

MODELO REOLÓGICO DE MAXWELL SUJEITO A UMA TENSÃO LINEAR CÍCLICA

A Rheological Maxwell Model Submitted to a Cycle Linear Stress

por

F. PERES RODRIGUES *

RESUMO — Estuda-se o modelo de Maxwell sujeito a uma tensão linear cíclica de valor máximo, σ_M , verificando-se que o seu comportamento se aproxima de uma vibração, de amplitude igual ao da extensão máxima da mola, em torno de uma recta que corresponde à fluência de uma tensão igual a metade de σ_M , quando o período de tensão cíclica tender para zero.

SYNOPSIS — The Maxwell model submitted to a cyclic linear stress with a maximum value σ_M is studied, being found that its behaviour approaches the one due to a vibration with an amplitude equal to the maximum strain of the spring, almost following the straight line corresponding to the creep under a stress equal to one half of σ_M , when the period of the cyclic stress tends towards zero.

Como se, o modelo de Maxwell, também denominado modelo visco-elástico, é formado pela associação em série de um modelo de Hook e de um modelo de Newton (fig. 1). Na associação em série a extensão sofrida pelo modelo composto é a soma das extensões sofridas pelos modelos associados, e as tensões suportadas pelo modelo composto e pelos modelos associados são iguais.

A equação reológica do modelo de Maxwell é assim, dada por:

$$d\varepsilon = \frac{d\sigma}{E} + \frac{\sigma}{K} dt \quad (1)$$

sendo E e K as constantes do modelo de Hook (mola) e do modelo de Newton (amortecedor), respectivamente; σ a tensão normal aplicada em cada instante dt e $d\varepsilon$ a variação da extensão que lhe corresponde.

Submeta-se o modelo de Maxwell a n ciclos lineares iguais de tensão de valor máximo mT e período $2T$, como se indica na fig. 2.

Como a tensão σ é variável com o tempo, poder-se-á escrever:

$$d\sigma = \frac{d\sigma}{dt} dt \quad (2)$$

que substituindo em (1), permite obter:

$$d\varepsilon = \left(\frac{1}{E} \cdot \frac{d\sigma}{dt} + \frac{\sigma}{K} \right) dt \quad (3)$$

* Investigador pelo LNEC e professor catedrático convidado do IST

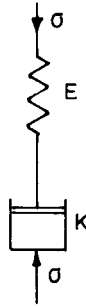


Fig. 1

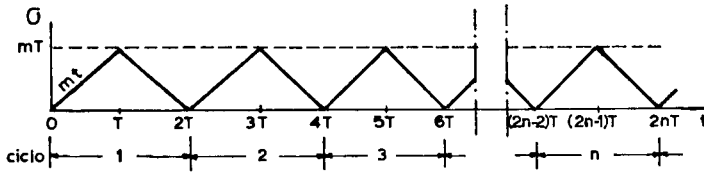


Fig. 2

Para o ciclo de ordem n , a tensão crescente, σ_c , será dada pela expressão:

$$\sigma_c = mT \left[\frac{t}{T} - (2n-2) \right] \quad \text{com } n \in [N] \quad (4)$$

sendo $[N]$ o conjunto dos números naturais.

A tensão decrescente, σ_d , correspondente ao mesmo ciclo de ordem n , será dada pela expressão:

$$\sigma_d = mT \left[-\frac{t}{T} + 2n \right] \quad \text{com } n \in [N] \quad (5)$$

Os domínios da variável t , são, respectivamente, para a tensão crescente, σ_c , e para a tensão decrescente, σ_d , do ciclo de ordem n :

$$(2n-2)T \leq t \leq (2n-1)T \quad (6)$$

e

$$(2n-1)T \leq t \leq 2nT \quad (7)$$

Da equação (3) resulta que a extensão $\varepsilon(t)$ será dada por:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 + \int_{t_0}^t \left(\frac{1}{E} \cdot \frac{d\sigma}{dt} + \frac{\sigma}{K} \right) dt \quad (8)$$

sendo:

- ϵ_0 — extensão sofrida até ao início da tensão crescente ou decrescente;
 t_0 — tempo de início da tensão crescente ou decrescente.

