probabilidade de uma rotura ocorrer seria extremamente baixa.

A Fig. 9 mostra, de uma forma mais quantitativa, a influência das áreas e dos espaçamentos. O caso com famílias mais persistentes revela probabilidades de rotura bastante mais elevadas que o das famílias menos persistentes, especialmente quando se toma em linha de conta que as escalas verticais não são idênticas. As probabilidades de ocorrência de rotura são, respectivamente para as características de persistência mais altas e mais baixas, de 2,81% e 0,28%.

Comparando estes valores com os obtidos nos exemplos anteriores dos deslizamentos planos, eles são bastante superiores. Uma das causas reside no facto de as áreas e intensidades utilizadas no exemplo do deslizamento da cunha serem relativamente elevados e, em casos reais, representarem famílias de descontinuidades que se devem considerar importantes. Uma análise, que permitisse a possibilidade de blocos com volumes pequenos deslizarem, poderia baixar estes valores para uma faixa mais razoável.

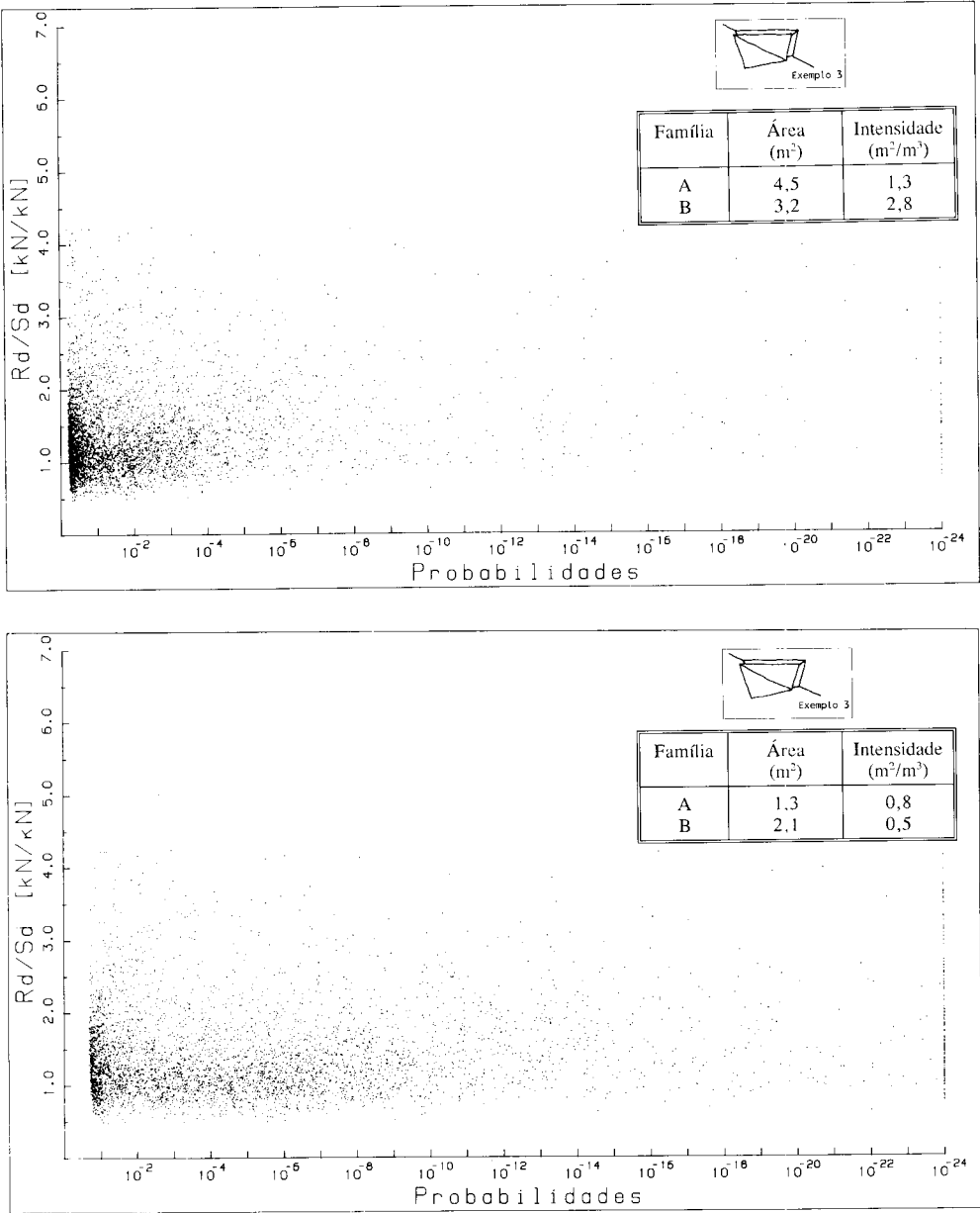


Fig. 8 — Factores de segurança e respectivas probabilidades para o exemplo 3

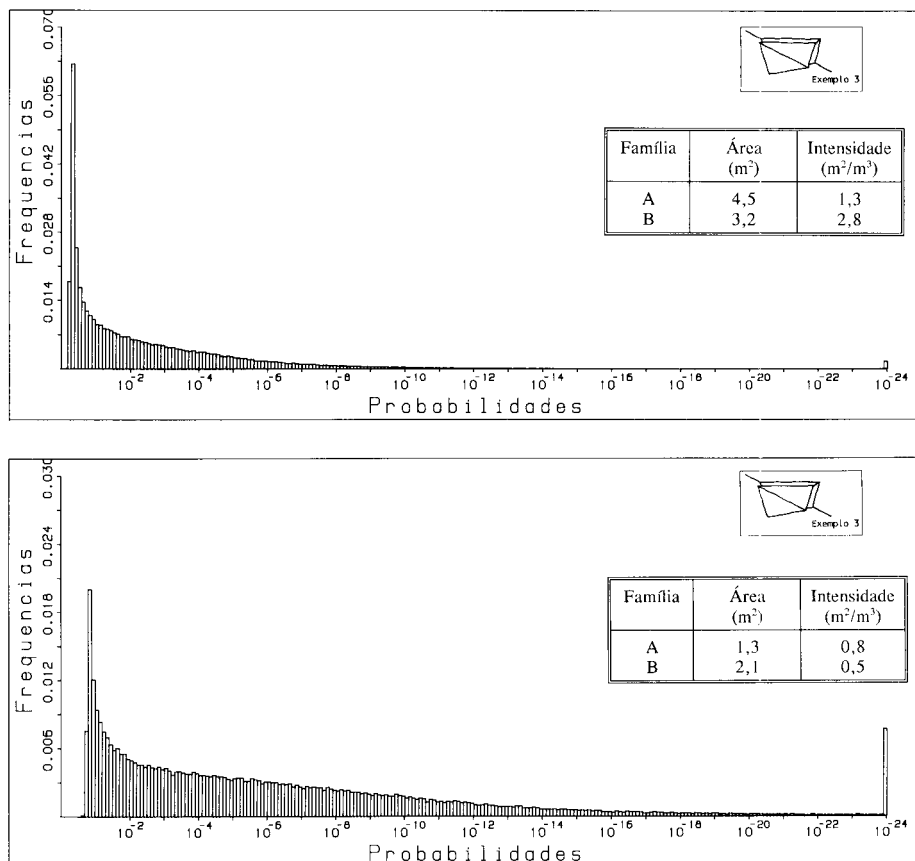


Fig. 9 — Gráficos frequências-probabilidades (Exemplo 3)

4 — CONSIDERAÇÕES FINAIS

O principal objectivo deste trabalho é mostrar que é possível realizar análises estatísticas de problemas básicos de Mecânica das Rochas sem a necessidade de mais dados, informação ou ensaios que outras abordagens de carácter determinístico.

