

UM MÉTODO DE EQUILÍBRIO LIMITE PARA A ANÁLISE DA ESTABILIDADE DE TALUDES*

por
RUI CORREIA**

RESUMO — Faz-se a descrição de um método de equilíbrio limite para a análise da estabilidade de taludes, aplicável a superfícies de escorregamento de qualquer forma. O método assegura o cumprimento integral das condições de equilíbrio estático, mas, ao contrário de outros métodos ditos “rigorosos”, permite o cálculo do coeficiente de segurança por intermédio de uma única equação não-linear. Com vista à remoção da indeterminação estática admite-se que a variação da força tangencial de interação entre fatias ao longo da massa potencialmente instável é definida por uma função (designada por função de interação tangencial) especificada previamente. Sugere-se a utilização de uma forma particular desta função. São apresentados dois exemplos de aplicação do método descrito, os quais são aproveitados para fazer comparações com o método de Morgenstern e Price.

SYNOPSIS — A limit equilibrium method for slope stability analysis, applicable to potential slip surfaces of any shape, is described. The method ensures that static equilibrium is fully satisfied, but unlike other “accurate” methods it permits the calculation of the factor of safety by means of the solution of a single non-linear equation. In order to remove the static indeterminacy, the pattern of variation of the interslice shear force across the sliding mass is assumed to be specified. A particular shape of the interslice shear force distribution is proposed. Two example problems, which illustrate the application of the method, are presented. Comparisons are made with the Morgenstern-Price method.

1 — INTRODUÇÃO

Apesar dos avanços que se têm verificado no domínio da implementação de modelos constitutivos complexos pelo método dos elementos finitos, os métodos que se baseiam no conceito de equilíbrio limite continuam a ser largamente usados nas análises de estabilidade de taludes. Na realidade, estes métodos fornecem informações quantitativas muito valiosas acerca do risco de ocorrência de roturas globais por corte no interior de maciços de terreno, e isso é conseguido sem que o volume de dados e o esforço de computação ultrapassem limites relativamente modestos.

São em grande número os métodos de equilíbrio limite que têm sido propostos, diferindo entre si, entre outros aspectos, na forma da superfície de deslizamento (circular ou de forma arbitrária), nas equações de equilíbrio estático que são cumpridas e nas hipóteses feitas com vista a tornar o problema estaticamente determinado.

* Versão em português de um artigo apresentado no 5º. Simpósio Internacional sobre Escorregamentos de Terrenos, Lausana, Julho de 1988.

** Engenheiro civil, Investigador Principal do Laboratório Nacional de Engenharia Civil.

Para obter o tradicional coeficiente de segurança num problema de estabilidade, há que escolher entre métodos simplificados e métodos ditos “rigorosos”. Os primeiros (de que é exemplo o método de Bishop simplificado) não garantem o cumprimento de todas as condições de equilíbrio, mas permitem estabelecer uma formulação em termos de uma única equação numérica, não-linear, em que a incógnita é o coeficiente de segurança; os segundos (de que é exemplo o método de Morgenstern e Price) garantem o cumprimento do equilíbrio, mas por outro lado impõem a necessidade de resolver simultaneamente duas equações numéricas (Morgenstern e Price, 1965) (Spencer, 1967) (Fredlund *et al.*, 1981) o que traz como consequência um aumento significativo quer do esforço computacional quer da propensão para a existência de problemas de convergência no processo iterativo de resolução.

O objectivo do presente artigo é descrever um método de equilíbrio limite que garante o cumprimento de todas as condições de equilíbrio estático e ao mesmo tempo permite o cálculo do coeficiente de segurança por intermédio da resolução de uma única equação numérica não-linear. O método baseia-se na divisão da massa potencialmente instável em fatias de faces verticais e é aplicável a superfícies de deslizamento de qualquer forma.