A substituição em (8) de (4), permite calcular a evolução da extensão, $\epsilon_c(t)$, durante a tensão crescente, σ_c , do ciclo de ordem n , tendo em consideração o domínio definido em (6):

$$\begin{aligned}\epsilon_c(t) &= \epsilon_{cl}[(2n-2)T] + mT \int_{(2n-2)T}^t \left\{ \frac{1}{ET} + \frac{1}{K} \left[\frac{t}{T} - (2n-2) \right] \right\} dt = \\ &= \epsilon_c[(2n-2)T] + \frac{mT}{E} \left[\frac{t}{T} - (2n-2) \right] + \frac{mT^2}{K} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{t}{T} \right)^2 - (2n-2) \frac{t}{T} + 2(n-1)^2 \right]\end{aligned}\quad (9)$$

A substituição em (8) de (5), permite calcular a evolução da extensão, $\epsilon_d(t)$, durante a tensão decrescente, σ_d , do ciclo de ordem n , tendo em consideração o domínio definido em (7):

$$\begin{aligned}\epsilon_d(t) &= \epsilon_{dl}[(2n-1)T] + mT \int_{(2n-1)T}^t \left\{ -\frac{1}{ET} + \frac{1}{K} \left[-\frac{t}{T} + 2n \right] \right\} dt = \\ &= \epsilon_d[(2n-1)T] - \frac{mT}{E} \left[\frac{t}{T} - (2n-1) \right] + \frac{mT^2}{K} \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{t}{T} \right)^2 + 2n \frac{t}{T} - \frac{1}{2} (4n^2 - 1) \right]\end{aligned}\quad (10)$$

Calcule-se a partir da expressão (9) o valor da extensão no fim da tensão crescente, fazendo $t = (2n-1)T$, donde:

$$\epsilon_d[(2n-1)T] - \epsilon_c[(2n-2)T] = \frac{mT^2}{K} \left[\frac{K}{ET} + \frac{1}{2} \right]\quad (11)$$

Calcule-se a partir da expressão (10) o valor da extensão no fim, da tensão decrescente, fazendo $t = 2nT$, donde:

$$\epsilon_c[2nT] - \epsilon_d[(2n-1)T] = \frac{mT^2}{K} \left[-\frac{K}{ET} + \frac{1}{2} \right]\quad (12)$$

As expressões (11) e (12) permitem concluir que as variações de extensão nos domínios correspondentes à tensão crescente e à tensão decrescente são constantes e independente da ordem n do ciclo considerado.

Em face desta conclusão pode inferir-se que a extensão inicial $\epsilon_c [(2n - 2) T]$ da expressão (9) é formada por $(n - 1)$ tensões crescentes e $(n - 1)$ tensões decrescentes, que a antecedem no tempo, donde:

$$\epsilon_c[(2n-2)T] = (n-1) \left\{ \frac{mT^2}{K} \left[\frac{K}{ET} + \frac{1}{2} \right] + \frac{mT^2}{K} \left[-\frac{K}{ET} + \frac{1}{2} \right] \right\} = \frac{mT^2}{K} (n-1) \quad (13)$$

e que a extensão inicial $\epsilon_d [(2n - 1) T]$ da expressão (10) é formada por n tensões crescentes e $(n - 1)$ tensões decrescentes, que a antecedem, no tempo, donde:

$$\epsilon_d[(2n-1)T] = n \frac{mT^2}{K} \left[\frac{K}{ET} + \frac{1}{2} \right] + (n-1) \frac{mT^2}{K} \left[-\frac{K}{ET} + \frac{1}{2} \right] = \frac{mT^2}{K} \left[\frac{K}{ET} + \frac{1}{2} (2n-1) \right] \quad (14)$$

A análise das expressões (13) e (14) permite concluir, que no início do ciclo de ordem n a tensão é nula, não influenciando, por isso a extensão inicial $\epsilon_c [(2n - 2) T]$, isto é, esta extensão é independente de E , o que não sucederá com a extensão inicial do ramo de tensão decrescente do ciclo de ordem n , $\epsilon_d [(2n - 1) T]$, pois que no seu início a tensão tem o valor máximo mT .

A substituição de (13) em (9) permite obter, finalmente, a evolução da extensão ao longo do domínio (6) correspondente à tensão linear crescente do ciclo de ordem n :

$$\epsilon_c(t) = \frac{mT^2}{K} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{t}{T} \right)^2 + \left(\frac{K}{ET} - (2n-2) \right) \frac{t}{T} + (n-1) \left[(2n-1) - 2 \frac{K}{ET} \right] \right\} \quad \text{com } n \in [N] \quad (15)$$

De igual forma, a substituição de (14) em (10) permite obter a evolução da extensão ao longo do domínio (7) correspondente à tensão linear decrescente do ciclo de ordem n :

$$\epsilon_d(t) = \frac{mT^2}{K} \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{t}{T} \right)^2 - \left(\frac{K}{ET} - 2n \right) \frac{t}{T} - n \left[(2n-1) - 2 \frac{K}{ET} \right] \right\} \quad \text{com } n \in [N] \quad (16)$$

Como verificação, as expressões (15) e (16) devem ter o mesmo valor para $t = (2n - 1) T$:

$$\epsilon_c[(2n-1)T] = \epsilon_d[(2n-1)T] = \frac{mT^2}{K} \left[\frac{1}{2} (2n-1) + \frac{K}{ET} \right] \quad (17)$$

Esta extensão é constituída por duas parcelas, a primeira devida à extensão do modelo de Newton função da ordem n do ciclo, e a segunda à extensão do modelo de Hook, independentemente da ordem n do ciclo.