O propósito não foi, portanto, apresentar quantitativamente números precisos, mas somente estabelecer comparações de índole qualitativa entre alguns dos parâmetros que influenciam a estabilidade de taludes em maciços rochosos.

O papel muito importante, e na maioria das vezes condicionante, que a água desempenha é uma das questões que não foi focada nesta apresentação, apesar de não ter sido, de forma alguma, esquecido. A influência da água, através da diminuição da tensão normal, sem uma redução correspondente das tensões tangenciais (tensões efectivas), e do decréscimo das características resistentes, é um dos desenvolvimentos que, no futuro, serão introduzidos neste tipo de análise. Outros aspectos que também virão a ser modelados são a acção dos sismos, baseada numa análise estática por forças de inércia, e a existência e dimensionamento de dispositivos para impedir o deslizamento, como pregagens e ancoragens.

Os programas podem ainda ser desenvolvidos no capítulo da geração aleatória das áreas das descontinuidades. O modelo utilizado neste trabalho é muito conservativo, porque a existência das diaclases, necessárias à formação dos blocos cinematicamente instáveis, não é posta em causa, quando deveria ser considerada como um acontecimento aleatório com uma determinada distribuição probabilística.

No que se refere ao efeito de escala nas características resistentes, o estudo probabilístico de taludes rochosos e a retro-análise de deslizamentos pode contribuir, de uma forma bastante positiva, para o esclarecimento desta questão. Os modelos, utilizados neste trabalho para descrever a redução da tensão tangencial resistente com o aumento da área, são baseados em resultados de ensaios, mas extrapolam arrojadamente dessas áreas, nunca superiores a 1 m², para a dimensão e escala das descontinuidades reais.

Como conclusão final, não se considera necessário tornar a apontar a importância da substituição progressiva das análises determinísticas por estudos probabilísticos, aproximando, assim, a Geotecnia de outros ramos da Engenharia, mas não deve ser esquecido que somente um aumento do número das análises probabilísticas pode conduzir ao desenvolvimento de critérios de dimensionamento, projecto, normas de verificação da segurança e regras de actuação mais seguros e mais económicos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- AGTERBERG, F. P. — *Geomathematics. Mathematical background and geoscience applications*. Amsterdam, Elsevier 1974.
- BANDIS, S. C. — *Experimental studies of scale effects on shear strength and deformation of rock joints*. Ph. D. Thesis, Univ. Leeds 1980.
- BANDIS, S. C.; LUMSDEN, A.; BARTON, N. — *Experimental studies of scale effects on the shear behaviour of rock joints*. Int. J. Rock Mech. Min. Sci. Vol. 18: 1-21, 1981.
- BARTON, N.; CHOUBEY, V. — *The shear strength of rock joints in theory and practice*. Rock Mechanics 10: 1-54, 1977.
- ESTERHUIZEN, G. S. — *Application of probability methods to predict rock wedge failure in shafts*. Symp. Rock Instability Problems in Mine Shafts, South Africa Nat. Group 1990.
- GOODMAN, R. E. — *Introduction to rock mechanics*. New York, John Wiley 1976.
- GROSSMANN, N. F. — *Influência das descontinuidades na deformabilidade dos maciços rochosos*. Contribuição para o estudo do diaclasamento em maciços rochosos. Tese para Especialista. Lisboa, LNEC 1977.
- GROSSMANN, N. F. — *A numerical method for the definition of discontinuity sets*. 5th Int. Cong. Rock Mechanics, Melbourne. Victoria, B. P. Anderson 1983.
- GROSSMANN, N. F. — *The bivariate normal distribution on the tangent plane at the mean attitude*. Keynote lecture of Int. Symp. Fundamentals of Rock Joints, Bjorkliden. Lulea, Centek 1985.
- GROSSMANN, N. F. — *As descontinuidades nos maciços rochosos*. Programa para Investigador Coordenador. Lisboa, LNEC 1987.