2 — DEFINIÇÃO DO PROBLEMA

Pretende-se avaliar a estabilidade de uma massa de terreno potencialmente instável, limitada por uma superfície de deslizamento de qualquer forma e pela superfícies do terreno. As forças que actuam em cada fatia são as seguintes (fig. 1):

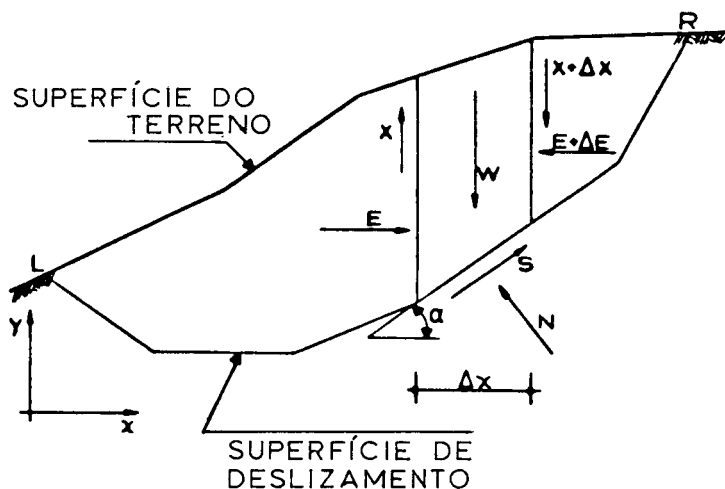


Fig. 1 — Forças que actuam em cada fatia

- Peso total (W)
- Resultante das tensões normais totais na base da fatia (N). Esta força tem duas componentes, que são a resultante das tensões efectivas e a resultante das tensões neutras:

$$N = N' + u \Delta x \sec \alpha \quad (1)$$

onde u é o valor médio das pressões neutras na base da fatia, Δx é a largura da fatia e α é o ângulo que a base da mesma faz com a horizontal;

- Resultante das tensões tangenciais actuando na base da fatia (S);
- Forças normal (E) e tangencial (X) de interacção entre fatias, que são as resultantes respectivamente das tensões normais totais e das tensões tangenciais actuando em cada um dos dois lados verticais da fatia.

O problema da estabilidade pode pôr-se do seguinte modo: pretende-se conhecer o coeficiente de redução dos parâmetros de resistência ao corte de todos os materiais intersectados pela superfície de deslizamento tal que a massa de solo potencialmente instável esteja em estado de equilíbrio limite; este coeficiente é designado por coeficiente de segurança. Diz-se que uma massa de terreno está em estado de equilíbrio limite quando se verificam todas as condições de equilíbrio e ao mesmo tempo a resistência ao corte está totalmente mobilizada em qualquer ponto da superfície de deslizamento.

3 — REMOÇÃO DA INDETERMINAÇÃO ESTATICA

É sabido (veja-se por exemplo Whitman e Bailey, 1967) que o grau de indeterminação estática envolvido no problema acima descrito é $n - 2$, onde n é o número de fatias (está-se a admitir que a largura de cada fatia é suficientemente pequena para que seja razoável fazer coincidir o ponto de aplicação de N com o ponto médio da base da fatia). As hipóteses que têm sido feitas para tornar o problema estaticamente determinado podem ser divididas da seguinte forma: (i) hipóteses que dizem respeito à distribuição das tensões normais ao longo da superfície de deslizamento (Bell, 1968); (ii) hipóteses que dizem respeito à posição da linha de impulso (Janbu, 1954); (iii) hipóteses que dizem respeito à distribuição das forças de interacção. Um exemplo de utilização de uma hipótese do terceiro grupo é o método de Morgenstern e Price (1965), no qual se admite que as forças normal e tangencial de interacção entre fatias estão relacionadas através da introdução de uma função especificada e de um parâmetro incógnito adicional.

O método descrito no presente artigo recorre a uma hipótese que também pertence ao terceiro dos grupos atrás mencionados. Mas em vez da relação entre a força normal e a força tangencial de interacção entre fatias, o objecto da hipótese é a própria distribuição da força tangencial de interacção

$$X = X_{max} f(x) \quad (2)$$

Na equação (2) $f(x)$ é uma função (da coordenada horizontal) especificada previamente, que define qualitativamente a variação da força tangencial de interacção e X_{max} é um parâmetro de escala cujo valor tem de ser calculado no processo global de resolução do problema. É evidente que se a função de interacção tangencial, $f(x)$, for escolhida por forma a que o seu valor máximo seja igual à unidade, então X_{max} representa o máximo valor que toma a força tangencial de interacção. Embora numa forma diferente, a ideia básica que está na origem da equação (2) foi introduzida pela primeira vez por Sarma (1973).

