

# EXPANSÃO RADIAL DE CAVIDADES CILÍNDRICAS EM MEIOS ARENOSOS: APLICAÇÃO AO ENSAIO PRESSIOMÉTRICO

Radial expansion of cylindrical cavities in sandy soils: application to pressuremeter test

por

António Gabriel F. de Sousa Coutinho\*

RESUMO — Apresenta-se uma solução do problema da expansão radial de uma cavidade cilíndrica em meio arenoso baseada num modelo reológico rígido-plástico mas não perfeitamente-plástico e válido mesmo para grandes deformações (deformações finitas). Faz-se a sua aplicação ao ensaio pressiométrico utilizando o princípio da semelhança entre cavidades cilíndricas e a técnica numérica já utilizada pelo autor para resolver a equação de Palmer. Apresentam-se dois exemplos de aplicação. Verifica-se que a solução proposta — implementada no programa ANABELA II — permite obter a curva dos ângulos de atrito mobilizados a cada nível de deformação induzido pelo ensaio. Mostra-se a influência das deformações volumétricas associadas ao corte bem como as diferenças nas curvas dos ângulos de atrito mobilizados quando são utilizadas as deformações finitas ou as deformações infinitesimais. Finalmente, discute-se o valor do ângulo de atrito mobilizado no estado crítico. Faz-se uma tentativa para calcular o seu valor, utilizando a teoria exposta.

SYNOPSIS — A solution for radial expansion of cylindrical cavities in sandy soils is presented. This solution is founded in a rigid-plastic model, but not perfectly-plastic, and it is valid even for large deformations (finite strains). Its application to pressuremeter test is made using the similarity principle among cylindrical cavities together with a numerical/graphical technique to solve Palmer's equation, already published by the author. Two examples are presented. The computations are made by program ANABELA II. It is verified that this solution allows to obtain the curve of the mobilized friction angles at each step of the test deformation. The importance of knowing the volumetric deformations associated to the shear is showed, as well as the differences in the mobilized friction angles curves, when finite or infinitesimal strains are used. Finally, it is discussed the value of the mobilized angle at the critical voids ratio. An attempt to compute its value, using the presented theory, is made.

## 1 — INTRODUÇÃO

A interpretação de ensaios pressiométricos em areias tem sido feita, até à data, admitindo que o solo exibe um comportamento reológico elástico (linear) perfeitamente plástico. Os primeiros modelos (Ménard, 1957; Cassan, 1960; Gibson e Anderson, 1961) admitiam que o solo na fase elástica obedecia à lei de Hook e após a rotura ter sido induzida a sua deformação processar-se-ia a volume constante e segundo o critério de Mohr-Coulomb. A evidência experi-

\* Assistente de Investigação do LNEC.

mental de variações volumétricas associadas ao corte em solos arenosos — designadas por dilatância — mostrou a necessidade de os modelos de interpretação de ensaios pressiométricos realizados neste tipo de solos incluírem uma descrição daquele fenómeno. Várias tentativas foram sendo feitas (Ladanyi, 1961, 1963; Vesic, 1972; Wroth e Windle, 1975) mas foi a proposta de Hughes, Wroth e Windle (1977) que se impôs quer pela sua simplicidade quer pela sua objectividade. O modelo reológico preconizado por estes autores incorpora as deformações volumétricas plásticas admitindo que o solo exibe uma certa taxa de dilatância. Em detalhe, admitia-se que após uma fase inicial com comportamento elástico-linear, a rotura era atingida segundo o critério de Mohr-Coulomb. Na fase plástica o solo deformar-se-ia a uma razão constante entre as tensões efectivas principais mas exibindo uma certa taxa de dilatância. Tal taxa de dilatância era considerada constante e estava relacionada com o critério de rotura pela lei de fluxo da Teoria da Dilatância de Rowe (1962, 1971). Esta análise considera, pois, que quer o ângulo de atrito que o ângulo de dilatância são constantes uma vez atingida a rotura. Para além destas limitações, a sua formulação é apenas válida admitindo a hipótese de pequenas deformações. Não obstante as objecções acabadas de descrever, tem sido a única análise sistematicamente utilizada na avaliação do ângulo de atrito em areias a partir do ensaio pressiométrico. De referir ainda as verificações a que tem sido sujeita em laboratório com resultados satisfatórios (Jewell, Fahey e Wroth, 1980; Fahey, 1986).

Mais recentemente, Carter, Booker e Yeung (1986) apresentaram um trabalho que, com o conhecimento do autor, é a única análise da expansão radial de uma cavidade cilíndrica em meio friccional que admite, após o início da cedência, a simultaneidade de deformações elásticas e deformações plásticas tal que  $Def^{tot} = Def^{elast} + Def^{plast}$ , embora esta análise assumia serem constantes quer o ângulo de atrito quer a taxa de dilatância, esta última descrita à custa de um ângulo de dilatância. No entanto, a solução de Carter *et al.* é difícil de ser aplicada à interpretação de ensaios pressiométricos. Porém, a discussão detalhada deste assunto sai do âmbito do presente trabalho.

A hipótese da plasticidade perfeita pós-rotura, que todos os modelos têm pressuposto, implica que seja considerado constante o ângulo de atrito da areia. No trabalho que se segue apresentar-se-á uma hipótese de interpretação de ensaios pressiométricos em areias assumindo para o solo um comportamento rígido-plástico, mas não perfeitamente-plástico, válida mesmo para grandes deformações. Na prática, este modelo despreza as deformações elásticas assumindo que toda e qualquer deformação é deformação plástica. Com este modelo torna-se possível determinar o ângulo de atrito bem como as deformações volumétricas a cada nível de deformação a que tenha sido levado o ensaio pressiométrico (Sousa Coutinho, 1987b).

## 2 — BASES TEÓRICAS

### 2.1 — Equações básicas

A teoria básica de expansão radial de uma cavidade cilíndrica aplicada à interpretação de ensaios pressiométricos foi recentemente abordada (Sousa Coutinho, 1987a) tendo sido de-

monstradas todas as equações básicas. Sendo necessário utilizar algumas das equações então deduzidas, estas são seguidamente apresentadas embora sem qualquer demonstração; a simbologia aqui utilizada é exactamente a mesma que foi empregada no referido trabalho. Apenas será necessário introduzir uma nova variável, cuja definição será dada no final do parágrafo, e uma nova equação.

— Definição de deslocamento de um ponto:

$$\rho = r + u \quad (1)$$

— Equação de equilíbrio:

$$\frac{d\sigma_r}{d\rho} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{\rho} = 0 \quad (2)$$

— Relações entre extensões e deslocamentos:

$$\epsilon_r = \frac{du}{dr} \quad (3)$$

$$\epsilon_\theta = \frac{u}{r} \quad (4)$$

— Definição de deformação volumétrica,  $\mu$ :

$$(1 + \mu) = (1 + \epsilon_\theta) (1 + \epsilon_r) \quad (5)$$

— Condições limite: na parede da cavidade, a extensão circunferencial é conhecida e designa-se por  $\epsilon_0$  ( $\epsilon_\theta = \epsilon_0$ ). De igual modo, as tensões radiais identificam-se com as pressões aplicadas,  $\psi$  ( $\sigma_r = \psi$ ).

Expressões exactas para as deformações podem ser calculadas directamente a partir da Mecânica dos Meios Contínuos (Sousa Coutinho, 1988a). Tais expressões podem ter como estado de referência quer o estado inicial (o tensor das deformações de Green e St. Venant)<sup>1</sup> quer o estado deformado (o tensor das deformações de Almansi e Hamel)<sup>1</sup> mas neste trabalho apenas as deformações de Almansi serão usadas, uma vez que a equação de equilíbrio tem como referência o estado deformado. Quando a teoria das deformações infinitesimais é aplicável, não faz sentido distinguir os dois estados, o inicial e o final. Nesse caso, as equações (3) e (4), que definem as extensões, definem também as deformações as quais são as chamadas defor-

---

<sup>1</sup> Ver Fung (1965).

mações de Cauchy. As deformações de Almansi são dadas por (ver Baguelin *et al.*, 1978 ou Sousa Coutinho, 1988a):

— Deformação radial:

$$\sigma_r = \frac{1}{2} \frac{(d\rho)^2 - (dr)^2}{(d\rho)^2} \quad (6)$$

— Deformação circunferencial:

$$\alpha_\theta = \frac{1}{2} \frac{\rho^2 - r^2}{\rho} \quad (7)$$

A relação entre as extensões,  $\epsilon$ , (ou deformações de Cauchy) e as deformações de Almansi,  $\alpha$ , é:

$$1 - 2\alpha = (1 + \epsilon)^{-2} \quad (8)$$

Como as deformações de Almansi têm como estado de referência o estado deformado é mais conveniente usar uma definição de deformação volumétrica,  $\Lambda$ , que tenha como referência o estado deformado (Baguelin *et al.*, 1978):

$$1 - \Lambda = \frac{1}{1 + \mu} \quad (9)$$

Em termos de deformações de Almansi, combinando as equações (5) e (8) com a equação (9), tem-se:

$$(1 - \Lambda)^2 = (1 - 2\alpha_\theta) (1 - 2\alpha_r) \quad (10)$$

A equação diferencial generalizada entre deformações e deslocamentos pode ser determinada após a manipulação apropriada das equações (7) e (9):

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{d\alpha_\theta}{\Lambda - 2\alpha_\theta} \quad (11)$$

A introdução da expressão anterior na equação de equilíbrio (2) conduz à equação diferencial que relaciona o campo de tensões com o campo de deformações em qualquer ponto de um meio ilimitado onde uma cavidade cilíndrica de comprimento infinito esteja a ser radialmente expandida:

$$\frac{d\sigma_r}{\sigma_r - \sigma_\theta} + \frac{d\alpha_\theta}{\Lambda - 2\alpha_\theta} = 0 \quad (12)$$

## 2.2 — O princípio da semelhança entre cavidades cilíndricas

Um princípio físico necessário para o desenvolvimento do trabalho é o princípio da semelhança entre cavidades cilíndricas expandidas a partir de um raio inicial nulo. Esta técnica foi utilizada por Nadai (1931) e por Hill (1950) mas foi Ladanyi (1961, 1963, 1972) quem se apercebeu das suas possibilidades e a desenvolveu até às últimas consequências.