As expressões (15) e (16) representam, cada uma, uma família de parábolas de parâmetro n , a primeira família com a concavidade dirigida no sentido dos ϵ positivos e a segunda com a concavidade dirigida no sentido dos ϵ negativos.

As parábolas homólogas das duas famílias encontram-se, em cada ciclo de ordem n , nos pontos médios de coordenadas genéricas (ver expressão 17):

$$t = (2n - 1)T \rightarrow \varepsilon = \frac{mT^2}{K} \left[\frac{1}{2} (2n - 1) + \frac{K}{ET} \right] \quad (18)$$

e, também, nos pontos comuns dos ciclos, genericamente, nos pontos de abcissas iguais às do início do ciclo de ordem n e do fim do ciclo de ordem $(n - 1)$, isto é:

$$t = (2n - 2)T \left\{ \begin{array}{l} \text{ciclo de ordem } n \text{ para (15)} \\ \text{ciclo de ordem } (n - 1) \text{ para (16)} \end{array} \right\} \rightarrow \varepsilon = \frac{mT^2}{K} (n - 1) \quad (19)$$

O conjunto dos pontos (19) são independentes da constante E do modelo de Hook, e coincidem com os obtidos no estudo do modelo de Newton sujeito à mesma solicitação*. Estes pontos estão alinhados como se viu no estudo referido, sobre a recta de equação:

$$\varepsilon = \frac{mT^2}{K} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{t}{T} \quad (20)$$

O conjunto dos pontos (18) encontram-se, também, alinhados sobre uma recta. Sejam:

$$\left\{ \begin{array}{l} t_1 = (2n_1 - 1)T \\ \varepsilon_1 = \frac{mT^2}{K} \left[\frac{1}{2} (2n_1 - 1) + \frac{K}{ET} \right] \end{array} \right. \quad \text{e} \quad \left\{ \begin{array}{l} t_2 = (2n_2 - 1)T \\ \varepsilon_2 = \frac{mT^2}{K} \left[\frac{1}{2} (2n_2 - 1) + \frac{K}{ET} \right] \end{array} \right. \quad (21)$$

dois pontos quaisquer do conjunto (18); a recta, por eles definida, terá por equação:

$$\frac{\varepsilon - \varepsilon_1}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1} = \frac{t - t_1}{t_2 - t_1} \quad (22)$$

A substituição de (21) em (22) permite escrever, depois de efectuadas as operações convenientes:

$$\varepsilon = \frac{mT^2}{K} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{t}{T} + \frac{K}{ET} \right) \quad (23)$$

o que prova que o lugar geométrico dos pontos (18) é uma recta paralela à recta (20), referente ao lugar geométrico dos pontos (19), e tendo como ordenada na origem o valor $\frac{MT}{E}$ (fig. 3, 4 e 5).

* Ver Geotecnia n.º 60. "Modelo reológico de Newton sujeito a uma tensão linear cíclica".