Em princípio, a única condição a ser satisfeita pela função de interacção tangencial é que deve anular-se em ambas as extremidades da superfície de deslizamento (pontos L e R na fig. 1). Esta condição implica que

$$\Sigma \Delta f = 0 \quad (3)$$

onde Δf é a diferença entre os valores de f nos lados direito e esquerdo de cada fatia e o somatório se estende a todas as fatias.

4 — FORMULAÇÃO

Usando o critério de resistência ao corte de Mohr-Coulomb, a força tangencial na base de cada fatia é dada por

$$S = \frac{c'}{F} \Delta x \sec \alpha + N' \frac{\tan \phi'}{F} \quad (4)$$

onde c' e ϕ' são a coesão e o ângulo de atrito interno, em termos de tensões efectivas, e F é o coeficiente de segurança.

As duas condições de equilíbrio de forças para cada fatia fornecem:

$$W + \Delta X = N \cos \alpha + S \sin \alpha \quad (5)$$

$$\Delta E = -N \sin \alpha + S \cos \alpha \quad (6)$$

Usando as equações (1), (4), (5) e (6) obtém-se:

$$\Delta E = \frac{(W + \Delta X) (\tan \phi' - F \tan \alpha) + (c' - u \tan \phi') \Delta x \sec^2 \alpha}{F + \tan \phi' \tan \alpha} \quad (7)$$

A condição de equilíbrio de forças, segundo a direcção horizontal, para toda a massa de terreno, fornece

$$\Sigma (-N \sin \alpha + S \cos \alpha) = \Sigma \Delta E = 0 \quad (8)$$

Tomando momentos em torno de um ponto arbitrário C , com coordenadas x_c e y_c , a condição de equilíbrio de momentos para toda a massa de terreno fornece

$$\Sigma (W - N \cos \alpha - S \sin \alpha) (x - x_c) + \Sigma (-N \sin \alpha + S \cos \alpha) (y - y_c) = 0 \quad (9)$$

onde x e y são as coordenadas do ponto médio da base de cada fatia.

Introduzindo as equações (5) e (6), a equação (9) transforma-se em

$$- \Sigma \Delta X (x - x_c) + \Sigma \Delta E (y - y_c) = 0 \quad (10)$$

A partir da equação (2) chega-se a

$$\Delta X = X_{\max} \Delta f \quad (11)$$

e a partir das equações (3) e (8) chega-se a

$$\Sigma \Delta f x_c = x_c \Sigma \Delta f = 0 \quad (12)$$

$$\Sigma \Delta E y_c = y_c \Sigma \Delta E = 0 \quad (13)$$

Agora, usando as equações (7), (11), (12) e (13), as equações (8) e (10) podem ser transformadas em

$$A_1 X_{\max} + A_2 = 0 \quad (14)$$

$$A_3 X_{\max} + A_4 = 0 \quad (15)$$

onde A_1 , A_2 , A_3 e A_4 são funções de F , dadas por

$$A_1 = \Sigma \Delta f \frac{\tan \phi' - F \tan \alpha}{F + \tan \phi' \tan \alpha} \quad (16)$$

$$A_2 = \Sigma \frac{W (\tan \phi' - F \tan \alpha) + (c' - u \tan \phi') \Delta x \sec^2 \alpha}{F + \tan \phi' \tan \alpha} \quad (17)$$

$$A_3 = \Sigma \Delta f \frac{\tan \phi' - F \tan \alpha}{F + \tan \phi' \tan \alpha} y - \Sigma \Delta f x \quad (18)$$

$$A_4 = \Sigma \frac{W (\tan \phi' - F \tan \alpha) + (c' - u \tan \phi') \Delta x \sec^2 \alpha}{F + \tan \phi' \tan \alpha} y \quad (19)$$

A partir das equações (14) e (15) chega-se a

$$\psi(F) = A_1 A_4 - A_2 A_3 = 0 \quad (20)$$

$$X_{\max} = -A_2 / A_1 \quad (21)$$

O coeficiente de segurança pode pois ser obtido através da solução da equação numérica não-linear (20). É possível modificar esta equação para lhe dar a forma $F = g(F)$, onde $g(F)$ é uma função de F , mas o processo de iteração resultante mostrou ser divergente. Pelo contrário, o método de Newton-Raphson mostrou ser muito eficiente (isto é, os processos iterativos que resultam da sua aplicação convergem rapidamente) na resolução da equação (20).

