

COMPORTAMENTO ELASTO-PLÁSTICO DE SOLOS — ANÁLISE DE UM MODELO NÃO ASSOCIADO*

Elastoplastic Behaviour of Soils — Analysis of a non Associate Model

por

ROGÉRIO A.F. MARTINS**

M. HELENA F.M. BARROS***

LUCIA M.J.S. DINIS**

RESUMO — O comportamento elasto-plástico de solos do tipo não associado é analisado com base na definição de um material equivalente com comportamento do tipo associado.

Esta formulação, levando a sistemas de equações simétricas, é comparada com outras formulações, tanto no que diz respeito ao resultado da análise como ao número de iterações necessárias até à solução final.

É posta em evidência a diferença significativa entre análises realizadas com modelos associados e não associados.

SYNOPSIS — The elastoplastic behaviour of non associate soils is analysed through the definition of an equivalent material with associate behaviour.

This formulation, leading to symmetrical systems, is compared with other formulations both in terms of results and iterations needed for convergence.

The significant differences between associate and non associate models are emphasised.

1 — INTRODUÇÃO

Os modelos de plasticidade associada nem sempre representam com a necessária precisão o comportamento estrutural de solos, com frequência sendo necessário recorrer a modelos de plasticidade não associada.

Em plasticidade não associada, o potencial plástico, de que deriva a lei de escoamento, não coincide com a superfície de cedência, e a correspondente formulação em termos de elementos finitos leva a sistemas de equações não simétricos.

* Trabalho recebido em Março de 1986. A discussão do trabalho está aberta por um período de três meses.

** Doutor(a) em Engenharia Civil, Departamento de Engenharia Mecânica da Faculdade de Engenharia do Porto.

*** Engenheira Civil, Secção Autónoma de Engenharia Civil, da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra.

Esta assimetria não é relevante se na análise for usado, em qualquer das suas formas, o método da rigidez inicial. Este método, no entanto, é de convergência lenta, sobretudo quando o solo atinge um elevado número de zonas plásticas.

A utilização de sistemas resolventes não simétricos torna a análise demasiado cara uma vez que um problema não linear é resolvido através da resolução sucessiva de diversos sistemas lineares.

Neste trabalho faz-se a implementação de um método de simetização do sistema de equações proposto por G.N. Pande e St. Pietruszczak (1), método este que, tanto quanto é do nosso conhecimento, não tem sido objecto de aplicação e experimentação numérica.

Na secção (2), a partir dos princípios fundamentais da análise elastoplástica é estabelecida a lei constitutiva para um material não associado. Na secção (3) são formuladas as equações de equilíbrio em termos de elementos finitos, sendo na secção (4) descrito o algoritmo de simetização. Na secção (5) é apresentado um exemplo numérico de aplicação. Trata-se de uma sapata a actuar numa massa de solo considerado em estado plano de deformação.

2 – RELAÇÃO CONSTITUTIVA ELASTO-PLÁSTICA

2.1 – Aditividade

a) O incremento de deformação total ($d\epsilon$) é a soma do incremento de deformação elástica ($d\epsilon^e$) com o incremento de deformação plástica ($d\epsilon^p$):

$$\{d\epsilon\} = \{d\epsilon^e\} + \{d\epsilon^p\} \quad (1)$$

b) O incremento de deformação elástica relaciona-se com o incremento de tensão, ($d\sigma$), através da lei de Hooke generalizada:

$$\{d\epsilon^e\} = (D)^{-1} \{d\sigma\} \quad (2)$$

sendo (D) a matriz de elasticidade.