Essencialmente, o método consiste em considerar o meio infinito como um conjunto de cilindros de parede fina, todos eles concêntricos em relação a um eixo e obedecendo à mesma lei de tensões-deformações. Começando a expandir uma cavidade cilíndrica a partir de um raio nulo, e cujo eixo de revolução é o mesmo dos cilindros de parede fina, cada um dos cilindros irá sendo deformado segundo a curva tensões-deformações. Em cada nível de expansão da cavidade cilíndrica cada um dos cilindros de parede fina estará deformado até um determinado ponto em obediência à curva tensão-deformação. Por outro lado, devido ao tipo de simetria do problema, a curva pressão-expansão da cavidade pode ser deduzida directamente a partir de uma solução que forneça o campo de tensões e o campo de deformações em volta da cavidade (expandida a partir de um raio inicial nulo). Isto é possível porque apenas actuam tensões radiais na superfície de cada um dos cilindros concêntricos e, deste modo, qualquer das superfícies pode ser considerada como a parede de uma cavidade que atingiu um certo raio, igual ao deslocamento radial da superfície do cilindro devido ao incremento de pressão desde zero até um certo valor  $\sigma_r$ . Nestas condições para estudar a expansão radial de uma cavidade cilíndrica, bastará estudar o que se passa na parede da cavidade uma vez que as tensões radiais nessa superfície identificam-se com as pressões aplicadas, de tal forma que, existindo uma função  $\Omega$  que relacione  $\sigma_r$  com  $\alpha_0$

$$\sigma_r = \Omega (\alpha_0) \quad (13)$$

ter-se-á igualmente

$$\psi = \Omega (\alpha_0). \quad (14)$$

Os valores das pressões aplicadas e das expansões induzidas são lidos directamente pelos pressiómetros.

## 3 — COMPORTAMENTO REOLÓGICO PROPOSTO

### 3.1 — Formulação geral do problema

Considere-se que o meio infinito envolvente da cavidade cilíndrica é um meio granular e puramente friccional. Não havendo acréscimos de pressão intersticial resultante da expansão

radial da referida cavidade num solo com aquelas características, a equação (12) será satisfeita também em termos de tensões efectivas:

$$\frac{d\sigma'_r}{\sigma'_r - \sigma'_\theta} + \frac{d\alpha_\theta}{\Lambda - 2\alpha_\theta} = 0. \quad (15)$$

A equação (15) evidencia que são necessárias duas equações reológicas que não introduzam novas variáveis para resolver o problema. Sejam tais equações

$$\sigma'_\theta = g(\sigma'_r) \quad (16)$$

e

$$\Lambda = f(\alpha_\theta). \quad (17)$$

As equações (16) e (17) estarão relacionadas por uma lei de fluxo do tipo:

$$H[G(\sigma'_r, \sigma'_\theta), F(\Lambda, \alpha_\theta)] = 0. \quad (18)$$

Substituindo (16) e (17) em (15) e (18) obtém-se:

$$\frac{d\sigma'_r}{\sigma'_r - g(\sigma'_r)} + \frac{d\alpha_\theta}{f(\alpha_\theta) - 2\alpha_\theta} = 0 \quad (19)$$

$$H[G(\sigma'_r, g(\sigma'_r)), F(f(\alpha_\theta), \alpha_\theta)] = 0. \quad (20)$$

As equações (19) e (20) fornecerão a solução do problema.

### 3.2 — A primeira hipótese reológica

De acordo com o princípio expresso no parágrafo 2.2, admita-se que o meio infinito é constituído por um conjunto de cilindros de parede fina concêntricos tal que, como se ilustra na figura 1, para um cilindro situado entre as distâncias radiais  $\rho_i$  e  $\rho_{i+1}$ , o ângulo de atrito mobilizado

$$\phi'_{ii+1} = \arcsen \frac{\left(\frac{\sigma'_r}{\sigma'_\theta}\right)_{ii+1} - 1}{\left(\frac{\sigma'_r}{\sigma'_\theta}\right)_{ii+1} + 1} \quad (21)$$

seja constante entre os dois níveis consecutivos de deformação,  $\alpha_i$  e  $\alpha_{i+1}$  (\*). É a primeira hipótese reológica. Em termos de cálculo numérico dos resultados do ensaio pressiométrico, a hipótese de considerar constante o ângulo de atrito  $\phi'$ , entre dois níveis consecutivos de deformação  $\alpha_i$  e  $\alpha_{i+1}$  não introduz nenhum erro adicional, uma vez que a curva  $\psi = \Omega(\alpha_0)$  resultante do ensaio só é conhecida como um conjunto de um número finito de pares ordenados  $(\psi, \alpha_0)$ .

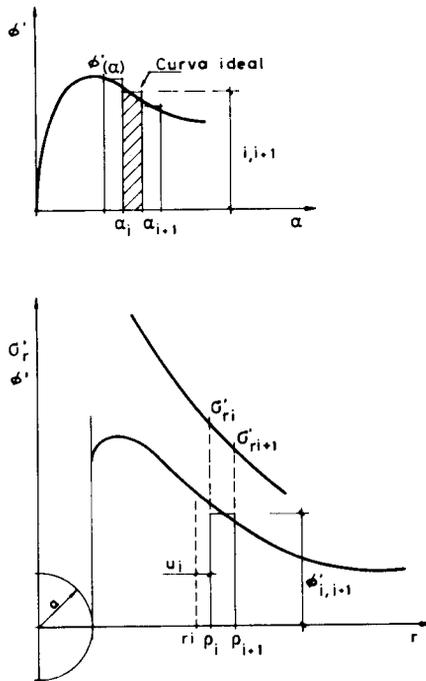


Fig. 1 — Expansão radial de uma cavidade cilíndrica em meio constituído por um conjunto de cilindros concêntricos de parede fina: a) Curva real e ideal do ângulo de atrito mobilizado ao longo da gama de deformações induzidas; b) Curva real e ideal da variação do ângulo de atrito mobilizado com a distância radial e da respectiva tensão principal

A equação (21) é equivalente a admitir que o quociente entre as tensões principais efetivas é constante entre dois níveis consecutivos de deformação:

$$\left( \frac{\sigma'_r}{\sigma'_\theta} \right)_{i,i+1} = R \quad (22)$$

(\*) Por simplicidade de notações  $\alpha_{\theta_i}$  e  $\alpha_{\theta_{i+1}}$  serão designados por  $\alpha_i$  e  $\alpha_{i+1}$

A equação (15), aplicada ao cilindro  $[\rho_i, \rho_{i+1}]$ , assume a forma:

$$\frac{d\sigma'_r}{\sigma'_r} = \frac{R-1}{R} \frac{d\alpha_\theta}{2\alpha_\theta - \Lambda} \quad (23)$$

para  $\alpha_i \leq \alpha_\theta \leq \alpha_{i+1}$ .

Integrando a equação anterior no domínio do cilindro em causa,

$$\int_i^{i+1} \frac{d\sigma'_r}{\sigma'_r} = \frac{R-1}{R} \int_i^{i+1} \frac{d\alpha_\theta}{2\alpha_\theta - \Lambda} \quad (24)$$

verifica-se ser necessário exprimir  $\Lambda$  em função de  $\alpha_\theta$  para cada cilindro, de forma a resolver a equação (24) em ordem a  $R$ . A relação entre  $\Lambda$  e  $\alpha_\theta$  constitui a segunda hipótese reológica descrita mais à frente pois, por comodidade de exposição, estabelecer-se-á a lei de fluxo antes de abordar a relação entre  $\Lambda$  e  $\alpha_\theta$ .

### 3.3 — A lei de fluxo

Como se fez referência anteriormente, a equação (18) exprime uma lei de fluxo que descreve um mecanismo de deformação de um meio. Seja tal lei de fluxo expressa através da relação básica da Teoria da Dilatância de Rowe. Como é sabido esta teoria estabelece uma relação energética para um sistema particulado quando é provocada a deformação do referido sistema, tal que (Rowe, 1971):

$$\bar{E} = \frac{dW^i}{dW^e} \quad (25)$$

onde  $\bar{E}$  é uma razão entre incrementos de energias;

- $dW^i$  é o incremento de energia fornecido ao sistema e que provoca o deslizamento entre as partículas;
- e  $dW^e$  é o incremento de energia cedido pelo sistema (incremento do trabalho dissipado pelo sistema contra as forças exteriores).

A equação (25) tem que ser satisfeita de tal modo que  $\bar{E}$  seja o mínimo. Designando  $\bar{E}_{\min}$  por  $K$ , Rowe (1971) conclui que

$$K = \text{tg}^2 \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\phi'_f}{2} \right) \quad (26)$$

e que

$$\phi'_f = \phi'_{cv} \quad (27)$$

para um estado plano de deformação (tal como sucede num meio ilimitado onde uma cavidade cilíndrica de comprimento infinito esteja a ser radialmente expandida), e então ter-se-á

$$K = \frac{1 + \text{sen } \phi'_{cv}}{1 - \text{sen } \phi'_{cv}} \quad (28)$$

onde  $\phi'_f$  é o ângulo de atrito inter-particular modificado pela remoldagem do solo ao longo do processo de deformação e que depende da energia interna absorvida (não confundir com o ângulo de atrito mobilizado pelo solo ao longo do processo de deformação);

e  $\phi'_{cv}$  é o ângulo de atrito mobilizado no estado crítico.

Para explicitar a equação (25) é necessário ter em conta o mecanismo de deformação associado à expansão radial de uma cavidade cilíndrica. A deformação do meio é provocada pela acção das pressões radiais aplicadas na parede da cavidade cilíndrica as quais impõem deslocamentos radiais às partículas. Para determinar os incrementos de energia da equação (25), apenas é considerado o trabalho dissipado por deslizamento das partículas entre si (é este, com efeito, o mecanismo básico postulado por Rowe). Deste modo, a energia fornecida ao sistema é da responsabilidade da componente radial do campo de tensões, opondo-se ao deslizamento das partículas entre si a componente circunferencial do mesmo campo de tensões (ver fig. 2). Recorrendo à Mecânica dos Meios Contínuos é possível demonstrar que

$$dW^i = \sigma_r d\alpha_r \quad (29)$$

e

$$dW^e = -\sigma_\theta d\alpha_\theta \quad (30)$$

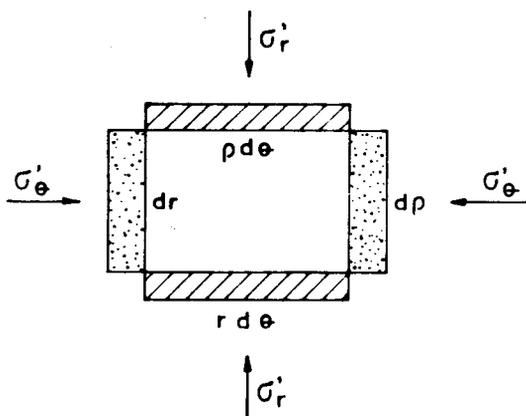


Fig. 2 — Mecanismo de deformação de um sistema de partículas em contacto associado ao ensaio pressiométrico

A equação (25) assume a forma:

$$K = - \frac{\sigma'_r d\alpha_r}{\sigma'_\theta d\alpha_\theta} \quad (31)$$

a qual, uma vez aceite o postulado de Rowe, é perfeitamente exacta (\*).

