

MODELO REOLÓGICO DE NEWTON SUJEITO A UMA TENSÃO LINEAR CÍCLICA

A Rheological Newton Model Submitted to a Cycle Linear Stress

por

F. PERES ROFRIGUES *

RESUMO — Estuda-se o modelo de Newton, de largo interesse em Geotecnia, sujeito a uma tensão linear cíclica, verificando-se que o seu comportamento se aproxima do de fluência devido a uma tensão igual a metade da amplitude da tensão linear cíclica, quando o seu período tende para zero e a sua taxa de variação linear tende para infinito (ensaio de fadiga de período muito curto).

SYNOPSIS — The Newton model submitted to a cyclic linear stress is studied, and it is found that its behaviour approaches the one for the creep due to a stress equal to one half of the amplitude, of the cyclic linear stress, when its period tends towards zero, and its linear variation rate tends towards infinite (fatigue test with a very short period).

Como se sabe, o modelo de Newton, também denominado amortecedor, é constituído por um êmbolo que se desloca num cilindro contendo um líquido viscoso (fig. 1) e representa os materiais perfeitamente viscosos ou de Newton.

A sua equação reológica é:

$$d\varepsilon = \frac{\sigma}{K} dt \quad (1)$$

e indica que num intervalo de tempo dt , a extensão ε sofre uma variação $d\varepsilon$ tal que, em cada instante, o valor da tensão normal σ só depende e é proporcional à taxa de variação da extensão no tempo. Assim, a equação reológica (1) pode apresentar a forma:

$$\sigma = K \dot{\varepsilon} = K \frac{d\varepsilon}{dt} \quad (2)$$

sendo K uma constante que depende das características do amortecedor.

Sujeite-se o modelo de Newton a n ciclos lineares iguais de tensão de valor máximo mT e período $2T$, como se indica na fig. 2.

Para o ciclo de ordem n , a tensão crescente, σ_c , será dada pela equação:

$$\sigma_c = m [t - (2n - 2)T] \quad \text{com } n \in [N] \quad (3)$$

sendo $[N]$ o conjunto dos números naturais.

* Investigador pelo LNEC e professor catedrático convidado do IST.

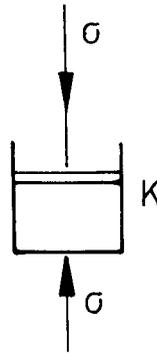


Fig. 1

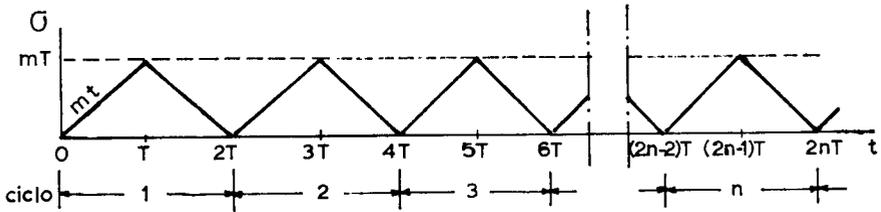


Fig. 2

A tensão decrescente, σ_d , para o mesmo ciclo de ordem n , será dada pela equação:

$$\sigma_d = m[-t + 2nT] \quad \text{com } n \in [N] \quad (4)$$

Os domínios da variável t , são, respectivamente, para a tensão crescente σ_c e para a tensão decrescente σ_d do ciclo de ordem n :

$$(2n-2)T \leq t \leq (2n-1)T \quad (5)$$

e

$$(2n-1)T \leq t \leq 2nT \quad (6)$$

Da equação (1) resulta que a extensão $\varepsilon(t)$ será dada por:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 + \frac{1}{K} \int_{t_0}^t \sigma dt \quad (7)$$

sendo:

ε_0 — extensão sofrida até ao início da tensão crescente ou decrescente.

t_0 — início da tensão crescente ou decrescente.