Logo que o coeficiente de segurança e o valor de X_{\max} tenham sido calculados, é possível determinar todas as forças tangenciais de interacção (por meio da equação (2)) e todas as forças normais de interacção (somando os valores de E , dados pela equação (7)). É pois também possível, usando a condição de equilíbrio de momentos de cada fatia, obter a localização dos pontos de aplicação das forças normais de interacção (isto é, a linha de impulso).

5 — ESCOLHA DA FUNÇÃO DE INTERACÇÃO TANGENCIAL

Tal como já foi referido, de um ponto de vista estritamente matemático a função de interacção tangencial a ser adoptada num dado problema pode ter qualquer forma, desde que tome valores nulos nas extremidades. No entanto, só as funções que produzam soluções fisicamente admissíveis devem ser consideradas. Os critérios mais comuns de admissibilidade das soluções são (Morgenstern e Price, 1965): (i) a condição de rotura por corte não deve ser violada dentro da massa de terreno, o que significa que a força tangencial de interacção não deve exceder a resistência ao corte mobilizável nas faces das fatias; (ii) a linha de impulso deve estar, em toda a sua extensão, dentro da massa de terreno cuja estabilidade se está a investigar.

A escolha da função de interacção tangencial deveria preferencialmente basear-se em estudos teóricos (por exemplo análises elasto-plásticas por elementos finitos) com o objectivo de determinar a distribuição de tensões tangenciais ao longo de linhas verticais situadas no interior de taludes em estado de colapso iminente. Aparentemente ainda não foram publicados estudos deste tipo na literatura. Existem já estudos em regime elástico com o objectivo de obter elementos para a escolha da função que relaciona as forças tangencial e normal de interacção (Fan *et al.*, 1986), mas os resultados publicados desses estudos não contemplam a distribuição da própria força tangencial de interacção. Na ausência de orientação teórica bem definida, a escolha da função de interacção tangencial tem de se basear ou na experiência de utilização de várias funções ou então simplesmente na formulação de hipóteses razoáveis.

A experiência do autor tem mostrado que a função em forma de sino representada na fig. 2 permite a obtenção de resultados fisicamente admissíveis numa larga variedade de problemas de estabilidade de taludes. A função é simétrica e é composta por três segmentos parabólicos.

Na fig. 2 a função de interacção tangencial está definida em termos da coordenada horizontal adimensional

$$\xi = \frac{x - x_L}{x_R - x_L} \quad (22)$$

onde x_L e x_R são os valores de x nos pontos L e R da fig. 1.

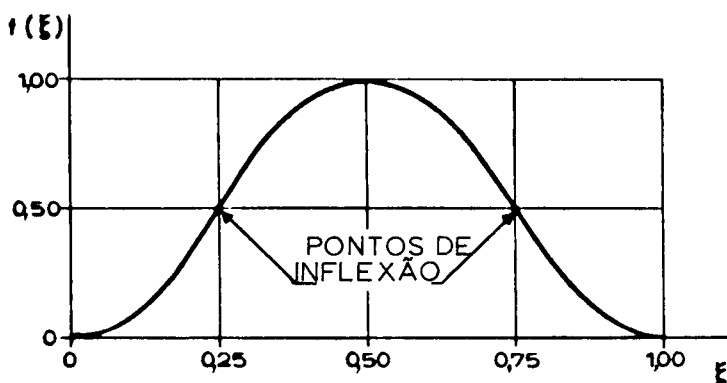


Fig. 2 — Forma proposta para a função de interacção tangencial

A experiência do autor tem também mostrado que o coeficiente de segurança obtido por intermédio do presente método é relativamente pouco sensível a variações da função de interacção tangencial, admitindo que só são consideradas hipóteses razoáveis. Esta conclusão está de acordo com outras análogas que têm sido formuladas a propósito de outros métodos “rigorosos” (Bishop, 1955) (Morgenstern e Price, 1965).