Considerando a hipótese das pequenas deformações, a equação (31) transforma-se em:

$$K = - \frac{\sigma'_r d\varepsilon_r}{\sigma'_\theta d\varepsilon_\theta} \quad (32)$$

e como, nesta hipótese,  $\mu = \varepsilon_\theta + \varepsilon_r$ ,

$$K = - \frac{\sigma'_r d\varepsilon_r}{\sigma'_\theta (d\varepsilon_r - d\mu)} \quad (33)$$

(\*) Em rigor, é a expressão do trabalho por unidade de volume que é exacta. Esta expressão foi deduzida directamente dos fundamentos da Mecânica dos Meios Contínuos e assume a forma:

$$dw = \tau^{ij} de_{ij} \quad (PP-1)$$

onde  $w$  é o trabalho por unidade de volume;

$\tau^{ij}$  são as componentes contravariantes de um tensor, o tensor das tensões;

e  $e_{ij}$  são as componentes covariantes de um outro tensor, o tensor das deformações.

O sistema de referência ao qual todas as variáveis estão referidas é a configuração deformada e portanto o tensor das tensões é o tensor das tensões de Euler tal como o tensor das deformações é o tensor das deformações de Almansi. A expressão (PP-1) pode ser facilmente demonstrada pelo princípio dos trabalhos virtuais.

ou

$$\frac{\sigma'_r}{\sigma'_\theta} = K \left( 1 - \frac{d\mu}{d\varepsilon_r} \right). \quad (34)$$

Rowe (1971) tinha chegado à equação (34) quer para um ensaio triaxial de compressão com simetria axial ( $\sigma_2 = \sigma_3$ ) quer para um caso de deformação plana. Embora na sua dedução seja admitido que  $d\mu = d\varepsilon_1 + d\varepsilon_2 + d\varepsilon_3$  o que corresponde a uma hipótese de pequenas deformações, Rowe concluiu que a Teoria da Dilatância é válida mesmo para grandes deformações. Esta conclusão não deve ser encarada de forma surpreendente. De facto, a Teoria da Dilatância é uma lei essencialmente experimental, quer dizer, é verificada experimentalmente. No caso em análise, mesmo ensaiando amostras a níveis elevados de deformação, a lei continua a ser verificada. A equação (34) é apenas uma forma possível de exprimir matematicamente o fenómeno físico observado. A relação básica (25) é a única considerada perfeitamente geral (Rowe, 1971). Por estas razões julga-se preferível utilizar a equação (31) em lugar da equação (34), como lei de fluxo para o problema da expansão radial de uma cavidade cilíndrica, já que a primeira é deduzida sem impor restrições à magnitude das variáveis, nomeadamente às deformações, resultando directamente da Mecânica dos Meios Contínuos uma vez aceite o princípio da Teoria da Dilatância de Rowe.

A expressão (31) pode ser escrita sob a forma:

$$R = K \cdot D \quad (35)$$

concluindo-se que

$$\frac{\sigma'_r}{\sigma'_\theta} = R \quad (36)$$

e

$$-\frac{d\alpha_\theta}{d\alpha_r} = D. \quad (37)$$

Verifica-se assim que:

- a) A equação (16) é uma forma implícita da equação (36);
- b) A equação (17) é uma forma implícita da equação (37) se for

$$F(\alpha_\theta, \Lambda) = F_1(\alpha_\theta, \alpha_r) = F_1(\alpha_\theta, h(\Lambda, \alpha_\theta)).$$

### 3.4 — A segunda hipótese reológica

À medida que a cavidade cilíndrica vai sendo expandida, o meio, constituído por um conjunto de cilindros de parede fina, vai acumulando deformações volumétricas. Deste modo, quando se incrementa a expansão da cavidade cilíndrica, a deformação volumétrica que cada

cilindro sofre é função quer das deformações volumétricas já instaladas quer da distância radial ao eixo da cavidade a que cada cilindro se situe. Em particular, o cilindro situado entre  $\rho_i$  e  $\rho_{i+1}$  sofre uma deformação volumétrica

$$\Lambda_{i,i+1} = f(\Lambda_p, \alpha_p, \alpha_{i+1}) \quad (38)$$

tal como se ilustra na figura 3. Tendo em atenção a equação (35) e a primeira hipótese reológica, torna-se evidente que, em cada cilindro, a relação entre  $\alpha_\theta$  e  $\alpha_r$  é linear, donde  $D = C''$ . A equação (38) e a constatação anterior estabelecem a segunda hipótese reológica.

A equação (37) terá que ser escrita em termos de  $\Lambda$  e de  $\alpha_\theta$  o que pode ser feito recorrendo à equação (10). Por diferenciação, obtém-se:

$$-2(1-\Lambda) d\Lambda = -2(1-2\alpha_\theta) d\alpha_r - 2(1-2\alpha_r) d\alpha_\theta \quad (39)$$

e combinando o resultado com a equação (10)

$$\frac{d\alpha_r}{d\alpha_\theta} = \frac{1-\Lambda}{1-2\alpha_\theta} \cdot \frac{d\Lambda}{d\alpha_\theta} - \frac{(1-\Lambda)^2}{(1-2\alpha_\theta)^2} \quad (40)$$

Substituindo a equação (40) na equação (37) e rearrajando os termos, obtém-se explicitamente a forma diferencial da equação (17):

$$\frac{d\Lambda}{d\alpha_\theta} = \frac{1-\Lambda}{1-2\alpha_\theta} - \frac{1}{D} \frac{1-2\alpha_\theta}{1-\Lambda} \quad (41)$$

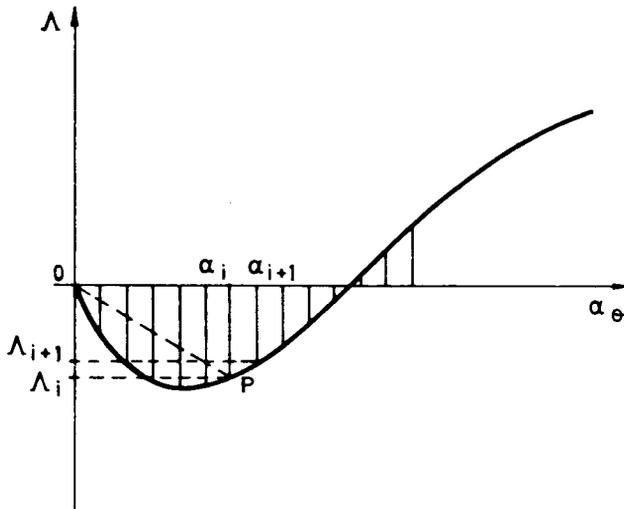


Fig. 3 — Curva das deformações volumétricas versus deformações circunferenciais de um meio constituído por um conjunto de cilindros de parede fina

Conforme a figura 3 evidencia, ao integrar a equação (41), não é possível utilizar a condição limite de que, para  $\alpha_\theta = 0$ ,  $\Lambda = 0$ . Esta condição é apenas válida para o primeiro nível de deformação de cada cilindro. Se fosse utilizada para calcular o nível de deformação  $\alpha_{i+1}$ , o resultado seria que o gradiente da deformação volumétrica (suposto constante, o que não é o caso) era dado pela linha tracejada  $\overline{OP}$ , subvertendo completamente o resultado. Deste modo, a equação (41) integrada no domínio de cada cilindro situado entre as distâncias radiais ao eixo da cavidade  $\rho_i$  e  $\rho_{i+1}$  toma a forma (para  $\rho = \rho_i$  tem-se  $\alpha = \alpha_i$  e  $\Lambda = \Lambda_i$ ):

$$(1 - \Lambda)^2 = (1 - \Lambda_i)^2 \frac{1 - 2\alpha_\theta}{1 - 2\alpha_i} + 2 \frac{1 - 2\alpha_\theta}{D} (\alpha_\theta - \alpha_i) \quad (42)$$

para  $\Lambda_i < \Lambda \leq \Lambda_{i+1}$

e  $\alpha_i < \alpha_\theta \leq \alpha_{i+1}$

Está estabelecida a equação que explicita a equação (38) e portanto a segunda hipótese reológica.

### 3.5 — Resolução genérica do problema

As equações que exprimem as duas hipóteses reológicas e a lei de fluxo, utilizadas convenientemente, permitem chegar a soluções genéricas do problema. Uma possibilidade consiste em obter a relação entre as tensões efectivas radiais e as deformações circunferenciais para o cilindro situado entre as distâncias radiais  $\rho_i$  e  $\rho_{i+1}$  em relação ao eixo da cavidade tal como o autor já havia feito mas utilizando a lei de fluxo expressa pela equação (34) (Sousa Coutinho, 1987b). Tal relação pode ser obtida, em termos do presente trabalho, por combinação entre equações (24), (35) e (42). Mais interessante é a solução que exprime as deformações volumétricas em função das tensões efectivas radiais e deformações circunferenciais. Combinando a equação diferencial (41) com a lei de fluxo (35) tem-se:

$$\frac{d\Lambda}{d\alpha_\theta} = \frac{1 - \Lambda}{1 - 2\alpha_\theta} - \frac{K}{R} \frac{1 - 2\alpha_\theta}{1 - \Lambda} \quad (43)$$

e eliminando  $R$  entre as equações (23) e (24) chega-se à equação diferencial

$$\frac{d\Lambda}{d\alpha_\theta} = \frac{1 - \Lambda}{1 - 2\alpha_\theta} - K \frac{1 - 2\alpha_\theta}{1 - \Lambda} \left( 1 - \frac{d \ln \sigma'_r}{d\alpha_\theta} (2\alpha_\theta - \Lambda) \right) \quad (44)$$

a qual não depende quer de  $R$  quer de  $D$ . A equação anterior poderia ter sido obtida pela combinação directa entre a equação (15) (resolvida em ordem a  $\sigma'_r / \sigma_\theta$ ), a equação (31) e a equação (40). Verifica-se assim que a equação diferencial (44) exprime a relação entre  $\sigma'_r$ ,  $\alpha_\theta$  e  $\Lambda$  válida para todos os pontos do meio infinito.

Da equação (44) é ainda possível extrair uma importante conclusão: qualquer que seja a compressão inicial do meio, o início da expansão radial da cavidade cilíndrica implica uma diminuição de volume do meio. De facto, aplicando a condição inicial de limite ao membro direito da equação (44), tem-se:

$$\forall_{(\Lambda, \alpha_\theta) \in B_{\delta(0,0)}}, \frac{d\Lambda}{d\alpha_\theta} = 1 - K \quad (45)$$

ou seja, existe um intervalo  $[0, b]$  numa vizinhança  $\varepsilon$  do ponto  $\alpha_\theta = 0$  tal que:

$$\exists_{\varphi_\varepsilon(0)} : \forall_{\alpha_\theta \in [0, b]}, \Lambda = (1 - K) \alpha_\theta \quad (46)$$

Como  $K > 1$  ( $\phi'_{cv} > 0$ ) e  $\alpha_\theta \geq 0$  (o perímetro da cavidade aumenta à medida que esta expande, o que significa que as fibras na direcção circunferencial sofrem alongamento) conclui-se que, na vizinhança do ponto  $\alpha_\theta = 0$ ,  $\Lambda < 0$ .