c) O incremento de deformação plástica relaciona-se com o potencial plástico Q através a seguinte lei de escoamento:

$$(d\epsilon^p) = \left\{ \frac{\partial Q}{\partial (\sigma)} \right\} d\lambda = \{b\} d\lambda \quad (3)$$

sendo $d\lambda$ um infinitésimo não negativo (multiplicador plástico) e $\{b\}$ um vector escoamento definitivo para cada estado de tensão e dado por:

$$\{b\} = \left\{ \frac{\partial Q}{\partial(\sigma)} \right\} = \left\{ \frac{\partial Q}{\partial\sigma_x}, \frac{\partial Q}{\partial\sigma_y}, \dots, \frac{\partial Q}{\partial\tau_{zx}} \right\}^T \quad (4)$$

d) De acordo com (1) (2) e (3) o incremento de deformação total é dado por

$$\{d\epsilon\} = (D)^{-1} \{d\sigma\} + \{b\} d\lambda \quad (5)$$

Esta equação traduz na forma diferencial a relação constitutiva elastoplástica, onde ainda não está definido o multiplicador plástico $d\lambda$.

2.2 – Consistência

a) Devendo as tensões obedecer à constrição imposta pela superfície de cêdência, isto é:

$$F(\{\sigma\}, H(h)) = 0 \quad (6)$$

deverá ser $dF = 0$, ou seja

$$dF = \left\{ \frac{\partial F}{\partial(\sigma)} \right\}^T \{d\sigma\} + \frac{\partial F}{\partial h} \left\{ \frac{\partial h}{\partial(\epsilon^p)} \right\}^T \{d\epsilon^p\} = 0 \quad (7)$$

Definindo o vector

$$\{a\} = \left\{ \frac{\partial F}{\partial(\epsilon)} \right\} = \left\{ \frac{\partial F}{\partial\sigma_x}, \frac{\partial F}{\partial\sigma_y}, \dots, \frac{\partial F}{\partial\tau_{zx}} \right\}^T \quad (8)$$

e entrando com o valor de $(d\epsilon^p)$ dado por (3), obtém-se:

$$\{a\}^T \{d\sigma\} + \frac{\partial F}{\partial h} \left\{ \frac{\partial h}{\partial(\epsilon^p)} \right\}^T \{b\} d\lambda = 0 \quad (9)$$

com o endurecimento definido por

$$H(h) = - \frac{\partial F}{\partial h} \left\{ \frac{\partial h}{\partial(\epsilon^p)} \right\}^T \{b\} \quad (10)$$

resulta

$$\{a\}^T \{d\sigma\} - H d\lambda = 0 \quad (11)$$

ou

$$\{a\}^T \{d\sigma\} = H d\lambda \quad (12)$$

expressão que será usada em (2.3) para o cálculo de $d\lambda$.

2.3 – Multiplicador Plástico

Premultiplicando (5) por $\{a\}^T \{D\}$, entrando com o valor de $\{a\}^T \{d\sigma\}$ dado por (12) e simplificando resulta sucessivamente:

$$\{a\}^T \{D\} \{d\epsilon\} = \{a\}^T \{D\} \{D\}^{-1} \{d\sigma\} + \{a\}^T \{D\} \{b\} d\lambda \quad (13)$$

$$\{a\}^T \{D\} \{d\epsilon\} = \{a\}^T \{d\sigma\} + \{a\}^T \{D\} \{b\} d\lambda \quad (14)$$

$$\{a\}^T \{D\} \{d\epsilon\} = H d\lambda + \{a\}^T \{D\} \{b\} d\lambda \quad (15)$$

$$\{a\}^T \{D\} \{d\epsilon\} = \left(H + \{a\}^T \{D\} \{b\} \right) d\lambda \quad (16)$$

Daqui se obtém o multiplicador plástico $d\lambda$ que é dado pela seguinte expressão:

$$d\lambda = \frac{\{a\}^T \{D\}}{H + \{a\}^T \{D\} \{b\}} \{d\epsilon\} \quad (17)$$

2.4 – Matriz Elastoplástica

Substituindo o valor de $d\lambda$ dado pela expressão (17) na relação constitutiva (5) obtém-se:

$$\{d\epsilon\} = \{D\}^{-1} \{d\sigma\} + \frac{\{b\} \{a\}^T \{D\}}{H + \{a\}^T \{D\} \{b\}} \{d\epsilon\} \quad (18)$$

