CONDIÇÕES DE FRONTEIRA PARA A DETERMINAÇÃO DAS LINHAS DE CORRENTE

Boundary conditions and flow line determination

por
JOÃO RIBAS MARANHA*

RESUMO — O conhecimento das linhas de corrente em meios submetidos à percolação tem inegável interesse prático, mas as soluções propostas revelam, por vezes, formulação incompleta. Neste artigo apresenta-se a questão em todo o seu desenvolvimento, exemplificando-se com uma aplicação prática em que se utilizou o método dos elementos finitos.

SYNOPSIS — It is often necessary to draw flow lines that represent the pattern of flow in a given seepage problem. In this paper, the boundary conditions that must be applied to the flow function in order to account for portions of the boundary where the velocity has a normal component, are presented. The case of a heterogeneous and anisotropic media, with general principal directions, is analyzed. A flow net determined by the finite element method is presented. The considerations made in this paper can be applied to any numerical method which might be used to solve the governing differential equations.

1 — INTRODUÇÃO

Ao analisar um problema de percolação relacionado com uma obra de engenharia é procedimento usual determinar as linhas equipotenciais. No entanto tem bastante interesse prático o conhecimento das linhas de corrente. As linhas de corrente, que permitem a visualização do escoamento, são traçadas com base na função de corrente. Esta função é obtida pela resolução da equação diferencial dos escoamentos em meios porosos, satisfazendo certas condições de fronteira, que podem ser essenciais ou naturais. As condições de fronteira essenciais consistem na imposição de valores da variável dependente, enquanto as condições de fronteira naturais se traduzem na especificação de uma densidade de fluxo que atravessa a fronteira.

A resolução da equação pode ser feita por métodos numéricos, de entre os quais se destacam, pela sua generalidade e flexibilidade, o método dos elementos finitos e o método dos elementos de fronteira.

A equação diferencial que rege os escoamentos em meios porosos pode ter como variável dependente a cota piezométrica:

$$\phi = \frac{p}{\gamma_w} + z \tag{1}$$

ou a função de corrente $\psi(x, y)$ que representa o caudal escoado entre o ponto de coordenadas (x, y) e um ponto de referência arbitrário A. Ambas as funções são determinadas a menos de uma constante.

---

* Engenheiro Civil, COBA.

Para achar a função de corrente pode-se proceder como se a função a determinar fosse a cota piezométrica, utilizando condições de fronteira e "permeabilidades" diferentes.

Em artigo publicado anteriormente (Kochen et al., 1984) foi abordado este mesmo tema, no entanto sem a generalidade possível. Não foi também considerada a alternativa, mais simples e menos trabalhosa, de impor na linha de percolação condições de fronteira naturais em vez das essenciais.

2 — EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Considera-se o caso mais geral da percolação através de um meio poroso, heterogéneo e anisotrópico, em que as direcções principais de permeabilidade não coincidam com os eixos do referencial global. Neste caso a permeabilidade em cada ponto é dada pelo tensor das permeabilidades:

$$k_{ij} = \begin{bmatrix} k_x & k_{xy} \\ k_{xy} & k_y \end{bmatrix} \tag{2}$$

que representa a permeabilidade segundo a direcção do referencial global.

Nestas condições a equação diferencial tendo como variável dependente a função de potencial é dada por:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k_x \frac{\partial \phi}{\partial x} + k_{xy}\frac{\partial \phi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k_{xy}\frac{\partial \phi}{\partial x} + k_y \frac{\partial \phi}{\partial y}\right) = 0 \tag{3}$$

sendo

$$\begin{cases} v_x = -\left(k_x \dfrac{\partial \phi}{\partial x} + k_{xy}\dfrac{\partial \phi}{\partial y}\right) \\ v_y = -\left(k_{xy}\dfrac{\partial \phi}{\partial x} + k_y \dfrac{\partial \phi}{\partial y}\right) \end{cases} \tag{4}$$

Por outro lado, as velocidades aparentes relacionam-se com a função de corrente ψ da seguinte forma:

$$\begin{cases} v_x = \dfrac{\partial \psi}{\partial y} \\ v_y = -\dfrac{\partial \psi}{\partial x} \end{cases} \tag{5}$$

Conjugando (4) e (5) obtém-se:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \phi}{\partial x} = -\dfrac{1}{k_x k_y - k_{xy}^2}\left(k_{xy}\dfrac{\partial \psi}{\partial x} + k_y \dfrac{\partial \psi}{\partial y}\right) \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial y} = +\dfrac{1}{k_x k_y - k_{xy}^2}\left(k_x\dfrac{\partial \psi}{\partial x} + k_{xy} \dfrac{\partial \psi}{\partial y}\right) \end{cases} \tag{6}$$