### 3.6 — Aplicação ao ensaio pressiométrico

Em resultado do princípio da semelhança entre cavidades cilíndricas enunciado no parágrafo 2.2 e cujo corolário é a relação existente entre as equações (13) e (14), a equação (44) poderá ser escrita em termos de pressões aplicadas e de deformações induzidas pelo ensaio pressiométrico. A solução do problema seria determinada fazendo convergir o intervalo  $[\alpha_{0i}, \alpha_{0i+1}]$  para um valor infinitesimal ou em alternativa fazendo convergir  $\alpha_{0i}$  para  $\alpha_{0i+1}$  o que em termos físicos equivaleria a transformar os cilindros de parede fina em superfícies cilíndricas. No entanto, não sendo conhecida a expressão analítica de  $\psi = \Omega(\alpha_0)$  o problema terá que ser encarado de modo semelhante ao problema da resolução da equação de Palmer para ensaios não drenados (Sousa Coutinho, 1988b). Ainda em resultado do princípio de semelhança descrito no ponto 2.2, as tensões radiais  $\sigma_{ri}$  e  $\sigma_{ri+1}$  bem como as deformações  $\alpha_i$  e  $\alpha_{i+1}$  serão assimiladas a dois níveis consecutivos do ensaio pressiométrico,  $(\psi, \alpha_0)_i$  e  $(\psi, \alpha_0)_{i+1}$ . Quanto mais próximos estiverem  $\alpha_{0i}$  e  $\alpha_{0i+1}$ , mais rigoroso será o resultado. Tendo em conta as considerações anteriores, a equação (44) assume a forma

$$\frac{d\Lambda}{d\alpha_0} = \frac{1 - \Lambda}{1 - 2\alpha_0} - K \frac{1 - 2\alpha_0}{1 - \Lambda} \left( 1 - \frac{d \ln(\psi - U_0)}{d\alpha_0} (2\alpha_0 - \Lambda) \right) \quad (47)$$

onde  $U_0$  representa a pressão intersticial da água “in situ”. Para determinar  $\Lambda$  ao longo de todos os níveis de deformação do ensaio, será necessário integrar a equação diferencial (47) nos pontos  $(\psi - U_0, \alpha_0)_{i+1}$  sendo a condição limite dada pelas variáveis no ponto imediatamente anterior, ou seja  $(\psi - U_0, \alpha_0)_i$ .

### 3.7 — Solução do problema

Para integrar a equação diferencial (47) é necessário, primeiro que tudo, avaliar a função  $\psi = \Omega(\alpha_0)$  a partir dos dados experimentais. Isto pode ser feito por diversos métodos mas a discussão deste assunto sai fora do âmbito do presente trabalho. O método que é utilizado no LNEC, o qual é o método que será aqui aplicado, é muito semelhante ao que o autor já utilizou (Sousa Coutinho, 1987b, 1988b) no programa ANABELA. Este método, que se apoia na computação gráfica interactiva, permite obter os valores de

$$T(\alpha_0) = \frac{d \ln(\psi - U_0)}{d \alpha_0} \quad (48)$$

a cada nível de deformação  $\alpha_0$ , os quais são a intervalos  $\Delta \alpha = 0,1\%$  no programa ANABELA II. A equação (47) pode ser escrita sob a forma

$$\frac{d \Lambda}{d \alpha_0} = \frac{1 - \Lambda}{1 - 2 \alpha_0} - K \frac{1 - 2 \alpha_0}{1 - \Lambda} (1 - T(\alpha_0) \cdot (2 \alpha_0 - \Lambda)) \quad (49)$$

com a condição de fronteira

$$\Lambda(\alpha_0 = 0) = 0, \quad (50)$$

o que é um problema de resolver uma equação diferencial sujeita a um valor inicial. Um método apropriado para este tipo de problemas é o método de Runge-Kutta. De facto, o programa ANABELA II resolve a equação (49) utilizando as fórmulas de Runge-Kutta de quinta e sexta ordem desenvolvidas por J. H. Verner.

Uma vez integrada a equação (49) a cada nível de deformação  $\alpha_0$  o problema torna-se estaticamente determinado. A partir da equação (23), os valores de  $R$  podem ser calculados:

$$R_i = \frac{1}{1 - \left( \frac{d \ln(\psi - U_0)}{d \alpha_0} \right)_i (2 \alpha_{0i} - \Lambda_i)} \quad (51)$$

o que conduz aos valores dos ângulos de atrito mobilizados:

$$\phi'_i = \arcsen \frac{R_i - 1}{R_i + 1}. \quad (52)$$

### 3.8 — Exemplos de aplicação da teoria exposta

A concluir a presente secção, apresentam-se nas figuras 4 e 5 dois exemplos práticos da teoria exposta. Cada figura é constituída por três desenhos; *a*) a curva representativa do ensaio; *b*) a curva das deformações volumétricas; e *c*) a curva dos ângulos de atrito mobilizados. O eixo das abcisas dos desenhos representa as extensões circunferenciais (as deformações de Cauchy) uma vez que esta variável é usualmente mais utilizada em engenharia. Porém, todos os cálculos foram executados utilizando as deformações de Almansi; apenas aquando da representação gráfica dos resultados as deformações de Almansi eram reduzidas a deformações de Cauchy à custa da equação (8). Na falta de elementos precisos para determinar  $\phi'_{cv}$ , adoptou-se o valor de  $35^\circ$  (Hughes *et al.*, 1977). Estes desenhos são realizados pelo programa ANABELA II.

A figura 4 representa um ensaio realizado no âmbito do projecto da ponte internacional sobre o Rio Guadiana. O ensaio foi realizado com o pressiómetro autopercussor de Cambridge pertencente ao LNEC a uma profundidade de 12,8 m. A curva das deformações volumétricas mostra claramente a contracção da areia na fase inicial do ensaio e a curva dos ângulos de atrito mobilizados exhibe um fenómeno muito semelhante ao “strain-hardning”. Recorrendo à análise de Hughes *et al.* (1977) obtém-se  $\phi' = 33,8^\circ$  e  $v = -1,4^\circ$  o que concorda com as figuras 4b e 4c. De facto, o valor de  $\phi'$  mostra que a areia se encontra num estado mais solto do que o estado crítico assumido e portanto a areia sofre um processo de endurecimento. Por outro lado, o valor negativo do ângulo de dilatação mostra a compressibilidade do solo.

A figura 5 diz respeito a um ensaio referido por Wroth (1984). Os dados foram lidos numa mesa digitalizadora exactamente da mesma maneira como se o ensaio tivesse sido realizado pelo autor. Ao contrário do comportamento evidenciado pela areia respeitante ao ensaio representado na figura anterior, esta areia exhibe um fenómeno de amolecimento (“strain-softning”) permitindo assim determinar um ângulo de atrito de pico e um ângulo de atrito residual (\*). A curva das deformações volumétricas exhibe a dilatação do meio imediatamente após a pequena contracção inicial — aliás, de acordo com o que fora concluído na secção 3.4 —, o que demonstra que se trata de uma areia densa. Também neste caso, os resultados através da análise de Hughes *et al.* (1977) são coerentes com estas constatações:  $\phi' = 39^\circ$  e  $v = 9,5^\circ$  (segundo Wroth, 1984).

Estes exemplos haviam sido já apresentados pelo autor na Primeira Conferência de Jovens Engenheiros Geotécnicos (Sousa Coutinho, 1987b) mas aplicando a lei de fluxo dada pela equação (34).

---

(\*) Em rigor, o ângulo de atrito residual só se instala após o estado crítico. De facto, impondo distorções sucessivamente crescentes a uma estrutura particulada, inicialmente orientada ou não, será atingido, primeiro, um estado aleatório de distribuição das partículas verificando-se simultaneamente a instalação do estado crítico, seguindo-se uma reorientação progressiva da estrutura particulada até ser atingido um estado correspondente à instalação da resistência residual. Verifica-se assim que o estado crítico é um ponto de passagem da trajectória dos diferentes estados por onde passa a estrutura em direcção ao estado onde se instala a tensão tangencial residual (Maranha das Neves, 1975, in Sousa Coutinho, 1985, pág. 102 e 103).

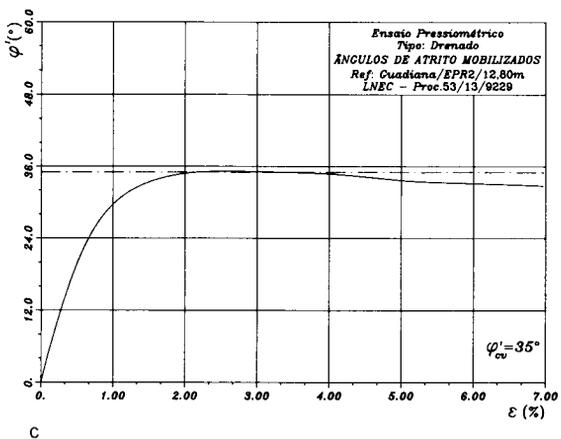
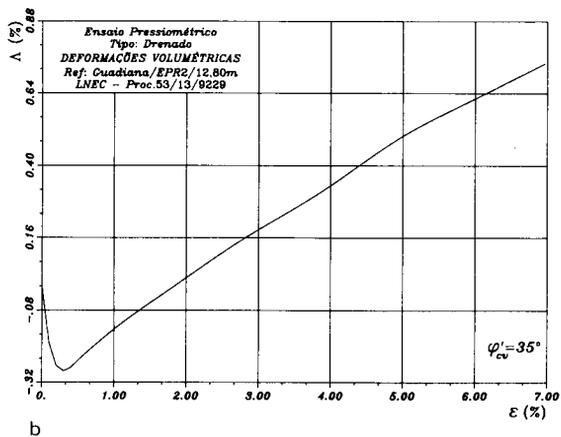
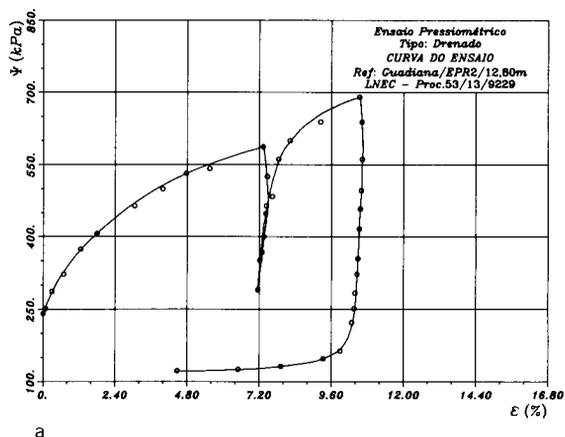
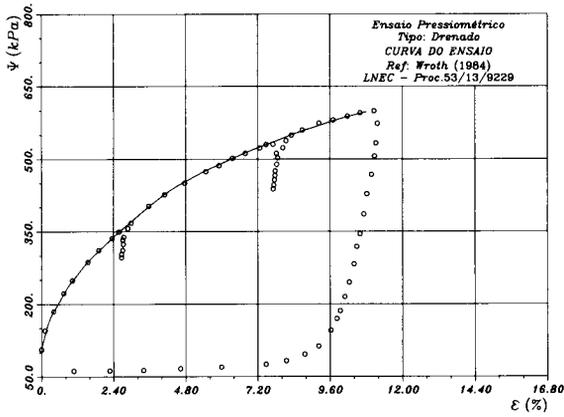
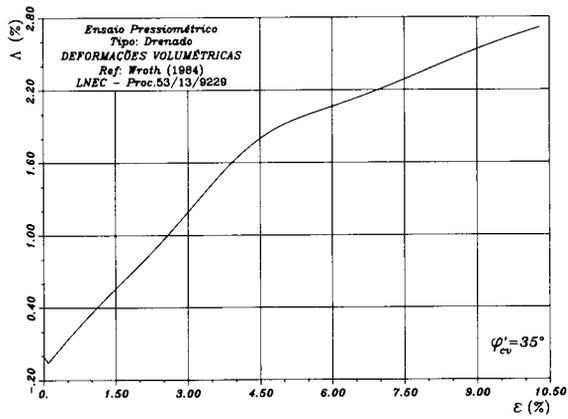