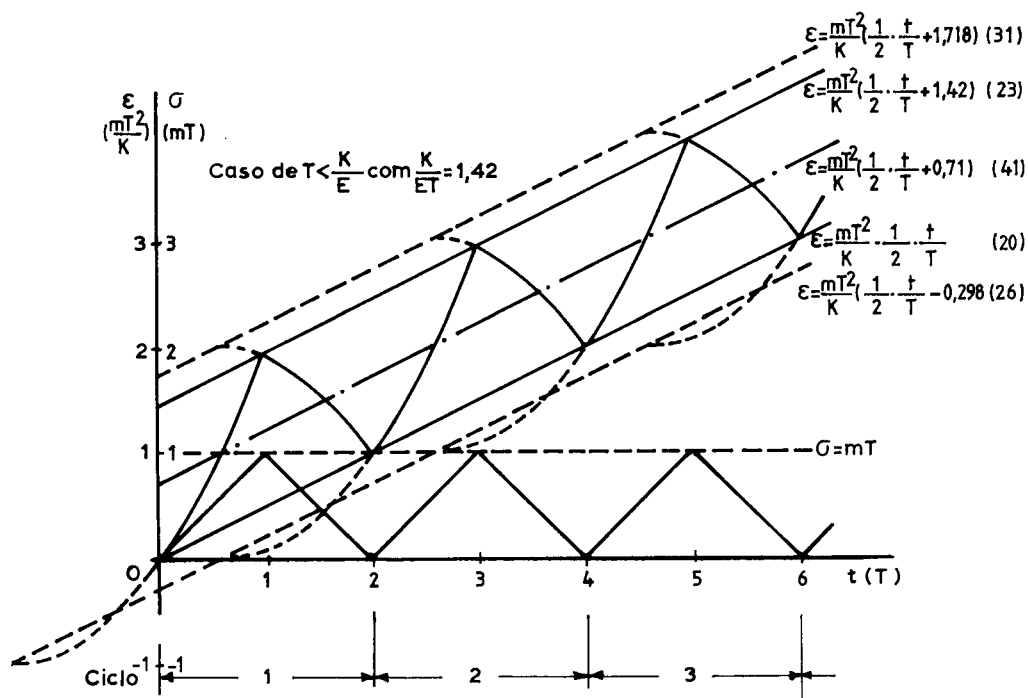


Fig. 3

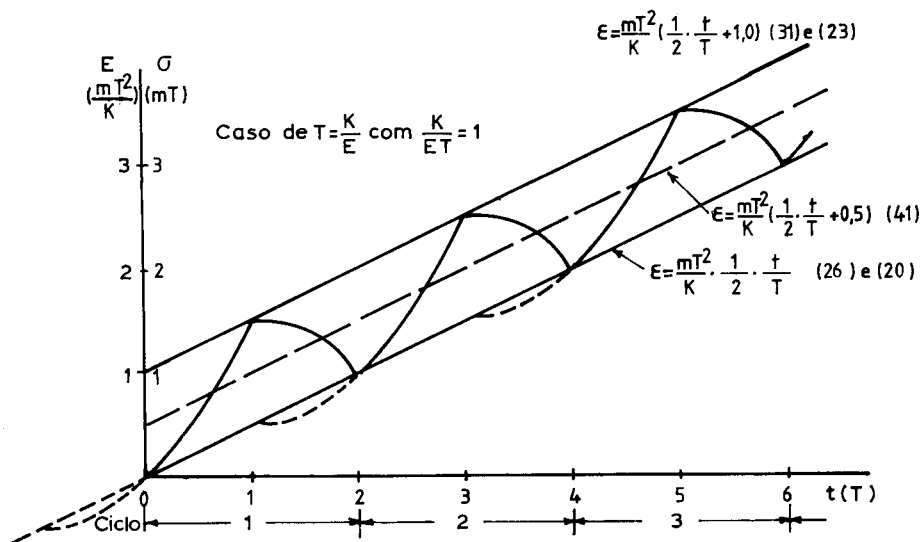


Fig. 4

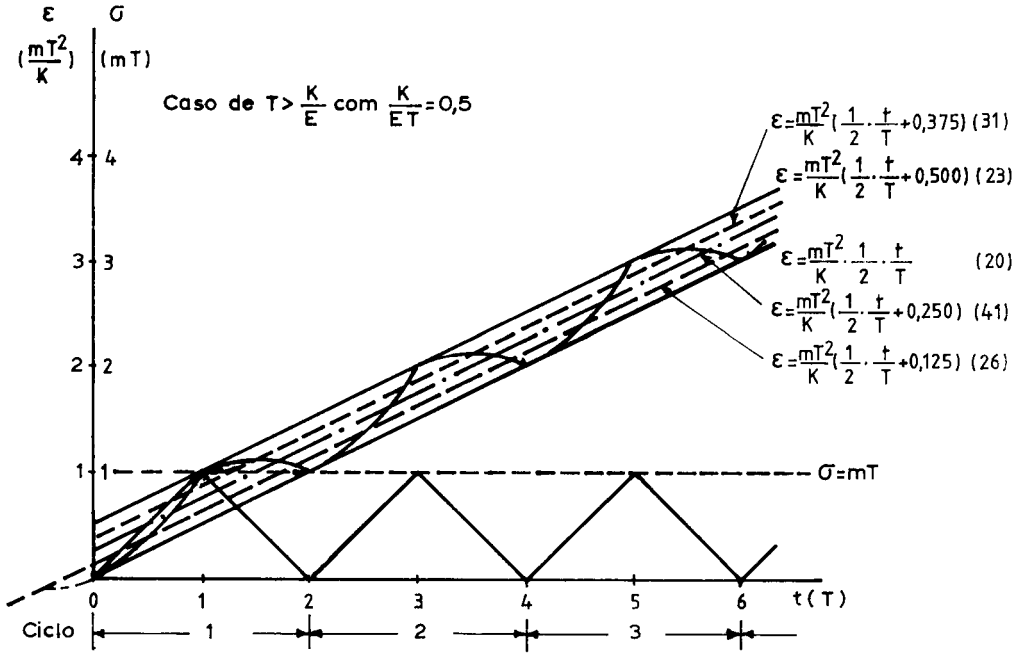


Fig. 5

A família de parábolas (15) de eixos paralelos ao eixo dos ϵ , referentes aos ramos das tensões lineares crescentes, têm como vértices os pontos:

$$\frac{d\epsilon_c}{dt} = 0 \rightarrow t = \left[(2n-2) - \frac{K}{ET} \right] T \quad \epsilon = \frac{mT^2}{K} \left[(n-1) - \frac{1}{2} \left(\frac{K}{ET} \right)^2 \right] \quad (24)$$

Os vértices das parábolas das famílias encontram-se fora do seu domínio (6) e tenderão para o início deste domínio, quando a rigidez da mola tender para infinito, isto é, quando o modelo de Maxwell tender para o modelo de Newton.