- GROSSMAN, N. F.; MURALHA, J. — *About the mean area of a joint set*. 6th Int. Cong. Rock Mechanics, Montreal. Rotterdam, Balkema 1987.
- HOEK, E.; BRAY, J. — *Rock slope engineering*. London, Inst. Mining Metallurgy 1977.
- HUDSON, J. A.; PRIEST, S. D. — *Discontinuities and joint mass geometry*. Int. J. Rock Mech. Sci. Vol. 16, n.º 6. 1979.
- KIKUCHI, K.; KOBAYASHI, T.; INOUE, M.; IZUMIYA, Y. — *A study on the quantitative estimation of the joint distribution and the modelling of jointed rock masses*. Tokio, Tokio Electric Power Services 1985.
- KOHLBECK, F.; SCHEIDEGGER, A. E. — *On the theory of the evaluation of joint orientation measurements*. Rock Mechanics, n.º 1: 9, 1976.
- KULATILAKE, P. H. S. W. — *Fitting Fisher distributions to discontinuity orientation data*. Journal of Geological Education, vol. 33: 266, 1985.
- KULATILAKE, P. H. S. W.; FINLEY, R. E.; GHOSH, A. — *Effect of variability of joint orientation and strength on factor of safety of wedge stability*. Int. Symp. Fundamentals of Rock Joints, Bjorkliden. Lulea, Centek 1985.
- KULATILAKE, P. H. S. W. — *Bivariate normal distribution fitting on discontinuity orientation of clusters*. Mathematical Geology, vol. 18, n.º 2, 1986.
- LAMAS, L. M. N. — *Statistical analysis of the stability of rock faces*. M. Sc. Thesis. London, Imperial College 1985.
- LNEC 1973 — *Área de Sines. Estudos pelo método da amostragem integral*. Lisboa, LNEC 1973.
- LONDE, P. — *La sécurité des barrages*. Rev. Franç. Géotechnique, n.º 51: 41-49, 1990.
- MAHTAB, M. A.; BOLSTAD, D. D.; ALLREDGE, J. R.; SHANLEY, R. J. — *Analysis of fracture orientation for input of structural models of discontinuous rock*. U. S. Depart. Interior, Bureau of Mines (Int. Report 7669), Washington 1972.
- MARANHÃO, N. — *Contribuição para o estudo do diaclasamento de maciços rochosos*. Lisboa, LNEC 1973.
- MINEIRO, A. J. C. — *Dimensionamento de barragens de aterro. Novos critérios de segurança*. VII Lição Manuel Rocha. Lisboa, Soc. Port. Geotecnia e Assoc. Ant. Alunos F. C. T./U. N. L. 1990.
- MURALHA, J.; CUNHA, A. P. C. — *Analysis of scale effects in joint mechanical behaviour*. Scale Effects in Rock Masses, Int. workshop, Loen. Rotterdam, Balkema 1990a.
- MURALHA, J.; CUNHA, A. P. C. — *About LNEC experience on scale effects in the mechanical behaviour of joints*. Scale Effects in Rock Masses, Int. workshop, Loen. Rotterdam, Balkema 1990b.
- PATTON, F. D. — *Multiple modes of shear failure in rock and related materials*. Ph. D. Thesis, Univ. Illinois 1966.
- PRESS, W. H.; FLANNERY, B. P.; TEUKOLSKY, S. A.; VETTERLING, S. A. — *Numerical recipes, the art of scientific computing*. Cambridge, Cambridge University Press 1986.
- PRIEST, S. D.; HUDSON, J. A. — *Discontinuity spacings in rock*. Int. J. Rock Mech. Min. Sci., vol. 13, n.º 5: 135, 1976.
- SHANLEY, R. J.; MAHTAB, M. A. — *Fractan: a computer code for analysis of clusters defined on the unit hemisphere*. U. S. Depart. Interior, Bureau of Mines (Int. Report 8671) 1975.
- WARBURTON, P. M. — *Application of a new computer model for reconstructing blocky rock geometry, analyzing single block stability and identifying keystones*. 5th Int. Cong. Rock Mechanics, Melbourne. Victoria, B. P. Anderson 1983.