A substituição em (7) de (3), permite calcular a evolução da extensão, $\varepsilon_c(t)$, durante a tensão crescente, σ_c , do ciclo de ordem n , tendo em consideração o domínio definido em (5):

$$\varepsilon_c(t) = \varepsilon_c[(2n-2)T] + \frac{m}{K} \int_{(2n-2)T}^t [t - (2n-2)T] dt =$$

$$= \varepsilon_c[(2n-2)T] + \frac{mT^2}{K} \left[\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{t}{T} \right)^2 - (2n-2) \frac{t}{T} + 2(n-1)^2 \right] \quad (8)$$

sendo $\varepsilon_c [(2n-2)T]$ a extensão inicial do ramo da tensão crescente do ciclo de ordem n .

A substituição em (7) de (4), permite calcular a evolução da extensão, $\varepsilon_d(t)$, durante a tensão decrescente, σ_d , do ciclo de ordem n , tendo em consideração o domínio definido em (6):

$$\begin{aligned} \varepsilon_d(t) &= \varepsilon_d[(2n-1)T] + \frac{m}{T} \int_{(2n-1)T}^t [-t + 2nT] dt = \\ &= \varepsilon_d[(2n-1)T] + \frac{mT^2}{K} \left[-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{t}{T} \right)^2 + 2n \frac{t}{T} - \frac{1}{2} (4n^2 - 1) \right] \end{aligned} \quad (9)$$

sendo $\varepsilon_d (2n-1)T$ a extensão inicial do ramo da tensão decrescente de ordem n .

Calcule-se a partir da expressão (8) o valor da extensão no fim da tensão crescente, fazendo $t = (2n-1)T$, donde:

$$\varepsilon_c[(2n-1)T] - \varepsilon_c[(2n-2)T] = \frac{mT^2}{2K} \quad (10)$$

Calcule-se a partir da expressão (9) o valor da extensão no fim da tensão decrescente, fazendo $t = 2nT$, donde:

$$\varepsilon_d[2nT] - \varepsilon_d[(2n-1)T] = \frac{mT^2}{2K} \quad (11)$$

As expressões (10) e (11) permitem concluir que: os acréscimos da extensão nos domínios correspondentes à tensão crescente e à tensão decrescente são iguais e independentes da ordem n do ciclo considerado. À mesma conclusão se chegava a partir da análise da expressão (7) que, em face da linearidades da tensão σ , permite concluir que o acréscimo da extensão devido a cada tensão crescente ou decrescente, será dado, à parte a constante K , pela área $\frac{mT^2}{2}$ do triângulo que lhe corresponde (ver fig. 2).

Em face do que se acaba de expôr pode-se inferir que as extensões iniciais das expressões (8) e (9) serão dadas por:

$$\varepsilon_c[(2n-2)T] = \frac{mT^2}{2K} (2n-2) \quad (12)$$

$$\varepsilon_d[(2n-1)T] = \frac{mT^2}{2K} (2n-1) \quad (13)$$

A substituição de (12) em (8) permite obter, finalmente, a evolução da extensão ao longo do domínio (5) correspondente à tensão crescente do ciclo de ordem n :

$$\varepsilon_c(t) = \frac{m T^2}{K} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{t}{T} \right)^2 - 2(n-1) \frac{t}{T} + (n-1)(2n-1) \right] \quad \text{com } n \in [N] \quad (14)$$

De forma idêntica, a substituição de (13) em (9), permite obter a evolução da extensão ao longo do domínio (6) correspondente à tensão decrescente do ciclo de ordem n :

$$\varepsilon_d(t) = \frac{m T^2}{K} \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{t}{T} \right)^2 + 2n \frac{t}{T} - n(2n-1) \right] \quad \text{com } n \in [N] \quad (15)$$

Como verificação as expressões (14) e (15) devem coincidir para $t = (2n-1)T$:

$$\varepsilon_c[(2n-1)T] = \varepsilon_d[(2n-1)T] = \frac{m T^2}{2K} (2n-1) \quad (16)$$

As expressões (14) e (15) representam, cada uma, uma família de parábolas de parâmetro n , a primeira com a concavidade dirigida no sentido dos ε positivos e a segunda com concavidade dirigida no sentido dos ε negativos.