Verifica-se que os vértices dados por (24) se encontram alinhados sobre uma recta. Sejam:

$$\left\{ \begin{array}{l} t_1 = \left[(2n_1-2) - \frac{K}{ET} \right] T \\ \epsilon_1 = \frac{mT^2}{K} \left[(n_1-1) - \frac{1}{2} \left(\frac{K}{ET} \right)^2 \right] \end{array} \right. \quad e \quad \left\{ \begin{array}{l} t_2 = \left[(2n_2-2) - \frac{K}{ET} \right] T \\ \epsilon_2 = \frac{mT^2}{K} \left[(n_2-1) - \frac{1}{2} \left(\frac{K}{ET} \right)^2 \right] \end{array} \right. \quad (25)$$

dois vértices quaisquer do conjunto (24); a substituição de (25) na equação da recta (22) permite escrever, depois de efectuadas as operações convenientes:

$$\epsilon = \frac{mT^2}{K} \cdot \frac{1}{2} \left[\frac{t}{T} - \frac{K}{ET} \left(\frac{K}{ET} - 1 \right) \right] \quad (26)$$

A recta (26) encontrada é paralela às rectas (20) e (23), e relativamente à primeira, que passa pela origem, situa-se:

$$\begin{array}{lll}
 \text{abaixo, se} & T < \frac{K}{E} & (\text{fig. 3}) \\
 \text{coincide, se} & T = \frac{K}{E} & (\text{fig. 4}) \\
 \text{acima, se} & T > \frac{K}{E} & (\text{fig. 5})
 \end{array} \quad (27)$$

As parábolas da família (16) de eixos paralelos ao eixo dos ϵ , referentes aos ramos das tensões decrescentes, têm como vértice os pontos:

$$\frac{d\epsilon_d}{dt} = 0 \rightarrow t = \left(2n - \frac{K}{ET}\right)T \quad \epsilon = \frac{mT^2}{K} \left[n + \frac{1}{2} \left(\frac{K}{ET} \right)^2 \right] \quad (28)$$

Os vértices destas parábolas encontram-se relativamente ao domínio (7) a que pertencem os seus ramos de tensões decrescentes:

$$\begin{array}{lll}
 \text{fora, se} & T < \frac{K}{E} & (\text{fig. 3}) \\
 \text{no início, se} & T = \frac{K}{E} & (\text{fig. 4}) \\
 \text{dentro, se} & T > \frac{K}{E} & (\text{fig. 5})
 \end{array} \quad (29)$$

e tendem para o fim do domínio se o módulo de elasticidade, E , do modelo de Hook tender para infinito, isto é, se o modelo de Maxwell se particularizar no modelo de Newton.

Verifica-se que os vértices (28) se encontram alinhados sobre uma recta. Sejam:

$$\left(\begin{array}{l} t_1 = \left(2n_1 - \frac{K}{ET}\right)T \\ \epsilon_1 = \frac{mT^2}{K} \left[n_1 + \frac{1}{2} \left(\frac{K}{ET} \right)^2 \right] \end{array} \right) \quad \text{e} \quad \left(\begin{array}{l} t_2 = \left(2n_2 - \frac{K}{ET}\right)T \\ \epsilon_2 = \frac{mT^2}{K} \left[n_2 + \frac{1}{2} \left(\frac{K}{ET} \right)^2 \right] \end{array} \right) \quad (30)$$

dois vértices quaisquer do conjunto (28); a substituição de (30) na recta de equação genérica (22) permite escrever, depois de efectuadas as operações convenientes:

$$\epsilon = \frac{mT^2}{K} \cdot \frac{1}{2} \left[\frac{t}{T} + \frac{K}{ET} \left(\frac{K}{ET} - 1 \right) \right] \quad (31)$$

À recta (31) é paralela às rectas (20), (23) e (26) atrás definidas, e situa-se relativamente à recta (23):

$$\begin{array}{lll}
 \text{acima, se} & T < \frac{K}{E} & (\text{fig. 3}) \\
 \text{coincide, se} & T = \frac{K}{E} & (\text{fig. 4}) \\
 \text{abaixo, se} & T > \frac{K}{E} & (\text{fig. 5})
 \end{array} \tag{31 a}$$

As parábolas homólogas das duas famílias, não admitem as mesmas tangentes nos pontos comuns (18); como verificação basta provar que os coeficientes angulares, a , dessas tangentes são diferentes. Os coeficientes angulares das tangentes às parábolas pertencentes à família (15) são dados por:

$$a = \frac{d\varepsilon_c(t)}{dt} = \frac{mT}{K} \left[\frac{t}{T} + \frac{K}{E} - (2n - 2) \right] \tag{32}$$

tomando nos pontos de encontro (18) o valor particular:

$$a = \frac{mT}{K} \left(1 + \frac{K}{ET} \right) \tag{33}$$

igual para o conjunto de pontos (18), como pertencentes à família de parábolas (15), por o seu valor ser independente do parâmetro n .