Recorrendo à condição de igualdade das derivadas parciais mistas:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} \tag{7}$$

e substituindo (6) em (7), obtém-se a equação diferencial que rege o fenómeno dos escoamentos em meios porosos, em que a variável dependente é a função de corrente:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{k_x k_y - k_{xy}^2}\left(k_x \frac{\partial \psi}{\partial x} + k_{xy}\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{k_x k_y - k_{xy}^2}\left(k_{xy} \frac{\partial \psi}{\partial x} + k_y\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)\right] = 0 \tag{8}$$

Por comparação com a equação (3) verifica-se que as componentes do tensor das permeabilidades se encontram multiplicadas por 1/det[k]. Se se pretender utilizar um programa concebido para a resolução da equação (3), tem de se multiplicar as componentes do tensor das permeabilidades por:

$$\frac{1}{k_x k_y - k_{xy}^2} \tag{9}$$

cujos valores resultantes serão designados por "permeabilidades equivalentes", pois desempenham uma função idêntica à que as componentes do tensor das permeabilidades assumem na equação (3).

3 — CONDIÇÕES DE FRONTEIRA

Já foram referidas as equações diferenciais que devem ser satisfeitas no domínio do problema. Falta analisar o que se refere às condições que devem ser impostas na fronteira, sem a especificação das quais o problema não tem solução.

Se a variável dependente for a função de potencial ϕ, as condições a aplicar na fronteira são:

a) condição de fronteira essencial:

$$\phi = \phi_0 \quad \text{em } \Gamma_1 \tag{10}$$

b) condição de fronteira natural:

$$\left(k_x \frac{\partial \phi}{\partial x} + k_{xy} \frac{\partial \phi}{\partial y}\right) n_x + \left(k_{xy} \frac{\partial \phi}{\partial x} + k_y \frac{\partial \phi}{\partial y}\right) n_y = \phi_n \text{ em } \Gamma_2 \tag{11}$$

em que Γ_1 e Γ_2 são porções da fronteira Γ do domínio Ω, tal que $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma$.

No caso de se pretender obter a função de corrente ψ, as condições de fronteira assumem a seguinte forma:

a) condição de fronteira essencial:

$$\psi = \psi_0 \text{ em } \Gamma_2 \tag{12}$$

b) condição de fronteira natural:

$$\frac{1}{k_x k_y - k_{xy}^2}\left[\left(k_x \frac{\partial \psi}{\partial x} + k_{xy} \frac{\partial \psi}{\partial y}\right) n_x + \left(k_{xy} \frac{\partial \psi}{\partial x} + k_y \frac{\partial \psi}{\partial y}\right) n_y\right] = \psi_n \text{ em } \Gamma_1 \tag{13}$$

4 — IDENTIFICAÇÃO DAS CONDIÇÕES DE FRONTEIRA

Num problema real de escoamento não confinado em meios porosos, é necessário identificar quais as diferentes condições de fronteira a aplicar nas zonas de características físicas distintas que constituem a fronteira. Na Fig. 1 representam-se as condições de fronteira que surgem com maior frequência em problemas de percolação.

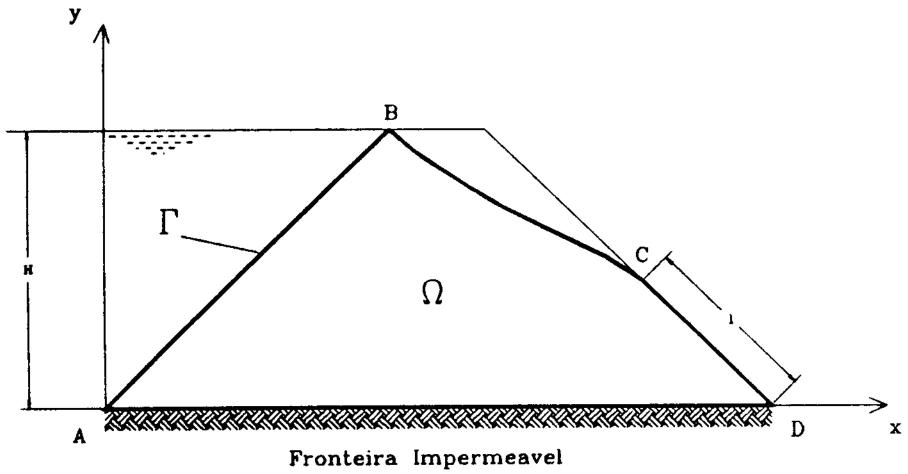

Fig. 1 — Domínio de escoamento e respectiva fronteira de uma barragem de aterro homogénea

A linha AD é a linha de corrente inferior, abaixo da qual o caudal percolado através do domínio é nulo, logo aplica-se a condição essencial de fronteira: $\psi = 0$

A linha BC é a linha de corrente que limita superiormente o domínio do escoamento, ou seja, sob a qual se escoa a totalidade do caudal que atravessa o domínio. Aplica-se neste caso a condição essencial de fronteira: $\psi = Q$, em que Q é o caudal total percolado.