As parábolas homólogas das duas famílias encontram-se, em cada ciclo de ordem n , nos pontos médio de coordenadas genéricas:

$$t = (2n-1)T \quad \rightarrow \quad \varepsilon = \frac{m T^2}{2K} (2n-1) \quad (17)$$

O conjunto destes pontos encontram-se alinhados sobre uma mesma recta passando pela origem das coordenadas. Sejam:

$$\left\{ \begin{array}{l} t_1 = (2n_1-1)T \\ \varepsilon_1 = \frac{m T^2}{2K} (2n_1-1) \end{array} \right. \quad \text{e} \quad \left\{ \begin{array}{l} t_2 = (2n_2-1)T \\ \varepsilon_2 = \frac{m T^2}{2K} (2n_2-1) \end{array} \right. \quad \text{com } n_1 \neq n_2 \quad (18)$$

dois pontos quaisquer do conjunto (17); a recta por eles definida, terá por equação:

$$\frac{\varepsilon - \varepsilon_1}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1} = \frac{t - t_1}{t_2 - t_1} \quad (19)$$

A substituição de (18) em (19) permite escrever, depois de efectuadas as operações convenientes:

$$\varepsilon = \frac{m T^2}{2K} \cdot \frac{t}{T} \quad (20)$$

o que mostra que o lugar geométrico dos pontos (17) é uma recta passando pela origem, como se queria provar.

Verifique-se que nos pontos comuns (17) as duas famílias de parábolas admitem as mesmas tangentes. Para isso basta provar que os coeficientes angulares dessas tangentes são iguais.

Os coeficientes angulares, a , das tangentes às parábolas pertencentes à família (14) são dados por:

$$a = \frac{d\varepsilon_c(t)}{dt} = \frac{m}{K} [t - (2n - 2)T] \quad (21)$$

tomando nos pontos de encontro (17) das parábolas homólogas das duas famílias, o valor particular:

$$a = \frac{mT}{K} \quad (22)$$

igual para o conjunto dos pontos (17), por ser independente do parâmetro n .

De forma idêntica para a família de parábolas (15), se tem:

$$a = \frac{d\varepsilon_d(t)}{dt} = \frac{m}{K} [-t + 2nT] \quad (23)$$

e nos pontos (17), o valor particular:

$$a = \frac{mT}{K} \quad (24)$$

igual para o conjunto dos pontos (17) e igual ao obtido para a família de parábola (14), o que prova a existência de tangentes comuns nos pontos de encontro (17) das parábolas homólogas.

Além dos pontos (17), as duas famílias de parábolas têm de comum, também, os pontos com abcissas iguais às do fim do ciclo de ordem $(n - 1)$ e do início do ciclo de ordem n , isto é,

$$t = (2n - 2)T \left\{ \begin{array}{l} \text{ciclo de ordem } n \text{ para (14)} \\ \text{ciclo de ordem } (n - 1) \text{ para (15)} \end{array} \right\} \rightarrow \varepsilon = \frac{mT^2}{2K} (2n - 2) \quad (25)$$

O conjunto destes pontos pertence à recta definida pelos pontos (17), pois as suas coordenadas verificam a equação da recta (20) o que prova que todos os pontos comuns às duas famílias de parábolas estão alinhados.

Nos pontos de coordenadas (25) as parábolas homólogas admitem tangentes comuns, pois os seus coeficientes angulares são iguais. Assim, de (21) fazendo $t = (2n - 2)T$, resulta:

$$a = 0 \quad (26)$$

e de (21), tendo em atenção (25) substituindo n por $(n - 1)$ e fazendo $t = (2n - 2)T$, tem-se, também:

$$a = 0 \quad (27)$$

o que prova que nos pontos comuns (25) as tangentes são horizontais, como, aliás, seria de prever, dado que os pontos (25) são os vértices de parábolas com o eixo paralelo ao eixo das ordenadas.