De forma idêntica para a família de parábolas (16), se tem:

$$a = \frac{d\varepsilon_d(t)}{dt} = \frac{mT}{K} \left[-\frac{t}{T} - \frac{K}{E} + 2n \right] \tag{34}$$

e nos pontos (18), o valor particular:

$$a = \frac{mT}{K} \left(1 - \frac{K}{ET} \right) \tag{35}$$

igual para o conjunto de pontos (18), como pertencentes à família de parábolas (16), mas diferente do encontrado em (33), que só coincidirá quando o modelo de Maxwell se particularizar no modelo de Newton, tomando então o valor comum ($E \rightarrow \infty$):

$$a = \frac{mT}{K} \tag{36}$$

Igualmente, nos pontos comuns (19), as duas famílias de parábolas têm tangentes diferentes; para a família de parábolas (15), os coeficientes angulares apresentam, tendo em consideração (32) e (19), o valor particular:

$$a = \frac{mT}{K} \left(1 + \frac{K}{ET} \right) \tag{37}$$

diferente do apresentado para a família de parábolas (16) que tendo em consideração (33) e (19), assume o valor particular:

$$a = \frac{mT}{K} \left(1 - \frac{K}{ET} \right) \quad (38)$$

Os coeficientes angulares (37) e (38) só coincidirão quando o modelo de Maxwell se particularizar no modelo de Newton, como sucedia para o caso dos coeficientes angulares das tangentes referentes aos pontos comuns (18).

Assim, se conclui, que os pontos comuns (18) e (19) às parábolas homólogas das famílias (15) e (16), por admitirem tangentes distintas, à esquerda e à direita, se classificam como pontos angulosos (fig. 3, 4 e 5).

As fig. 3, 4 e 5 encontram-se referidas a dois sistemas de eixos coincidentes (ϵ, t) e (σ, t), ortonormados e monométricos, portanto com graduações iguais, indicando-se, em cada uma delas, o factor de escala que permite este propósito: as extensões e as tensões em função do tempo.

Assim, no diagrama (σ, t) representam-se os três primeiros ciclos lineares de tensão e o lugar geométrico dos valores máximos das tensões existentes na recta $\sigma = mT$.

No diagrama (σ, t) encontram-se representados os lugares geométricos dos pontos comuns (19), recta (20), dos pontos comuns (18), recta (23), dos vértices das parábolas pertencentes à família (15), recta (26), dos vértices das parábolas pertencentes à família (16), recta (31), a curva de evolução da extensão sofrida pelo modelo de Maxwell nos três ciclos representados, e finalmente, a recta intermédia (41) das rectas (20) e (23).

A área, A_e , limitada, no ciclo de ordem n , pela curva da extensão e pelo eixo dos t , tendo em consideração as expressões (15) e (16), é dada por:

$$A_e = \frac{mT^2}{K} \int_{(2n-2)T}^{(2n-1)T} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{t}{T} \right)^2 + \left[\frac{K}{ET} - (2n-2) \right] \frac{t}{T} + (n-1) \left[(2n-1) - 2 \frac{K}{ET} \right] \right\} dt +$$

$$+ \frac{mT^2}{K} \int_{(2n-1)T}^{2nT} \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{t}{T} \right)^2 - \left(\frac{K}{ET} - 2n \right) \frac{t}{T} - n \left[(2n-1) - 2 \frac{K}{ET} \right] \right\} dt \quad (39)$$

a qual, depois de efectuadas as operações indicadas, conduz a:

$$A_e = \frac{mT^3}{K} \left\{ \left[\left(n - \frac{5}{6} \right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{K}{ET} \right] + \left[\left(n - \frac{1}{6} \right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{K}{ET} \right] \right\} = \frac{mT^3}{K} \left[(2n-1) + \frac{K}{ET} \right] \quad (40)$$

correspondendo a 1.^a parcela da expressão intermédia ao ramo crescente e a 2.^a parcela ao decrescente.