Esta expressão pode ser sucessivamente modificada para

$$\{D\}^{-1} \{d\sigma\} = \left[(I) - \frac{\{b\} \{a\}^T \{D\}}{H + \{a\}^T \{D\} \{b\}} \right] \{d\epsilon\} \quad (19)$$

$$\{d\sigma\} = \left[\{D\} - \frac{\{D\} \{b\} \{a\}^T \{D\}}{H + \{a\}^T \{D\} \{b\}} \right] \{d\epsilon\} \quad (20)$$

$$\{d\sigma\} = \{D_{ep}\} \{d\epsilon\} \quad (21)$$

Esta expressão traduz, na forma diferencial, a relação constitutiva elastoplástica sendo a matriz elastoplástica (D_{ep}) dada por:

$$\{D\}_{ep} = \{D\} - \frac{\{D\} \{b\} \{a\}^T \{D\}}{H + \{a\}^T \{D\} \{b\}} \quad (22)$$

Note-se que, ao contrário do que acontece na Teoria da Elasticidade para a matriz de elasticidade $\{D\}$, a matriz elastoplástica $\{D_{ep}\}$ é função do estado de tensão através dos vectores $\{b\}$ e $\{a\}$.

3 – EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO

a) Considere-se que uma estrutura em equilíbrio, sujeita a forças de massa $\{X\} = \{X, Y, Z\}^T$ e forças nodais $\{P\} = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}^T$, é submetida a um campo de deslocamentos virtuais $\{\delta u\} = \{\delta u, \delta v, \delta w\}^T$ que origina deformações virtuais $\{\delta \epsilon\}$.

b) Nestas condições o trabalho virtual realizado pelas forças exteriores é dado por

$$\delta W_E = \int_V \{\delta u\}^T \{X\} dV + \{\delta d\}^T \{P\} \quad (23)$$

em que $\{\delta d\}$ representa o vector de deslocamentos virtuais dos nós. O trabalho virtual de deformação é dado por

$$\delta U = \int_V \{\delta \epsilon\}^T \{\sigma\} dV \quad (24)$$

c) Sendo pelo Princípio dos Trabalhos Virtuais $\delta W_E = \delta U$, e fazendo as aproximações habituais do Método dos Elementos Finitos, isto é:

$$\{\delta u\} = \{N\} \{\delta d\}, \quad \{\delta \epsilon\} = \{B\} \{\delta d\} \quad (25)$$

em que $\{N\}$ é uma matriz de funções de forma e $\{B\}$ a matriz de deformações, resulta:

$$\int_V \{\delta d\}^T \left(\{B\}^T \{\sigma\} - \{N\}^T \{X\} \right) dV - \{\delta d\}^T \{P\} = 0 \quad (26)$$

Como o campo de deslocamentos virtuais considerado é arbitrário, obtém-se

$$\int_V \{B\}^T \{\sigma\} dV - \int_V \{N\}^T \{X\} dV - \{P\} = 0 \quad (27)$$

d) Para um problema elasto-plástico esta equação não é satisfeita sistematicamente em todos os passos de cálculo, sendo

$$\Psi = \int_V \{B\}^T \{\sigma\} dV - \int_V \{N\}^T \{X\} dV - \{P\} \neq 0 \quad (28)$$

Para um dado incremento de carga tem-se

$$\Delta \Psi = \int_V \{B\}^T \{\Delta \sigma\} dV - \left(\int_V \{N\}^T \{\Delta X\} dV + \{\Delta P\} \right) \quad (29)$$

em que o incremento de tensão é definido pela relação constitutiva elastoplástica dada pela equação (21). De (29) e (21) resulta assim:

$$\Delta \Psi = \{K_T\} \{d\} - \left(\int_V \{N\}^T \{\Delta X\} dV + \{\Delta P\} \right) \quad (30)$$

em que $\{K_T\}$ representa a matriz de rigidez tangencial e é dada por

$$\{K_T\} = \int_V \{B\}^T \{D_{ep}\} \{B\} dV \quad (31)$$

3.1 – Assimetria

Para um problema de plasticidade associada o potencial plástico coincide com a superfície de cedência e o vector $\{b\}$ definido por (4) coincide com o vector $\{a\}$ definido por (8). Nestas condições a matriz elastoplástica $\{D_{ep}\}$ resulta, simétrica, sendo por consequência também simétrica a matriz de rigidez tangencial $\{K_T\}$.