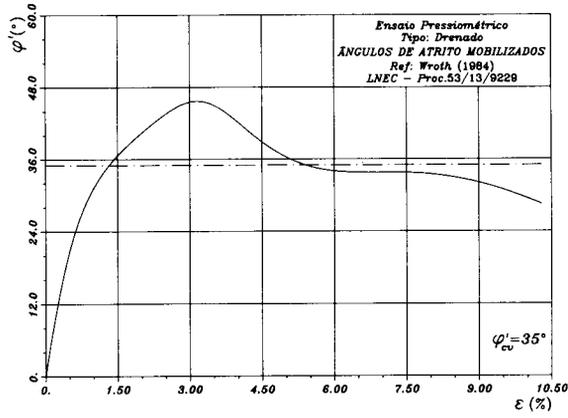
Fig. 4 — Resultados de um ensaio pressiométrico realizado no âmbito do projecto da ponte sobre o Rio Guadiana: a) curva representativa do ensaio; b) curva das deformações volumétricas; c) curva dos ângulos de atrito mobilizados



a



b



c

Fig. 5 — Resultados de um ensaio pressiométrico referido por Wroth (1984): a) curva representativa do ensaio; b) curva das deformações volumétricas; c) curva dos ângulos de atrito mobilizados

#### 4 — ALGUMAS CONSIDERAÇÕES ACERCA DA TEORIA EXPOSTA

Como o desenvolvimento da secção 3 torna evidente, o modelo reológico apresentado não considera a existência de deformações elásticas, não impõe uma forma pré-definida ao andamento das curvas susceptíveis de serem obtidas — nomeadamente a curva dos ângulos de atrito mobilizados e a curva das deformações volumétricas induzidas — e é formulado sem serem postas restrições à magnitude das variáveis, em particular às deformações. Este modelo permite, pois, considerar o endurecimento (strain-hardning) ou o amolecimento (strain-softing) da areia sujeita ao ensaio. Mais ainda, estes cálculos são executados tendo em conta a deformação volumétrica a cada nível de deformação do ensaio. Isto é feito considerando a história anterior das tensões e das deformações uma vez que para calcular a deformação volumétrica ao nível  $(i + 1)$ , é necessário partir do nível  $i$ . Esta situação está muito próxima da teoria da plasticidade incremental. A avaliação correcta da deformação volumétrica é muito importante para a correcção dos parâmetros a calcular tal como pode ser visto, por exemplo para as tensões de corte, se a equação (15) for escrita sob a forma:

$$\frac{d\sigma'_r}{2\tau} = \frac{d\alpha_0}{2\alpha_0 - \Lambda}, \quad (53)$$

ou, aplicando o princípio da semelhança

$$\tau = \frac{d(\psi - U_0)}{d \ln \alpha_0} \left( 1 - \frac{\Lambda}{2\alpha_0} \right). \quad (*) \quad (54)$$

A equação (54) põe em evidência que a tensão de corte será subestimada ou sobrestimada consoante  $\Lambda$  for positivo ou negativo. Assim, para um solo compressível ( $\Lambda < 0$ ) a tensão de corte seria subestimada, verificando-se o caso oposto se o solo fosse dilatante. Esta constatação está ilustrada na figura 6. Esta figura utiliza os dados do ensaio representado na figura 4. A linha a cheio representa a tensão de corte calculada de acordo como a equação (54) e utilizando os valores de  $\Lambda$  já calculados e representados na figura 4b. A linha a tracejado representa a solução da equação (54) mas assumindo que  $\Lambda = 0$  para qualquer valor de  $\alpha_0$ . Verifica-se que, até ao nível de deformação para o qual  $\Lambda$  troca de sinal,  $\tau$  é subestimado (neste domínio,  $\Lambda < 0$ ), mas acima daquele nível  $\tau$  é sobrestimado (neste domínio,  $\Lambda < 0$ ), se for assumido que  $\Lambda = 0$ .

A opção em utilizar a lei de fluxo expressa pela equação (31) em lugar da equação (34) é justificada, notando que a primeira é mais correcta em termos de Mecânica dos Meios Contínuos. A equação (34) poderia ser escrita em termos de  $\Lambda$  e  $\alpha_0$  — tal como o autor já havia

(\*) A equação (54), escrita em termos de tensões totais e considerando nulas as deformações volumétricas ( $\Lambda = 0$ ), identifica-se com a equação de Palmer:

$$\tau_u = \frac{d\psi}{d \ln \alpha_0}$$

feito no seu trabalho precedente (Sousa Coutinho, 1987b) e como será visto mais adiante — mas isto não mudaria o facto de a sua dedução haver sido feita recorrendo à hipótese das pequenas deformações. Na figura 7, a qual utiliza os dados do ensaio representado na figura 5, mostra-se a influência da equação da lei de fluxo nos resultados de a)  $\Lambda$  e b)  $\phi'$ . As linhas a cheio representam os resultados quando é utilizada a equação (31), enquanto as linhas a tracejado representam os resultados quando se recorre à equação (34). Tal como esta figura torna claro, as diferenças nas curvas representativas de  $\Lambda$  e  $\phi'$  são cada vez mais notórias à medida que as deformações aumentam. Aliás, isto era evidente, uma vez que quanto mais elevado for o nível de deformação, maior é o erro cometido em recorrer à hipótese das pequenas deformações.

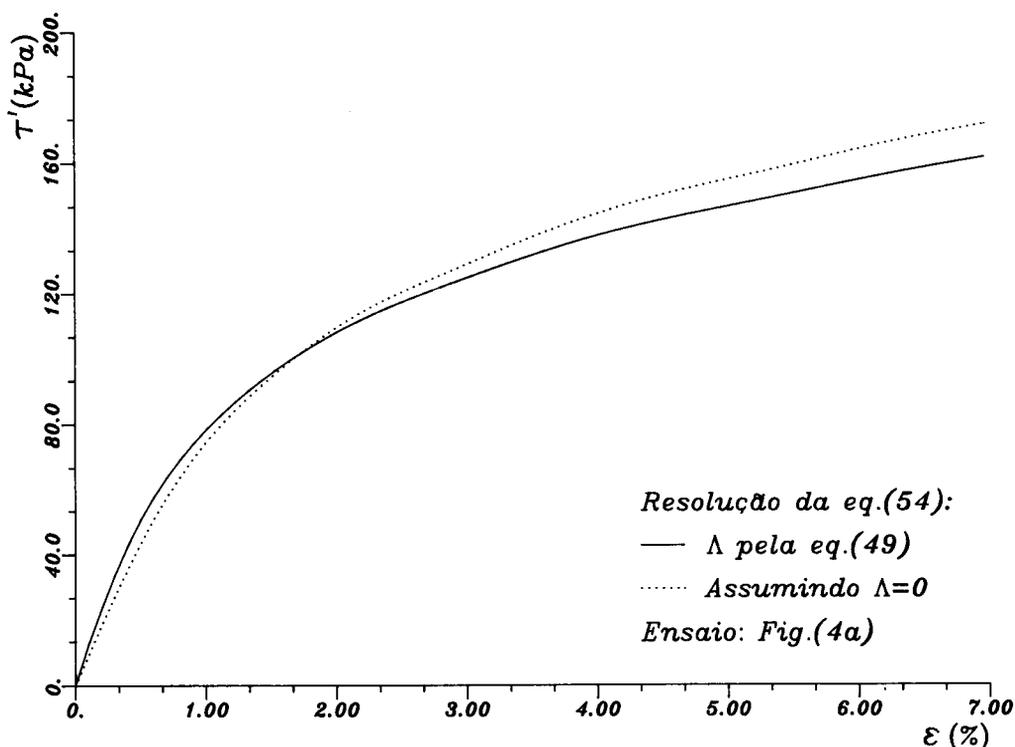


Fig. 6 — Curvas das tensões de corte quando as deformações volumétricas são consideradas (pela equação (54)) e quando se admite que  $\Lambda = 0$  (dados do ensaio representado na figura (4))

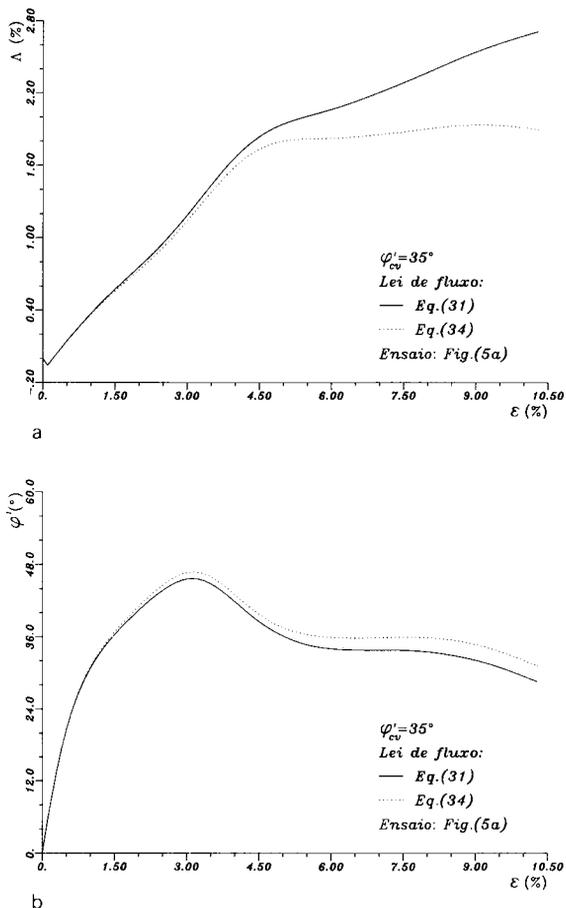


Fig. 7 — Diferenças nos resultados dos ensaios pressiométricos quando a eq. (31) ou a eq. (34) são utilizadas no cálculo de : a) deformações volumétricas; b) ângulos de atrito mobilizados (dados do ensaio representado na figura (5))