6 — EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

6.1 — Talude homogéneo

O primeiro exemplo (ver fig. 3) considera uma superfície de escorregamento não-circular num talude homogéneo sem pressões neutras. As propriedades do solo são: γ (peso volúmico) = 20 kN/m³; $\phi' = 28^\circ$; $c' = 2$ kPa.

Este problema de estabilidade foi resolvido por intermédio do método descrito no presente artigo (adoptando a função de interacção tangencial representada na fig. 2) e também por intermédio do método de Morgenstern e Price (para duas hipóteses distintas). Os resultados numéricos foram obtidos num computador VAX 8700, usando dois programas (um para cada método) desenvolvidos no LNEC.

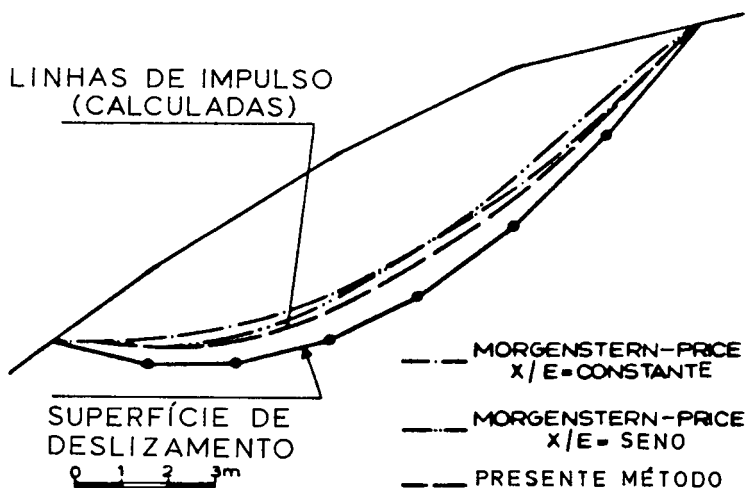


Fig. 3 — Talude homogêneo: geometria e linhas de impulso

Os coeficientes de segurança e parâmetros de escala calculados são (14 fatias):

Método apresentado — $F = 1,449$

$X_{\max} = 45,4 \text{ kN/m}$

Método de Morgenstern e Price

X/E em curva de seno — $F = 1,467$

$\lambda = 0,531$

X/E constante — $F = 1,472$

$\lambda = 0,424$

As figs. 3 e 4 mostram outros aspectos das soluções: a localização das linhas de impulso (fig. 3) e a distribuição, sob forma adimensional, da força tangencial de interacção (fig. 4).

Qualquer das três soluções mostrou ser fisicamente admissível no que diz respeito aos critérios atrás mencionados.

6.2 — Talude não-homogêneo

O segundo exemplo (ver fig. 5) diz respeito a uma superfície de escorregamento compósita num talude não-homogêneo com pressões neutras não-nulas. A superfície de escorregamento é formada por uma fenda vertical de tracção (LA), dois segmentos circulares (AB e CR) e um segmento recto (BC) que se desenvolve ao longo de um estrato inclinado de solo fraco. As propriedades dos solos são:

$$M_1 — \gamma = 18,8 \text{ kN/m}^3; \phi' = 24^\circ; c' = 25 \text{ kPa}$$

$$M_2 — \gamma = 18,8 \text{ kN/m}^3; \phi' = 12^\circ; c' = 0$$

e as pressões neutras são definidas por meio da linha piezométrica representada na fig. 5.