Em plasticidade não associada, que mais correctamente traduz o comportamento de solos, a matriz $\{K_T\}$ é não simétrica uma vez que $\{b\} \equiv \{a\}$. Este facto leva, a menos que se use o método da rigidez inicial, à necessidade de usar sistemas resolventes não simétricos.

Por outro lado, o método da rigidez inicial precisa geralmente de um elevado número de iterações até à convergência.

Torna-se assim conveniente a utilização de um algoritmo de simetriação para problemas de plasticidade não associada. O algoritmo implementado (1), usa um conceito de equivalência em que o material real, não associado, é tornado equivalente a um material fictício (material equivalente) que apresenta um comportamento do tipo associado.

4 – SIMETRIZAÇÃO

a) Considerem-se os dois materiais seguintes, ambos com módulo de elasticidade E e coeficiente de Poisson ν :

- Material Real: Não associado ($F \neq Q$) com endurecimento $H = H(h)$ e multiplicador plástico $d\lambda^R$ dado pela expressão (17).
- Material Equivalente: Associado ($F^* = Q^* = Q$) com $Q = Q(\{\sigma\}, H^*)$ sendo H^* o endurecimento equivalente a determinar. Para este material $\{a\} = \{b\}$, vindo o multiplicador plástico $d\lambda^E$ dado por:

$$d\lambda^E = \frac{\{b\}^T \{D\}}{H^* + \{b\}^T \{D\} \{b\}} \{d\epsilon\} \quad (32)$$

b) A equivalência entre os dois materiais resulta de impôr que os correspondentes multiplicadores plásticos são iguais, isto é:

$$\frac{\{a\}^T \{D\} \{d\epsilon\}}{H + \{a\}^T \{D\} \{b\}} = \frac{\{b\}^T \{D\} \{d\epsilon\}}{H^* + \{b\}^T \{D\} \{b\}} \quad (33)$$

simplificando esta equação obtém-se:

$$\begin{aligned} & \{a\}^T \{D\} \{d\epsilon\} H^* + \{b\}^T \{D\} \{b\} \{a\}^T \{D\} \{d\epsilon\} = \\ & = H \{b\}^T \{D\} \{d\epsilon\} + \{a\}^T \{D\} \{b\} \{b\}^T \{D\} \{d\epsilon\} \end{aligned} \quad (34)$$

Definindo um vector $\{c\}$ dado por

$$\{c\}^T = H \{c\}^T + \{a\}^T (D) \{b\} \{b\}^T - \{b\}^T \{D\} \{b\} \{a\}^T \quad (35)$$

resulta para o endurecimento equivalente,

$$H^* = \frac{\{c\}^T \{D\} \{d\epsilon\}}{\{a\}^T \{D\} \{d\epsilon\}} \quad (36)$$

O endurecimento do material equivalente é assim função não só do endurecimento do material real mas também do incremento de deformação $\{d\epsilon\}$.

c) No caso de o material real ser idealmente plástico $H = 0$, vem para $\{c\}$ a seguinte expressão:

$$\{c\}^T = \{a\}^T \{D\} \{b\} \{b\}^T - \{b\}^T \{D\} \{b\} \{a\}^T \quad (37)$$

5 – RESULTADOS NUMÉRICOS

a) Apresentam-se os resultados numéricos obtidos com plasticidade associada e não associada para uma sapata rígida contínua a actuar numa massa de solo considerada em estado plano de deformação. A geometria, dimensões e discretização usada vão indicados na Fig. 1. Foram usados 36 elementos finitos a que correspondem 133 nós e considerou-se um módulo de elasticidade $E = 1 \times 10^6$ e um coeficiente de Poisson $\nu = 0,25$.