## 5 — DETERMINAÇÃO DO VALOR DE $K$

A exposição anterior tem pressuposto que o valor de  $K$  (ou de  $\phi'_{cv}$ ) é um valor conhecido. De facto, se assim não for, o problema manter-se-á com um grau de indeterminação. O problema da determinação de  $\phi'_{cv}$  para aplicar à interpretação de ensaios pressiométricos encontra-se discutido nos trabalhos de Hughes *et al.* (1977), Fahey e Randolph (1984) e Fahey (1986). Destes trabalhos conclui-se que não existe unanimidade de opiniões de como deve ser obtido  $\phi'_{cv}$ , além da relativa dificuldade em obter amostras representativas da granulometria da areia submetida a ensaio. Ora este valor deveria ser determinado tão rigorosamente quanto possível, uma vez que não faz sentido refinar a técnica e o modelo de cálculo dos ângulos de atrito

mobilizados se for utilizado um valor de  $\phi'_{cv}$  que se afaste da realidade. No entanto, verifica-se que não existem diferenças significativas entre uma curva ( $\phi', \epsilon_0$ ) — ou ( $\phi', \alpha_0$ ) — referente a um determinado ensaio e calculada à custa de um certo valor  $\phi'_{cv} = \Phi$  e uma outra curva ( $\phi', \epsilon_0$ ) referente ao mesmo ensaio e calculada a partir de um valor de  $\phi'_{cv}$  contido no intervalo  $[\Phi - 2^\circ, \Phi + 2^\circ]$ . A curva  $\phi' = \phi'(\epsilon_0)$  mantém a “mesma forma” mas fica afectada de um certo valor de escala no que diz respeito aos valores de  $\phi'$ . Quer dizer, variando  $\phi'_{cv}$ , o nível de deformação para o qual se verifica o valor de pico de  $\phi'$  (se existir) não é alterado, tal como não sofre alteração o nível de deformação a partir do qual  $\phi'$  é mais ou menos constante. Constata-se assim que a alteração do valor de  $\phi'_{cv}$  não impede a curva dos ângulos de atrito mobilizados de apresentar o “endurecimento” ou o “amolecimento” que seja característico da areia ensaiada. Os valores numéricos de  $\phi'$  é que são alterados. Encarando o problema noutra perspectiva, verifica-se que tomando  $\phi'_{cv} = 30^\circ$  na resolução da equação (44) aplicada ao ensaio representado na figura 5a, a linha  $\phi' = \phi'_{cv}$  fica situada abaixo do patamar exibido pela curva  $\phi' = \phi'(\epsilon_0)$ . No caso documentado na figura 5c verifica-se o oposto. Nesse caso, deverá existir um valor  $\phi'_{cv}$  tal que a sua linha representativa coincida com o patamar. Com efeito, tomando  $\phi'_{cv} = 32^\circ$  verifica-se que o patamar da curva  $\phi' = \phi'(\epsilon_0)$ , coincide com a linha  $\phi' = \phi'_{cv}$ . Aparentemente, será possível determinar  $\phi'_{cv}$  por este processo. Pode, porém, pôr-se a questão de o estado crítico ser ou não atingido naquele nível de deformação; mais ainda, o estado crítico não se mantém, necessariamente ao longo de uma extensa gama de deformação, tal como parece suceder com o ensaio documentado na figura 5. Mas utilizando convenientemente a curva das deformações volumétricas este problema poderá, pelo menos em princípio, ser ultrapassado. No entanto, trata-se de um processo relativamente complexo quando se utiliza a teoria das deformações finitas, ou seja, quando é utilizada a lei de fluxo (31). Por esta razão, começar-se-á por utilizar a lei de fluxo (34) generalizando-se em seguida o processo para a lei de fluxo (31).

O desenvolvimento da teoria utilizando a lei de fluxo (34) foi já abordado anteriormente (Sousa Coutinho, 1987b). Resumidamente, o termo da equação (34)

$$D = 1 - \frac{d\mu}{d\epsilon_r} \quad (55)$$

é escrito em termos de  $\Lambda$  e  $\alpha_0$

$$\frac{d\Lambda}{1-\Lambda} = \frac{(1-D)d\alpha_0}{(1-D)(1-2\alpha_0) - \sqrt{1-2\alpha_0}} \quad (56)$$

que é uma equação diferencial, a qual uma vez integrada para o cilindro situado entre as distâncias radiais  $[\rho_r, \rho_{i+1}]$  permite explicitar a equação (38):

$$(1-\Lambda) = (1-\Lambda_i) \frac{1 - (1-D)\sqrt{1-2\alpha_0}}{1 - (1-D)\sqrt{1-2\alpha_i}} \quad (57)$$

para  $\Lambda_i < \Lambda \leq \Lambda_{i+1}$  e  $\alpha_i < \alpha_\theta \leq \alpha_{i+1}$ .

A equação (57) é a equação que explicita a segunda hipótese reológica no caso de ser utilizada a teoria das deformações infinitesimais, não obstante estar escrita em termos de  $\Lambda$  e  $\alpha_\theta$ . Seguindo uma linha de raciocínio idêntica à que foi seguida nos parágrafos 3.5, 3.6 e 3.7, podem determinar-se as curvas  $(\Lambda, \epsilon_0)$  e  $(\phi', \epsilon_0)$  do ensaio representado na figura 5a mas tendo como base a lei de fluxo (34). Admitindo três valores para  $\phi'_{cv} = 35^\circ, 37^\circ$  e  $40^\circ$  — obtêm-se as curvas  $(\Lambda, \epsilon_0)$  e  $(\phi', \epsilon_0)$  representadas na figura 8. Pode verificar-se que o patamar da curva  $(\phi', \epsilon_0)$  coincide com o valor de  $\phi'_{cv}$  quando este toma o valor de  $37^\circ$ . Observando a correspondente curva das deformações volumétricas, verifica-se que também esta exhibe um patamar a partir do mesmo nível de deformação para o qual  $\phi' = \phi'_{cv}$ . Este facto é justificado directamente pela equação (57). De facto, se e quando  $\phi' = \phi'_{cv}$ , ter-se-á  $R = K$  e portanto  $D = 1$ . Introduzindo esta condição na equação (57) tem-se que  $\Lambda_{i+1} = \Lambda_i$ , ou seja,  $\Lambda$  manter-se-á constante a partir do nível de deformação para o qual  $D = 1$ . Noutra perspectiva, pode dizer-se que a linha representativa dos  $\Lambda$ , a partir do nível de deformação para o qual  $\phi' = \phi'_{cv}$ , passará a ser paralela a uma outra linha que representa uma quantidade  $Z^*$ , a qual é definida pela equação (57) mas supondo  $D = 1$  para qualquer nível de deformação do ensaio. Explicando de outro modo o significado de  $\Lambda$  e  $Z$ , tem-se que ambas são calculadas pela equação (57) mas enquanto  $\Lambda$  toma em consideração a curva do ensaio, à custa do valor de  $D$  calculado passo a passo,  $Z$  é calculado supondo sempre  $D = 1$ . No caso presente, tem-se  $Z = 0$ , já que supondo  $D = 1$  a equação (57) resume-se à expressão  $Z_{i+1} = Z_i$ , sendo  $Z_1 = 0$  pela condição limite. É exactamente isto que se verifica na figura 8. Quando a curva  $(\Lambda, \epsilon_0)$  é calculada admitindo  $\phi'_{cv} = 37^\circ$ ,  $\Lambda$  mantém-se paralelo ao eixo das abcissas (que é representado pela equação  $\Lambda = 0$  e dada a explicação anterior será  $Z = 0$ ) a partir do nível de deformação para o qual  $\phi' = \phi'_{cv}$ . Isto não é de estranhar pois, como é sabido, quando  $R = K$  ( $D = 1$ ) o estado crítico terá sido alcançado e então o solo deforma-se a volume constante. Parece, pois, que utilizando adequadamente e em conjunto as curvas  $(\Lambda, \epsilon_0)$  e  $(\phi', \epsilon_0)$  é possível determinar o valor de  $\phi'_{cv}$ . A aplicação desta linha de raciocínio à teoria desenvolvida a partir da lei de fluxo escrita em termos de deformações finitas — a equação (31) — apresenta, pelo menos aparentemente, uma certa contradição. Com efeito, aplicando a condição de estado crítico  $D = 1$  na equação (42), obtêm-se:

$$(1 - Z)^2 = (1 - Z_i)^2 \frac{1 - 2\alpha_\theta}{1 - 2\alpha_i} + 2(1 - 2\alpha_\theta)(\alpha_\theta - \alpha_i) \quad (58)$$

ou seja, quando o estado crítico for alcançado ( $D = 1$ ),  $\Lambda$  não se mantém constante, antes dependendo dos valores de  $\alpha_\theta$ , o que não se ajusta aparentemente com a teoria dos estados

\* Trata letra grega "Zeta" maiúscula.