Na Fig. 3 encontra-se representadas, as extensões e as tensões em função do tempo em dois sistemas de eixos (ϵ, t) e (σ, t), ortonormados e monométricos, isto é, com graduações iguais indicando-se, em cada um deles, o factor de escala que permite esta circunstância.

Assim para o caso da tensão linear cíclica de período $2T$ e amplitude mT , representou-se não só a linha quebrada das tensões aplicadas ao modelo de Newton, como também, a evolução das extensões daí resultantes ao longo do tempo, constituída pelas duas famílias de parábolas; igualmente se traçou a recta, lugar geométrico dos pontos comuns destas duas famílias.

Esta recta corresponde à extensão por fluência de uma tensão normal constante de valor, $\frac{mT}{2}$ como se pode ver a partir da expressão (7) fazendo $\sigma = \frac{mT}{2}$ e $\epsilon_0 = 0$, e integrando para o intervalo $[0; t]$, o que conduz à recta (20) em causa:

$$\epsilon = \frac{mT}{2K} t$$

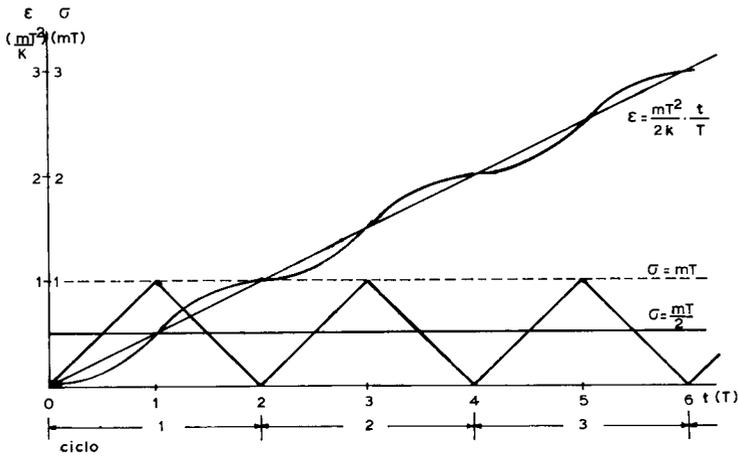


Fig. 3

As áreas, A_e e A_r , limitadas em cada ciclo, pela curva da extensão e pela recta (2) são iguais, pois:

$$A_e = \frac{m}{K} \left\{ \int_{(2n-2)T}^{(2n-1)T} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{t}{T} \right)^2 - (2n-2) \frac{t}{T} + (n-1)(2n-1) \right] dt + \int_{(2n-1)T}^{2nT} \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{t}{T} \right)^2 + 2n \frac{t}{T} - n(2n-1) \right] dt \right\} \quad (28)$$

conduz, depois de efectudas as operações indicadas, a :

$$A_e = \frac{mT^3}{K} \left[\left(n - \frac{5}{6} \right) + \left(n - \frac{1}{6} \right) \right] = \frac{mT^3}{K} (2n - 1) \quad (29)$$

e de (20):

$$A_r = \frac{mT}{K} \left[\frac{1}{2} \int_{(2n-2)T}^{(2n-1)T} t \, dt + \frac{1}{2} \int_{(2n-1)T}^{2nT} t \, dt \right] = \frac{mT^3}{K} \left[\left(n - \frac{3}{4} \right) + \left(n - \frac{1}{4} \right) \right] = \frac{mT^3}{K} (2n - 1) \quad (30)$$

valor idêntico ao obtido em (29).