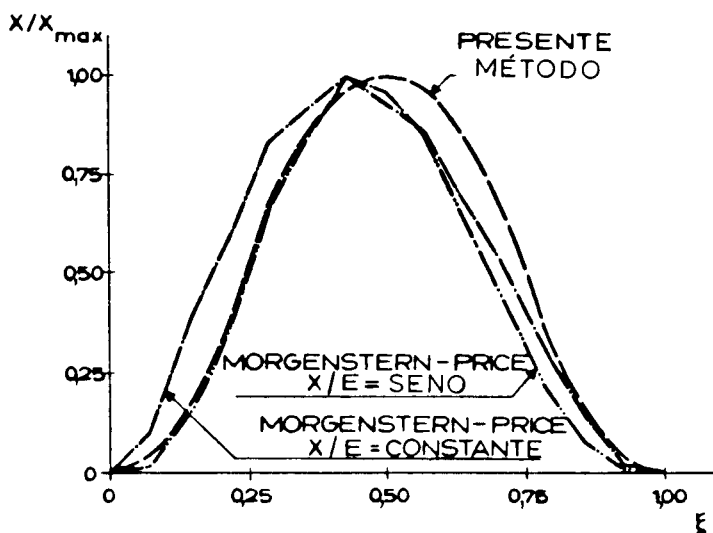


Fig. 4 — Talude homogêneo: distribuição adimensional da força tangencial de interação

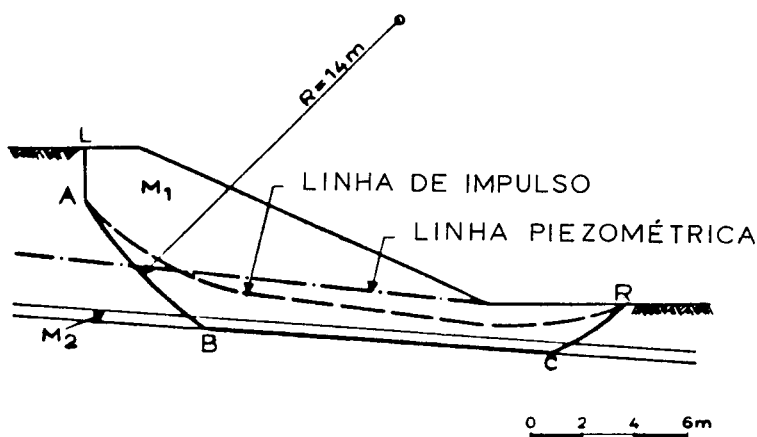


Fig. 5 — Talude não-homogêneo: geometria e linha de impulso

Para resolver este problema de estabilidade fez-se novamente uso quer do presente método quer do método de Morgenstern e Price.

Os coeficientes de segurança e parâmetros de escala calculados são (50 fatias):

Método apresentado — $F = 1,631$ $X_{\max} = 18,7 \text{ kN/m}$

Método de Morgenstern e Price (X/E em curva de seno)

— $F = 1,656$ $\lambda = 0,145$

A linha de impulso obtida por intermédio do presente método está representada na fig. 5; por causa da sua grande proximidade, a linha de impulso obtida pelo método de Morgenstern e Price não está respresentada nessa figura. Na fig. 6 estão representadas as duas distribuições adimensionais da força tangencial de interacção. Deve notar-se que a distribuição correspondente ao método de Morgenstern e Price é verdadeiramente um resultado dos cálculos, enquanto que a distribuição correspondente ao presente método é, de acordo com a equação (2), igual à função de interacção tangencial.

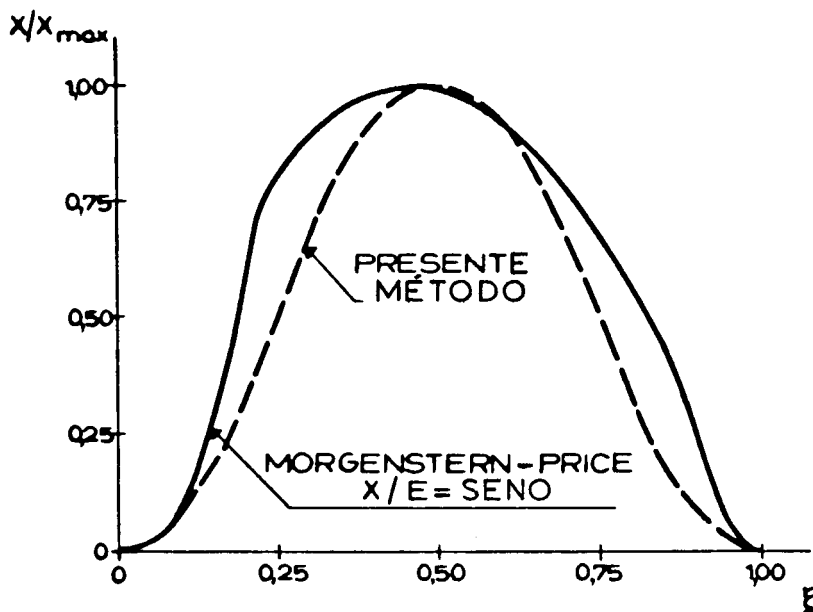


Fig. 6 — Talude não-homogéneo: distribuição adimensional da força tangencial de interacção