Calcule-se a área, A_r , limitada pela recta intermédia das rectas (20) e (23) e pelo eixo dos t , no domínio do ciclo de ordem n . A recta intermédia, tendo em atenção (20) e (23), tem por equação:

$$\varepsilon = \frac{mT^2}{K} \cdot \frac{1}{2} \left[\frac{t}{T} + \frac{K}{ET} \right] \quad (41)$$

logo, a área será, atendendo a (6) e (7):

$$A_r = \frac{mT^2}{K} \cdot \frac{1}{2} \left\{ \int_{2(n-2)T}^{(2n-1)T} \left(\frac{t}{T} + \frac{K}{ET} \right) dt + \int_{2(n-1)T}^{2nT} \left(\frac{t}{T} + \frac{K}{ET} \right) dt \right\} \quad (42)$$

que conduz a:

$$A_r = \frac{mT^3}{K} \left\{ \left[\left(n - \frac{3}{4} \right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{K}{ET} \right] + \left[\left(n - \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{K}{ET} \right] \right\} = \frac{mT^3}{K} \left[\left(2n - 1 \right) + \frac{K}{ET} \right] \quad (43)$$

correspondendo a 1.^a parcela da expressão intermédia ao ramo crescente e a 2.^a parcela ao ramo decrescente.

As áreas A_e e A_r são iguais o que prova que a curva das extensões oscila em torno da recta (41).

As diferenças entre as 1. as parcelas, Δ_1 , e entre as 2.as parcelas, Δ_2 , das áreas A_e e A_r , são iguais em módulo, tendo por valor:

$$\Delta_1 = \Delta_2 = \frac{1}{12} \cdot \frac{mT^3}{K} \quad (44)$$

independente do módulo de elasticidade, E , da mola.

Se, conservando o valor máximo da tensão cíclica, mT , isto é a sua amplitude, σ_M , se fizer tender o semi-período T para zero, e, portanto, a sua inclinação, m , para infinito, ter-se-á:

$$\lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ T \rightarrow 0}} mT = \sigma_N \quad (45)$$

A família de parábolas (15), terá, nos pontos médios do seu domínio (6), as coordenadas genéricas:

$$t = \left(2n - \frac{3}{2} \right) T \rightarrow \varepsilon_c = \frac{mT}{2K} \left[\left(2n - \frac{7}{4} \right) T + \frac{K}{E} \right] \quad (46)$$

O ponto médio do segmento da recta genérica definido pelos pontos extremos (18) e (19) das parábolas correspondentes ao ramo de tensão crescente do ciclo de ordem n , tem por coordenadas:

$$t = \left(2n - \frac{3}{2}\right)T \rightarrow \varepsilon_c = \frac{mT}{2K} \left[\left(2n - 2\right)T + \frac{K}{E} \right] \quad (47)$$

A diferença de ordenadas, $\Delta \varepsilon_c$, entre (46) e (47), para a mesma abcissa t , tende para zero com T , atendendo a (45) tem-se:

$$\lim_{T \rightarrow 0} \Delta \varepsilon_c = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{mT}{2K} \cdot \frac{1}{4}T = \frac{\sigma_M}{8K} \lim_{T \rightarrow 0} T = 0 \quad (48)$$

o que prova que a família de parábolas (15) se particulariza numa família de rectas quando T tende para zero, e que o lugar geométrico dos pontos médios desta família, se obtém-se, a partir de (46):

$$\lim_{T \rightarrow 0} \varepsilon_c = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{mT}{2K} \left[\left(2n - \frac{7}{4}\right)T + \frac{K}{E} \right] = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{mT}{2K} \left[\left(2n - \frac{3}{2}\right)T - \frac{1}{4}T + \frac{K}{E} \right] = \frac{\sigma_M}{2K} \left(t + \frac{K}{E} \right) \quad (49)$$

ou, a partir de (47):

$$\lim_{T \rightarrow 0} \varepsilon_c = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{mT}{2K} \left[\left(2n - 2\right)T + \frac{K}{E} \right] = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{mT}{2K} \left[\left(2n - \frac{3}{2}\right)T - \frac{1}{2}T + \frac{K}{E} \right] = \frac{\sigma_M}{2K} \left(t + \frac{K}{E} \right) \quad (50)$$

As rectas (49) e (50) encontradas coincidem e representam a recta média das rectas paralelas (20 e (23) identificando-se, assim, com a recta (41).

Raciocínio idêntico permite concluir que a família de parábolas (16), se particulariza numa família de rectas, cujos pontos correspondentes ao valor médio do domínio genérico (7), formam um lugar geométrico que se identifica, também, com a recta (50) ou (41).