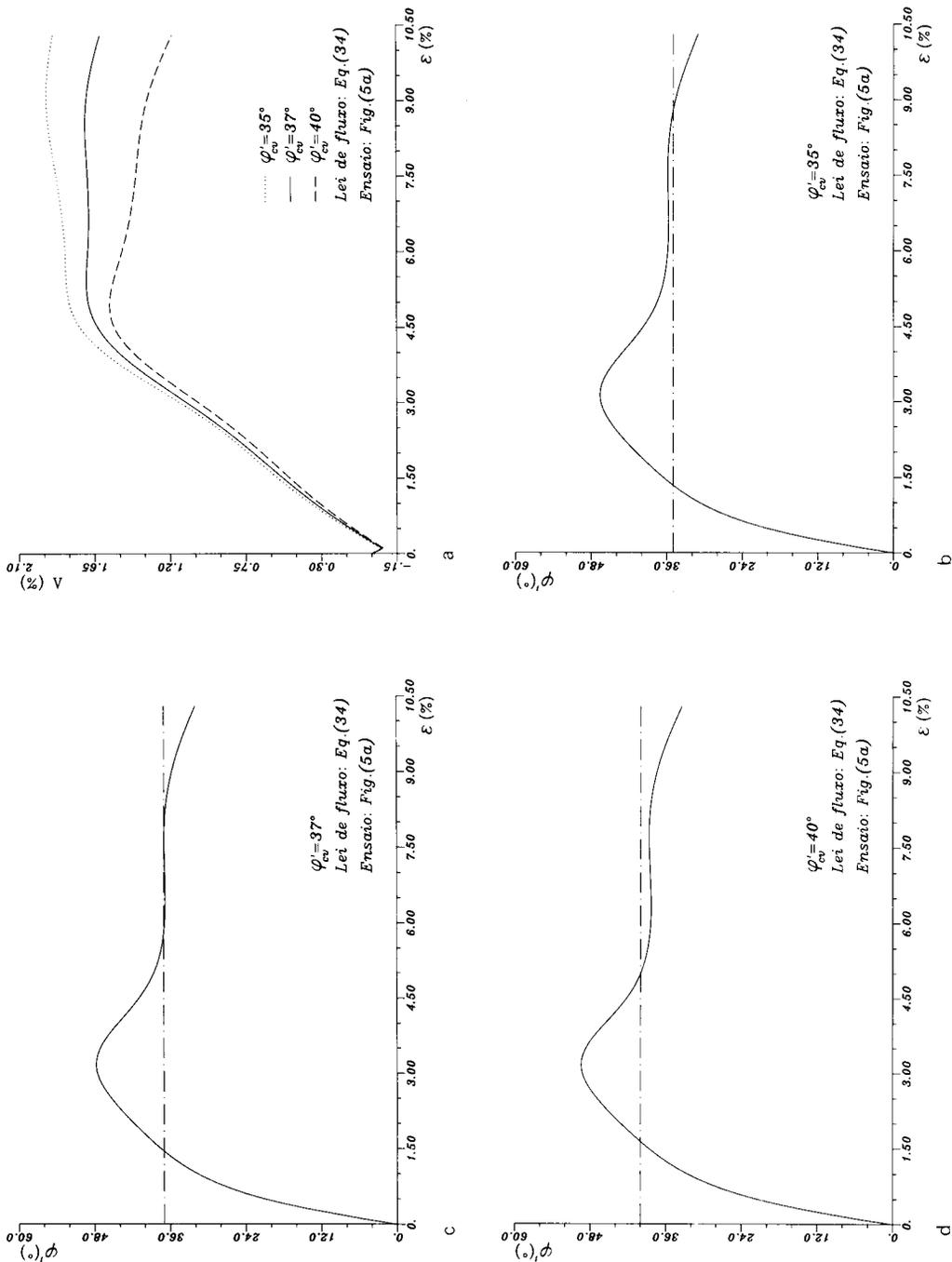


Fig. 8 – Deformações volumétricas (a) e ângulos de atrito mobilizados (b, c, d) quando se utiliza a lei de fluxo expressa pela eq. (34) e admitindo diferentes valores para  $\phi'_{cv}$

críticos. No entanto, há que ter em conta que são diferentes as expressões em que se baseiam as equações (42) e (57), não obstante ambas se apresentarem em termos de  $\Lambda$  e de  $\alpha_\theta$ . Apesar de derivarem da mesma teoria, como foi visto no parágrafo 3.3, a equação (31) segue directamente dos conceitos da Mecânica dos Meios Contínuos, enquanto a equação (34) necessita de hipóteses adicionais. As suas expressões matemáticas são, portanto, diferentes. Mais ainda, as variáveis que as equações (31) e (34) utilizam são, também, diferentes. Na realidade, a equação (34) utiliza variáveis de uma teoria linear, a teoria das pequenas deformações, e estas variáveis são as vulgarmente designadas variáveis de engenharia. Foi utilizando estas variáveis que foi enunciada a teoria dos estados críticos. A equação (31) tem como base variáveis onde os termos de segunda ordem são considerados. Estas variáveis são, pois, diferentes (fisicamente falando) das variáveis utilizadas na teoria dos estados críticos. Sendo assim, a única “condição de estado crítico” aplicável quando se utiliza a lei de fluxo (31) é aquela que deriva directamente dos fundamentos da Teoria da Dilatância: quando  $\phi' = \phi'_{cv}$  ter-se-á  $R = K$  e então  $D = 1$ . A aplicação desta condição conduz à equação (58) que define a “curva padrão de estado crítico” da variável  $\Lambda$ . Esta equação está para a teoria desenvolvida com base na lei de fluxo (31) assim como a equação  $Z = 0$  está para a teoria desenvolvida com base na lei de fluxo (34). O aspecto gráfico da equação (58) é apresentada na figura 9. Note-se que esta curva é independente do ensaio a analisar. A forma mais simples de aferir um possível paralelismo entre  $\Lambda$  e  $Z$  (acima de um certo valor de deformação) é construir a curva  $(\Lambda - Z, \epsilon_0)$  que deverá ser paralela ao eixo das abcissas, a partir do nível de deformação para o qual se verifica  $D = 1$ . As figuras 10 e 11 ilustram estas considerações. A figura 10 utiliza o ensaio cuja curva representativa se apresenta na figura 4a e tomando  $\phi'_{cv} = 31^\circ$  enquanto a figura 11 utiliza os dados do ensaio cuja curva representativa se apresenta na figura 5a e tomando  $\phi'_{cv} = 32^\circ$ . Em face destas figuras parece poder concluir-se que o valor de  $K$  será determinável desde que o estado crítico tenha sido atingido. Mas este é um ponto ainda em aberto.

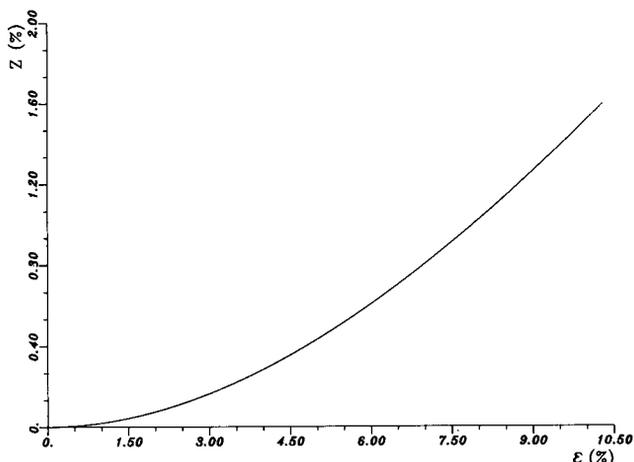


Fig. 9 — Curva padrão de estado crítico da variável  $\Lambda$  calculada a partir da equação (58)

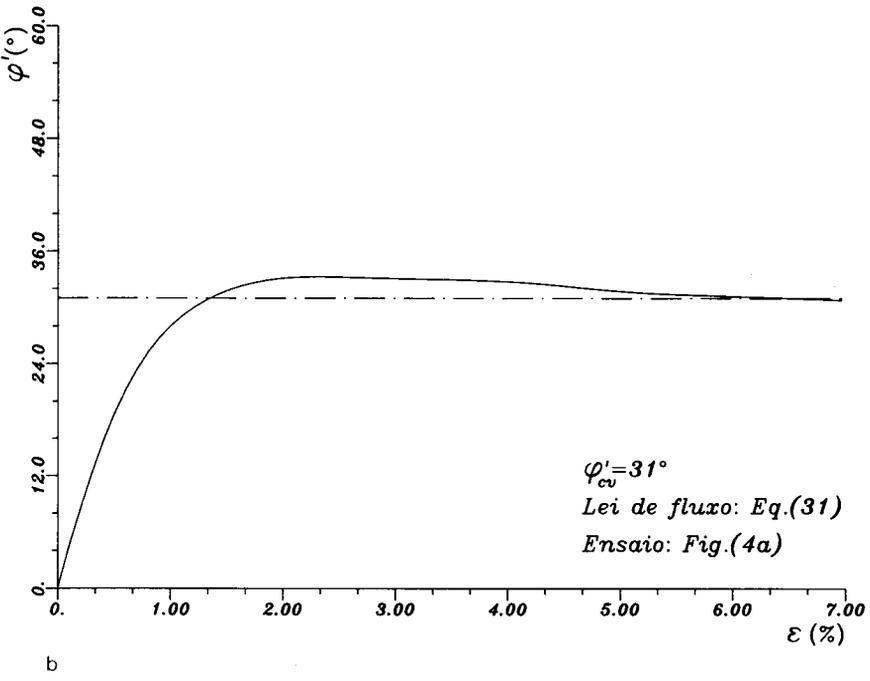
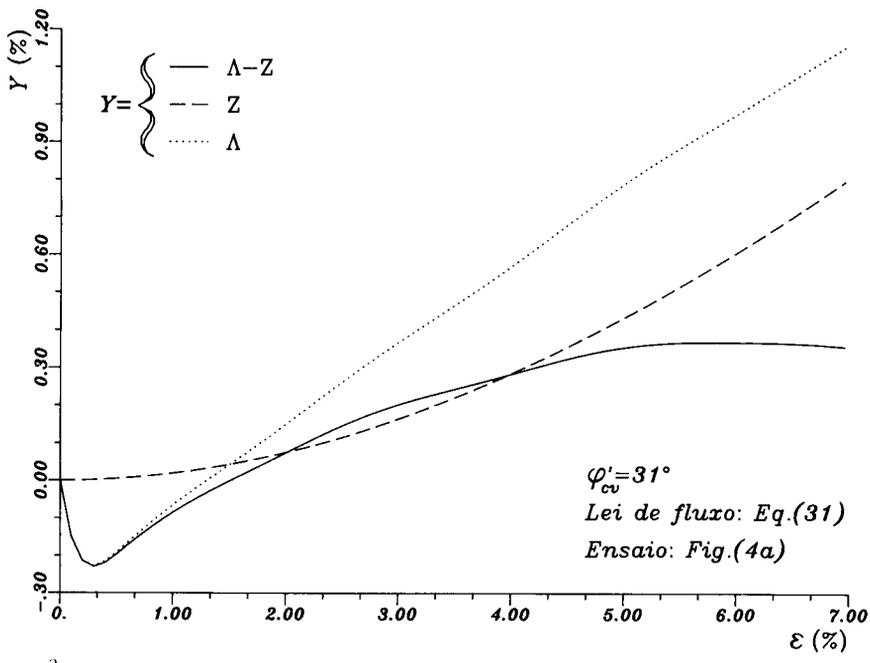
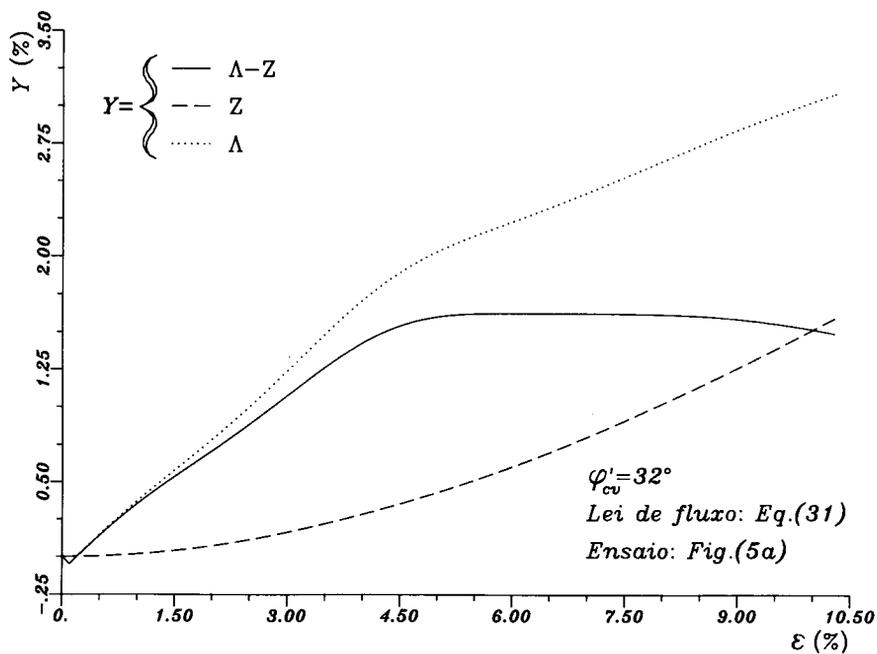
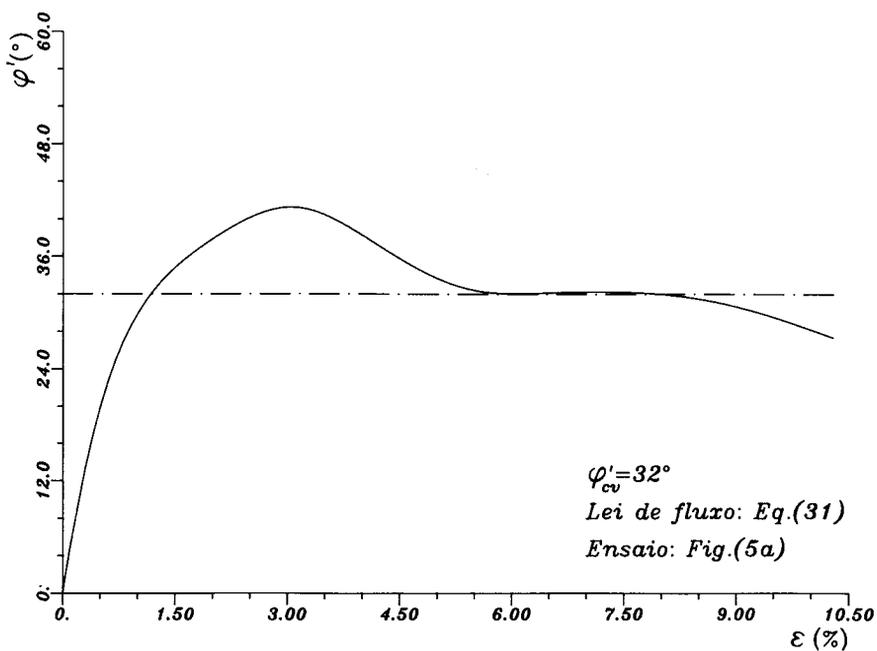