Se, conservando o valor máximo da tensão ciclica, mT , ou seja, a sua amplitude, se fizer tender o semi-período T para zero, e, portanto, a sua inclinação, m , para infinito, ter-se-à:

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ T \rightarrow 0}} mT &= \sigma_M \end{aligned} \quad (31)$$

A família de parábolas (14) terá, nos pontos médios do seu domínio (5), as coordenadas:

$$t = \left(2n - \frac{3}{2} \right) T \rightarrow \varepsilon_c = \frac{mT}{2K} \left(2n - \frac{7}{4} \right) \quad (32)$$

ou seja:

$$\varepsilon_c = \frac{mT}{2K} \left[\left(2n - \frac{3}{2} \right) T - \frac{1}{4} T \right] \quad (33)$$

mas, atendendo ao valor de t dado por (32), vem:

$$\varepsilon_c = \frac{mT}{2K} \left(t - \frac{1}{4} T \right) \quad (34)$$

aplicando limites, e atendendo a (31), vem:

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ T \rightarrow 0}} \varepsilon_c &= \frac{\sigma_M}{2K} \cdot t \end{aligned} \quad (35)$$

A recta (35), lugar geométrico dos pontos médios de família de parábolas (14) coincide com a recta (20), atendendo a (31), o que prova que as parábolas tendem para a recta comum (20) quando o semi-período T tender para zero.

O mesmo se prova para a família das parábolas (15) correspondente ao ramo decrescente da tensão cíclica. Assim, ter-se-à de (6) e (15):

$$t = \left(2n - \frac{1}{2}\right)T \rightarrow \epsilon_d = \frac{mT}{2K} \left[\left(2n - \frac{1}{2}\right)T + \frac{T}{4} \right] = \frac{mT}{2K} \left(t + \frac{T}{4} \right) \quad (36)$$

aplicando limites, e atendendo a (31):

$$\lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ T \rightarrow 0}} \epsilon_d = \frac{\sigma_M}{2K} \cdot t \quad (37)$$

lugar geométrico coincidente com a recta (34) ou (20).

Do que se acaba de expôr, pode inferir-se:

O efeito num elemento de Newton de uma tensão linear cíclica de valor máximo mT ou σ_M , constante, aproxima-se do efeito de fluência de uma tensão constante igual a metade do valor máximo da tensão linear cíclica, quando o seu período tender para zero e a sua taxa de variação linear para infinito (fig. 4).

A recta (20), que se pode considerar como o limite ou assíntota das duas famílias de parábolas, pode ser expressa pela seguinte equação:

$$\epsilon = km \cdot \frac{T}{k} \cdot \frac{t}{2K} \quad (38)$$

em que k é o factor de redução do período, T , e multiplicativo da taxa de variação linear da tensão, m .

O que se acaba de expôr tem interesse para o caso do estudo da fadiga devida à aplicação de uma tensão cíclica, de período muito curto, desde que o material em causa tenha um comportamento que se aproxime do viscoso perfeito.

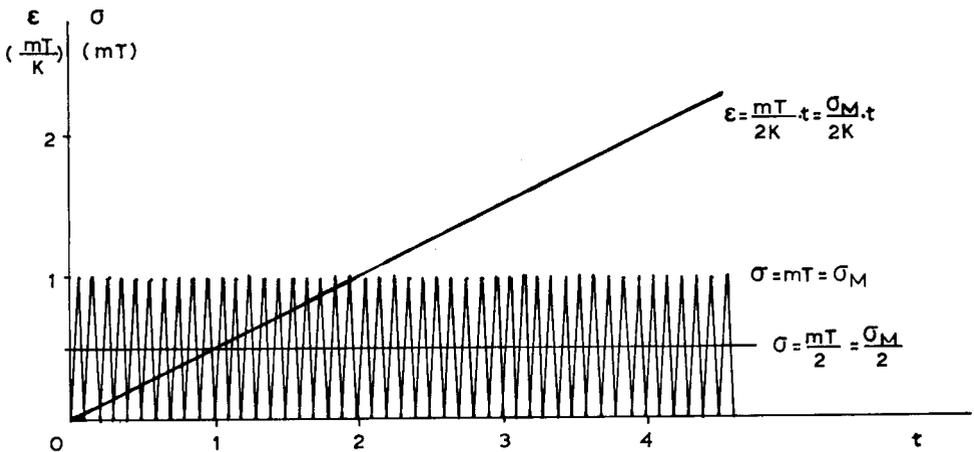


Fig. 4