Neste caso, as duas famílias de parábolas (15) e (16) degeneram ou particularizam-se numa linha quebrada limitada superior e inferiormente pelas rectas (23) e (20), respectivamente, sendo a sua amplitude, A , dada pelo limite da diferença de ordenadas correspondentes à mesma abcissa, quando o semi-período T tendo para zero, tendo em consideração (45):

$$A = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{mT}{K} \left(\frac{1}{2}t + \frac{K}{E} - \frac{1}{2}t \right) = \frac{\sigma_M}{E} = \frac{\sigma_M}{K} \cdot \frac{K}{E} \quad (51)$$

o que mostra que a amplitude corresponde à extensão máxima do modelo de Hook (mola), ou seja, da componente elástica do modelo de Maxwell.

Na fig. 6 encontra-se representado, duma maneira genérica, o que se acaba de expor:

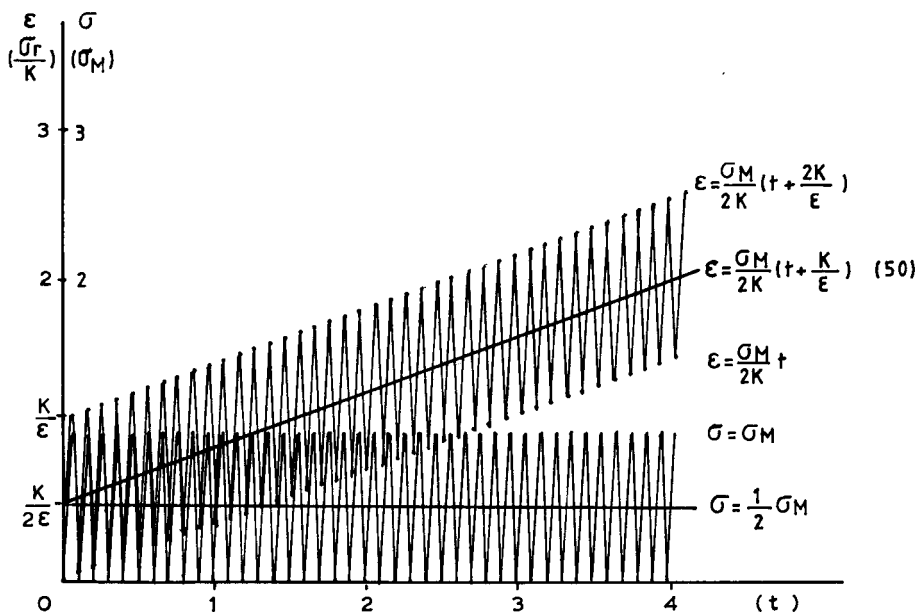


Fig. 6

podendo afirmar que:

O efeito num modelo de Maxwell de uma tensão linear cíclica de valor máximo, σ_M , (acção dinâmica), aproxima-se de uma vibração, de amplitude igual ao da extensão máxima da mola, em torno de uma recta que corresponde à fluência de uma tensão igual a metade de σ_M , quando o período da tensão cíclica tender para zero.

Esta conclusão mostra que a acção vibratória é devida unicamente à componente elástica do modelo de Maxwell (mola) e que a ruína do material poderá ocorrer por deformação excessiva, ou por rotura, sobretudo, quando a frequência de vibração se aproximar da frequência própria do material, levando ao aparecimento do fenómeno da ressonância.

O modelo de Maxwell apresenta dois casos limites em relação às características dos elementos que o constituem. Um dos casos diz respeito ao valor do módulo de elasticidade, E , do elemento de Hook tender para infinito, isto é, este elemento perder a sua elasticidade tornando-se rígido, o que faz com que o modelo de Maxwell degenera ou se particularize no modelo de Newton. Relativamente aos elementos geométricos aqui apresentados, é de salientar que as cinco rectas (41), (31), (26), (23) e (20) tendem para a recta (20), desaparecendo, assim, a extensão vibratória, e que os pontos angulosos (18) e (19) tendem para pontos normais com uma única tangente.

O outro caso diz respeito ao valor da constante K do elemento de Newton tender para infinito o que faz com que o modelo de Maxwell degenera ou se particularize no modelo de Hook. A expressão (15), atendendo a (4), tenderá para:

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \varepsilon_c(t) = \frac{mT}{E} \left[\frac{t}{T} - (2n-2) \right] = \frac{\sigma_c}{E} \quad (52)$$

a expressão (16), atendendo a (5), tenderá para:

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \varepsilon_d(t) = \frac{mT}{E} \left[-\frac{t}{T} + 2n \right] = \frac{\sigma_d}{E} \quad (53)$$

os dois valores encontrados (52) e (53) mostram que as extensões, resultantes da aplicação de tensão cíclica, seguem a lei de Hook, tendo um diagrama semelhante ao da tensão.

O que se acaba de expôr tem interesse para o estudo dinâmico da fadiga e da vibração, devido à aplicação de uma tensão linear cíclica, de período muito curto, desde que o material em causa tenha um comportamento que se aproxime do visco-elástico, além de contribuir para um melhor conhecimento das propriedades do modelo de Maxwell.