Fig. 10 — Determinação de  $\phi'_{cv}$  utilizando; a) curva ( $\Lambda-Z, \epsilon_0$ ); b) curva dos ângulos de atrito mobilizados (dados do ensaio representado na figura 4)



a



b)

Fig. 11 — Determinação de  $\phi'_{cv}$ , utilizando: a) curva ( $\Lambda - Z, \epsilon_p$ ); b) curva dos ângulos de atrito mobilizados (dados do ensaio representado na figura 5)

## 6 — CONCLUSÃO

Apresentou-se uma hipótese de comportamento reológico de um meio arenoso quando se expande radialmente uma cavidade cilíndrica no seu interior. Tal comportamento reológico é aplicável seja ou não válida a hipótese das pequenas deformações. De facto, a lei de fluxo pode ser expressa em termos de deformações finitas ou deformações infinitesimais. No primeiro caso, os termos de segunda ordem são considerados e, por esta razão, as deformações são exactas sendo, pois, mais precisas do que no segundo caso. Verificou-se que é um modelo rígido-plástico, mas não perfeitamente plástico, uma vez que as deformações elásticas não são consideradas e que, após a cedência, o endurecimento ou o amolecimento das areias pode ser considerado. A aplicação ao ensaio pressiométrico com pressiómetro autoperfurador permitiu determinar a curva dos ângulos de atrito mobilizados ao longo de todo o processo de deformação induzido pela expansão radial da célula pressiométrica. O método gráfico-numérico implementado no programa ANABELA II para resolver o problema não deve ser considerado um óbice uma vez que, hoje em dia, cada vez se recorre mais à computação gráfica como apoio na resolução de problemas em engenharia e em particular em engenharia civil. Finalmente, verificou-se que parece ser possível determinar o valor do ângulo de atrito mobilizado no estado crítico, se este tiver atingido no decorrer do ensaio.

## 7 — AGRADECIMENTOS

O autor agradece ao Eng.<sup>o</sup> Maranha das Neves, Chefe do Departamento de Geotecnia do LNEC, pelo seu apoio e pelas sugestões críticas acerca dos assuntos aqui tratados enquanto este trabalho era realizado.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BAGUELIN, F., J. F. JÉZÉQUEL e D. H. SHIELDS (1978) — *The Pressuremeter and Foundation Engineering*. Trans Tech Publications, Germany.
- CARTER, J. P., J. R. BOOKER, S. K. YEUNG — *Cavity expansion in cohesive frictional soils*. Géotechnique 36, No. 3, pg. 349-358.
- CASSAN, M. (1960) — *Méthode pressiométrique d'étude de sols*. Revue de l'Ingénieur Constructeur, Paris, Mai. pg. 3-16.
- FAHEY, M., M. F. RANDOLPH (1984) — *Effect of disturbance on parameters derived from self-boring pressuremeter test in sand*. Géotechnique 34, No. 1, pg. 81-97.
- FAHEY, M. (1986) — *Expansion of a thick cylinder of sand: a laboratory simulation of the pressuremeter test*. Géotechnique 36, No. 3, pg. 397-424.
- FUNG, Y. C. (1965) — *Foundations of solid mechanics*. Prentice, New Jersey.

- GIBSON, R. E., W. F. ANDERSON (1961) — *In situ measurements of soil properties with the Pressuremeter*. Civil Engineering Pub. Wks Review, vol. 56, n.º 658, May, 615-618.
- HANSEN, B. (1958) — *Line ruptures regarded as narrow rupture zones. Basic equations based on kinematic considerations*. Proc. Conf. Earth Pressure Problems, Brussels, Vol. 1, pp. 39-48.
- HILL, R. (1950) — *The mathematical theory of plasticity*. University Press, Oxford.
- HUGHES, J. M. O., C. P. WROTH, D. WINDLE (1977) — *Pressuremeter tests on sands*. Géotechnique 27, No. 4, pg. 455-477.
- JEWELL, R. J., M. FAHEY, C. P. WROTH (1980) — *Laboratory studies of the pressuremeter test in sands*. Géotechnique 30, No. 4, pg. 507-531.
- LADANYI, B. (1961) — *Étude théorique et expérimentale de l'expansion dans un sol pulvérulent d'une cavité présentant une symétrie sphérique au cylindrique*. Annales des Travaux Publics de Belgique, Bruxelles, n.º 2 pg. 105-148 e n.º 4 pg. 365-406.
- LADANYI, B. (1963) — *Évaluations of pressuremeter tests in granular soils*. Proceedings of the Second Pan American Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, Brasil, Vol. 1 pg. 3 -20
- LADANYI, B. (1972) — *In situ Determination of Undrained Stress-Strain Behaviour of Sensitive Clays With the Pressuremeter*. Canadian Geotechnical Journal, Vol. 9, n.º 3, August, pg. 313-319.
- MARANHA DAS NEVES, E. (1965) — *Os Estados Críticos e a Utilização dos Modelos Elasto-Plástico e Rígido-Plásticos em Mecânica dos Solos*. Equilíbrios Limites e Estados Críticos, Curso 110, Vol. 2, LNEC, Lisboa.
- MÉNARD, L. (1957) — *Mesure in situ des propriétés physiques des sols*. Annales des Ponts et Chaussées, Paris, n.º 14, Mai-Juin, pg. 357-377.
- NÁDAI, A. (1931) — *Plasticity*. Chap. 29 In *Theory of Flow and Fracture of Solids* McGraw-Hill Book Co., New York.
- ROWE, P. W. (1962) — *The Stress-dilatancy relation for static equilibrium of an assembly of particles in contact*. Proceedings of the Royal Soc. London, Series A, Vol. 269, pg. 500-527.
- ROWE, P. W. (1971) — *Theoretical meaning and observed values of deformation parameters for Soil*. Proc. Roscoe Mem. Symp, pg. 143-194.
- SOUSA COUTINHO, A. G. (1985) — *Teoria e Prática do Pressiómetro Autoperfurador*. Tese de Mestrado em Mecânica dos Solos, Universidade Nova de Lisboa.
- SOUSA COUTINHO, A. G. (1987a) — *Teoria de Interpretação de Ensaios com Pressiómetro Autoperfurador*. Geotecnia 49, pg. 49-77.
- SOUSA COUTINHO, A. G. (1987b) — *An Interpretation Method of Selfboring Pressuremeter Tests*. 1.ª Conferência de Jovens Engenheiros Geotécnicos, Copenhaga, 1987.
- SOUSA COUTINHO (1988a) — *Theories for the interpretation of pressuremeter expansion tests*. Relatório interno do Comité Técnico Europeu para Pressiómetro. A ser publicado como Memória do LNEC.
- SOUSA COUTINHO, A. G. (1988b) — *Uma técnica numérica de resolução da equação de Palmer*. Geotecnia 52, pg. 25-41.
- VESIC, A. S. (1972) — *Expansion of cavities in infinite soil mass*. Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE Vol. 98 N.º SM3, March pg. 265-290.
- WINDLE, D. (1976) — *In situ testing of soils with a self-boring pressuremeter*. PhD thesis, Cambridge University.
- WROTH, C. P., D. WINDLE (1975) — *Analysis of the pressuremeter test allowing for volume change*. Géotechnique 25, No. 3, pg. 598-604.
- WROTH, C. P. (1984) — *The interpretation of in situ soil tests*. Géotechnique 34 No. 4, pg. 449-489.

Expansão Radial de Cavidades Cilíndricas em Meios Arenosos:

Aplicação ao Ensaio Pressiométrico

Pág.	Linha	Onde se lê	Deve ler-se
6	5	$\sigma_r = \frac{1}{2} \frac{(d\rho)^2 - (d_r)^2}{(d\rho)^2}$	$\alpha_r = \frac{1}{2} \frac{(d\rho)^2 - (dr)^2}{(d\rho)^2}$
11	1	seja o mínimo	seja mínimo
15	24	(23) e (24)	(23) e (43)
18	5	abcisas	abcissas
21	26	$\tau'$	$\tau'$
21	26	(neste domínio, $\Lambda < 0$ )	(neste domínio, $\Lambda > 0$ )
30	25	Yeung - Cavity	Yeung (1986) -
31	18	1965	1975