A linha AB é uma equipotencial, logo a função ϕ mantém-se constante ao longo desta linha.

A linha CD representa uma zona de percolação, em que a componente da velocidade do escoamento na direcção normal à linha é não-nula. Ao longo da linha de percolação o potencial varia linearmente e é igual em cada ponto à cota. Conhece-se portanto, nesta porção da fronteira, a variação da função ϕ segundo a direcção tangencial à fronteira.

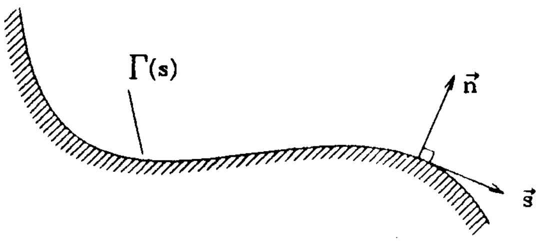

Fig. 2 — Vector normal e vector tangencial à fronteira Γ

Da Fig. 2 verifica-se a seguinte relação entre as componentes dos vectores normal e tangencial à fronteira:

$$\begin{cases} n_x = - s_y \\ n_y = s_x \end{cases} \tag{14}$$

onde n é o vector unitário normal à fronteira em cada ponto, e s é o vector unitário tangencial à fronteira em cada ponto.

Utilizando as igualdades referidas em (14) e ainda as equações (6) obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial s} &= \vec{\nabla} \cdot \vec{s} = \frac{\partial \phi}{\partial x} s_x + \frac{\partial \phi}{\partial y} s_y = \\ &= - \frac{1}{k_x k_y - k_{xy}^2} \left[\left(k_{xy} \frac{\partial \psi}{\partial x} + k_y \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) n_y + \left(k_x \frac{\partial \psi}{\partial x} + k_{xy} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) n_x \right] \end{aligned} \tag{15}$$

Identifica-se na expressão acima a condição de fronteira natural expressa em termos da função ψ. Verifica-se que é igual, em valor absoluto, à variação da função potencial ϕ na direcção tangencial à fronteira:

$$\psi_n = -\frac{\partial \phi}{\partial s} \tag{16}$$

Nas zonas da fronteira em que se conheça a função ϕ, como se verifica nas zonas AB e CD, e pretendendo-se obter a função de corrente ψ, pode aplicar-se a condição de fronteira natural. Existe contudo um valor indispensável que não pode ser obtido sem se recorrer a uma análise prévia para determinar a função potencial ϕ, que é o caudal total Q percolado através do domínio, pois este é o valor que a função de corrente ψ assume na linha superior de saturação.

5 — EXEMPLO DE APLICAÇÃO UTILIZANDO O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Apresenta-se a seguir uma rede de escoamento, com as respectivas linhas equipotenciais e de corrente, de uma barragem homogénea e isotrópica representada na Fig. 1. Recorreu-se para o seu cálculo ao método dos elementos finitos.

Na Fig. 3 estão definidas as condições de fronteira aplicadas no cálculo da função potencial ϕ. Neste caso particular ($k_x = k_y$) obtém-se uma rede de escoamento em que as linhas equipotenciais e as linhas de corrente são ortogonais entre si, o que permite uma fácil confirmação sobre a validade dos resultados obtidos.

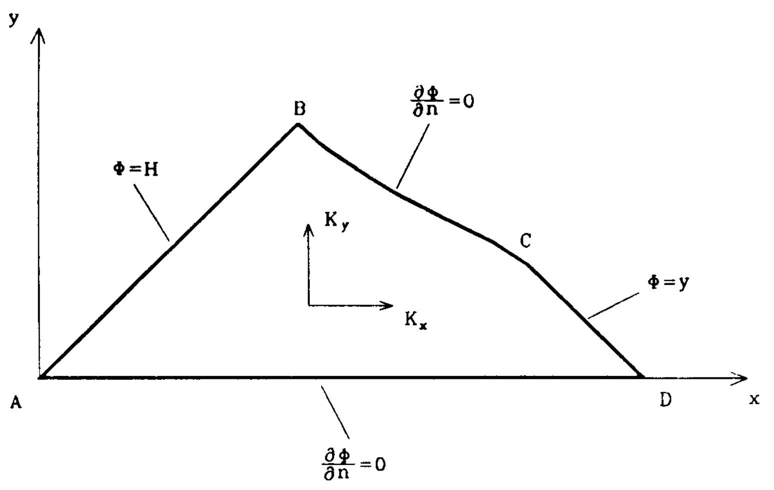

Fig. 3 — Condições de fronteira com a função potencial ϕ como variável dependente

Na Fig. 4 estão definidas as condições de fronteira aplicadas no cálculo da função de corrente ψ, assim como as "permeabilidades" equivalentes.