Tal como no primeiro exemplo, qualquer das soluções mostrou ser fisicamente admissível.

No que diz respeito ao trabalho computacional, o tempo de CPU gasto utilizando o presente método foi cerca de um terço do tempo gasto utilizando o método de Morgenstern e Price (os critérios de paragem dos processos iterativos para os dois métodos tinham o mesmo grau de exigência). Resultados de outras análises comparativas (não descritas no presente artigo) mostraram que esta relação de 1 para 3 é representativa.

7 — CONCLUSÕES

7.1 — O método descrito no presente artigo satisfaz todas as condições de equilíbrio estático e é portanto tão rigoroso quanto um método de equilíbrio limite pode aspirar a ser. Ao mesmo tempo, o método mantém a principal vantagem dos métodos simplificados, que é a possibilidade de obter o coeficiente de segurança através da resolução de uma única equação numérica.

7.2 — A equação numérica resultante da formulação do método pode ser resolvida de forma eficiente por meio da técnica iterativa de Newton-Raphson.

7.3 — Na aplicação do método é necessário estabelecer uma hipótese sobre a forma da variação da força tangencial de interacção ao longo da massa potencialmente instável. Só após a realização de estudos paramétricos em regime elasto-plástico será possível dispor de critérios bem definidos para uma correcta formulação dessa hipótese em cada problema a resolver.

7.4 — Foi proposta uma forma particular (em forma de sino) da função de interacção tangencial, forma essa que pode ser usada sempre que não se disponha de hipótese mais adequada. A forma proposta para a função de interacção tangencial permite obter resultados satisfatórios em vários tipos de problemas de estabilidade, tal como ficou ilustrado nos dois exemplos de aplicação apresentados.

7.5 — Usando hipóteses razoáveis, o presente método e o método de Morgenstern e Price fornecem coeficientes de segurança muito semelhantes. O método descrito é contudo bastante mais económico no que diz respeito aos tempos de cálculo necessários.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BELL, J. M. (1968) — *General slope stability analysis*. ASCE JSMFD 94 (SM6): 1253-1270.
- BISHOP, A. W. (1955) — *The use of the slip circle in the stability analysis of slopes*. "Geotechnique" 5 (1): 7-17.
- FAN, K., FREDLUND, D. G., WILSON, G. W. (1986) — *An interslice force function for limit equilibrium slope stability analysis*. "Canadian Geotechnical Journal" 23 (3): 287-296.
- FREDLUND, D. G., KRAHN, J., PUFAHL, D. E. (1981) — *The relationship between limit equilibrium slope stability methods*. Proc. 10th ICSMFE 3: 409-416, Estocolmo.
- JANBU, N. (1954) — *Application of composite slip surfaces for stability analysis*. Proc. European Conf. on Stability of Earth Slopes 3: 43-49, Estocolmo.
- MORGENSTERN, N. R., PRICE, V. E. (1965) — *The analysis of the stability of general slip surfaces*. "Geotechnique" 15 (1): 79-93.
- MORGENSTERN, N. R., PRICE, V. E. (1967) — *A numerical method for solving the equations of stability of general slip surfaces*. "Computer Journal" 9 (4): 388-393.
- SARMA, S. K. (1973) — *Stability analysis of embankments and slopes*. "Geotechnique" 23 (3): 423-433.
- SPENCER, E. (1967) — *A method of analysis of the stability of embankments assuming parallel interslice forces*. "Geotechnique" 17 (1): 11-26.
- WHITMAN, R. W., BAILEY, W. A. (1967) — *Use of computers for slope stability analysis*. ASCE JSMFD 93 (SM4): 475-498.