b) Usou-se o critério de cedência de Drucker-Prager, isto é:

$$F = \alpha J_1 + (J_2')^{1/2} = K' \quad (38)$$

sendo as constantes α e K' definidas de modo a este critério de cedência coincidir com o critério de Mohr Coulomb para estados planos de deformação, ou seja (2)

$$\alpha = \text{sen } \theta / (9 + \text{sen}^2 \theta)^{1/2} \quad (39)$$

$$K' = 3c \cos \theta / (9 + 3 \text{sen}^2 \theta)^{1/2} \quad (40)$$

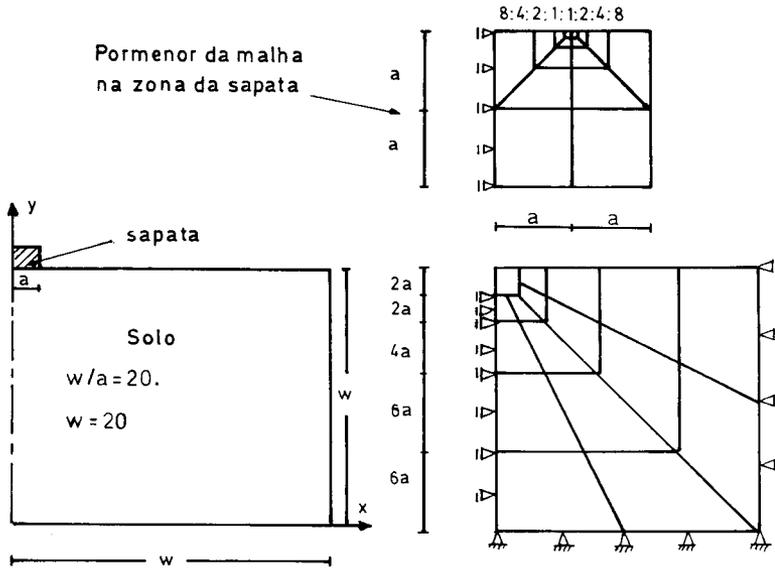


Fig. 1 — Sapata, solo e malha de elementos finitos

Nestas expressões c representa a coesão e ϕ o ângulo de atrito interno cujos valores foram considerados iguais respectivamente a 10.0 e 25° .

Para potencial plástico foi considerada uma superfície de Von-Mises.

c) Nos resultados que a seguir se apresentam foram usados os seguintes modelos de cálculo:

- KT — Neste modelo a matriz de rigidez é calculada usando na expressão (31) não a matriz elastoplástica $\{D_{ep}\}$ mas a matriz de elasticidade $\{D\}$. A matriz de rigidez é assim calculada uma única vez e usada nesta forma em todo o cálculo.
- NR1 — A matriz de rigidez é calculada usando a expressão (31), matriz esta que é usada a partir da 2.^a iteração de cada incremento. Na primeira iteração é usada uma matriz de rigidez calculada a partir da matriz $\{D\}$.
- NR2 — A matriz de rigidez com base em $\{D_{ep}\}$ é considerada apenas na 2.^a, 3.^a e 4.^a iteração de cada incremento.
- NR3 — A matriz de rigidez com base em $\{D_{ep}\}$ é usada nas iterações 2 a 10 de cada incremento.

d) A Fig. 2 mostra os resultados obtidos em plasticidade associada e não associada com os algoritmos acabados de referir. São também mostrados os resultados para o mesmo problema dados por (3). Constata-se uma boa comparação entre os resultados desta referência e os resultados aqui apresentados. Nesta figura P representa a carga aplicada, P_c a carga de colapso segundo a referência (3), c a coesão e d o deslocamento vertical da linha de simetria da sapata.

e) Nos Quadros 1 e 2 os algoritmos usados são comparados do ponto de vista do número de iterações necessárias até à convergência. O Quadro 1 mostra o número de iterações usado para os algoritmos KT e NR1. Foi usada uma tolerância de 2% ao incremento 22 e 2,5% a partir deste incremento. É evidente o menor número de iterações exigido pelos algoritmos NR1, sobretudo nos primeiros incrementos. O Quadro 2 compara os algoritmos KT, NR2 e NR3, usando uma tolerância de 1,5% até ao incremento 14 e de 1% a partir deste incremento. O número de iterações exigido pelos algoritmos NR continua a ser menor, sobretudo para o algoritmo NR3.