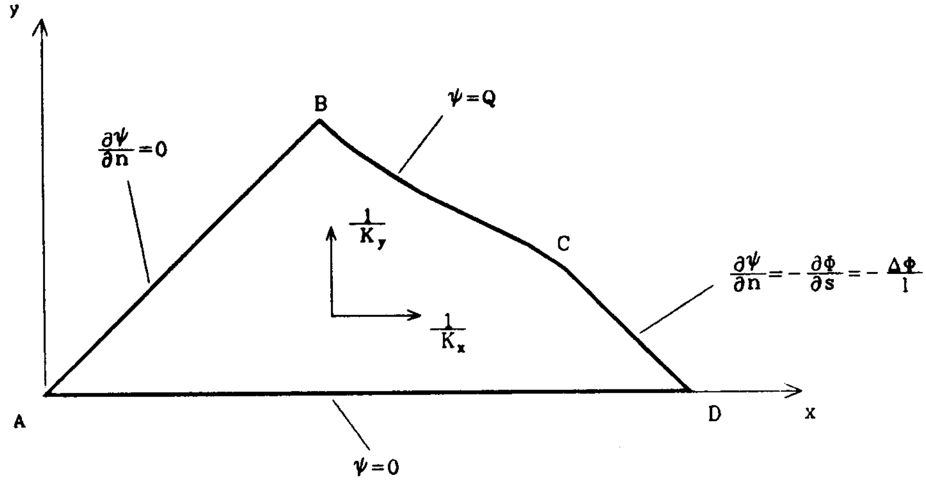

Fig. 4 — Condições de fronteira com a função de corrente ψ como variável dependente

A rede obtida encontra-se representada na Fig. 5, verificando-se que mesmo na zona junto da linha de percolação as linhas equipotenciais e de corrente se intersectam ortogonalmente.

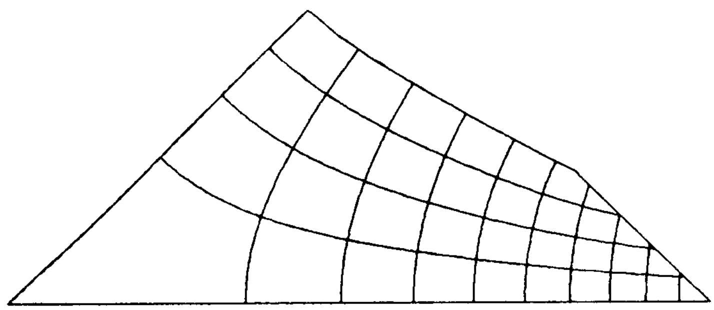

Fig. 5 — Rede de escoamento obtida utilizando o método dos elementos finitos

6 — CONCLUSÕES

A determinação das linhas de corrente, recorrendo a um programa que tenha sido concebido com a finalidade de calcular a função potencial, necessita que sejam satisfeitos os seguintes requisitos:

a) análise prévia em termos da função de potencial ϕ para obtenção do valor do caudal total percolado Q.
b) utilização, como tensor das permeabilidades equivalentes, do tensor das permeabilidades propriamente dito multiplicado por 1/det[k].

c) imposição, nas zonas de fronteira em que se conhece o valor da função potencial ϕ, da condição de fronteira expressa pela equação (16).

Este procedimento é aplicável a diversos métodos numéricos de resolução de problemas de valores na fronteira.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

KOCHEN, R.; DA SILVA, N.G.S.; CELESTINO, T.B. — *Determinação de Linhas de Fluxo pelo Método dos Elementos Finitos.* "Geotecnia" 42, Sociedade Portuguesa de Geotecnia, Lisboa, 1984.

REDDY, J.N. — *An Introduction to the Finite Element Method.* McGraw-Hill, 1984.

ZIENKIEWICZ, O.C. — *The Finite Element Method.* 3d expanded and revised ed., McGraw-Hill, London, 1977.

CEDERGREEN, H.R. — *Seepage, Drainage, and Flow Nets.* John Wiley & Sons, 1967.