QUADRO 1 — Algoritmos KT, NR1. Iterações necessárias

Número do Incremento	d/a ($\times 10^4$)	N. de Iterações		Número do Incremento	d/a ($\times 10^4$)	N.º de Iterações	
		KT	NR1			KT	NR1
1	2.	7	5	19	21.	9	6
2	4.	17	10	20	22.	9	6
3	5.	14	8	21	23.	9	7
4	6.	13	7	22	24.	9	7
5	7.	12	7	23	25.	6	5
6	8.	12	7	24	26.	6	5
7	9.	12	6	25	27.	6	6
8	10.	11	7	26	28.	6	5
9	11.	11	6	27	29.	6	6
10	12.	10	6	28	30.	6	5
11	13.	10	7	29	31.	6	5
12	14.	10	6	30	32.	6	5
13	15.	10	6	31	33.	6	5
14	16.	10	6	32	34.	6	5
15	17.	10	6	33	35.	6	5
16	18.	9	6	34	36.	6	5
17	19.	9	6	35	37.	6	5
18	20.	9	6				

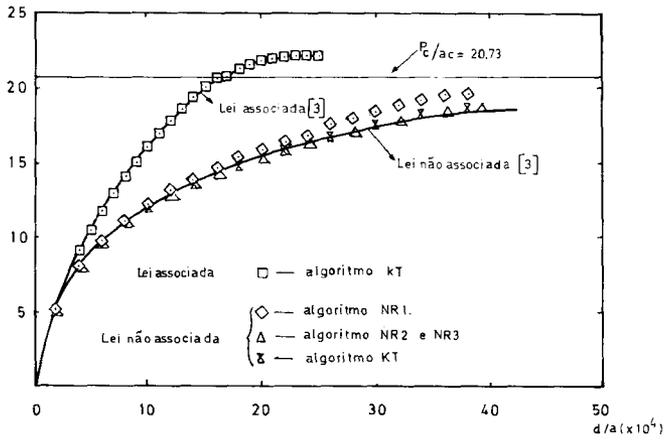


Fig. 2 — Diagramas carga-deslocamento para plasticidade associada e não associada

QUADRO 2 — Algoritmos KT, NR2, NR3. Iterações necessárias

Número		N. de Iterações			Número		N.º de Iterações		
do	d/a	KT	NR2	NR3	do	d/a	KT	NR2	NR3
Incremento	($\times 10^4$)				Incremento	($\times 10^4$)			
1	2.	9	7	6	19	21.	23	21	23
2	4.	20	18	13	20	22.	23	21	23
3	5.	17	15	9	21	23.	23	23	23
4	6.	17	14	9	22	24.	23	23	23
5	7.	16	14	9	23	25.	23	23	23
6	8.	15	13	8	24	26.	23	23	23
7	9.	15	13	8	25	27.	23	23	23
8	10.	15	13	9	26	28.	23	23	23
9	11.	15	13	8	27	29.	23	23	23
10	12.	15	13	9	28	30.	23	23	23
11	13.	15	13	9	29	31.	23	23	23
12	14.	15	13	9	30	32.	23	23	23
13	15.	15	13	8	31	33.	22	22	22
14	16.	15	13	9	32	34.	22	22	22
15	17.	24	24	15	33	35.	23	23	23
16	18.	23	23	22	34	36.	24	24	23
17	19.	23	23	23	35	37.	24		24
18	20.	23	23	23					

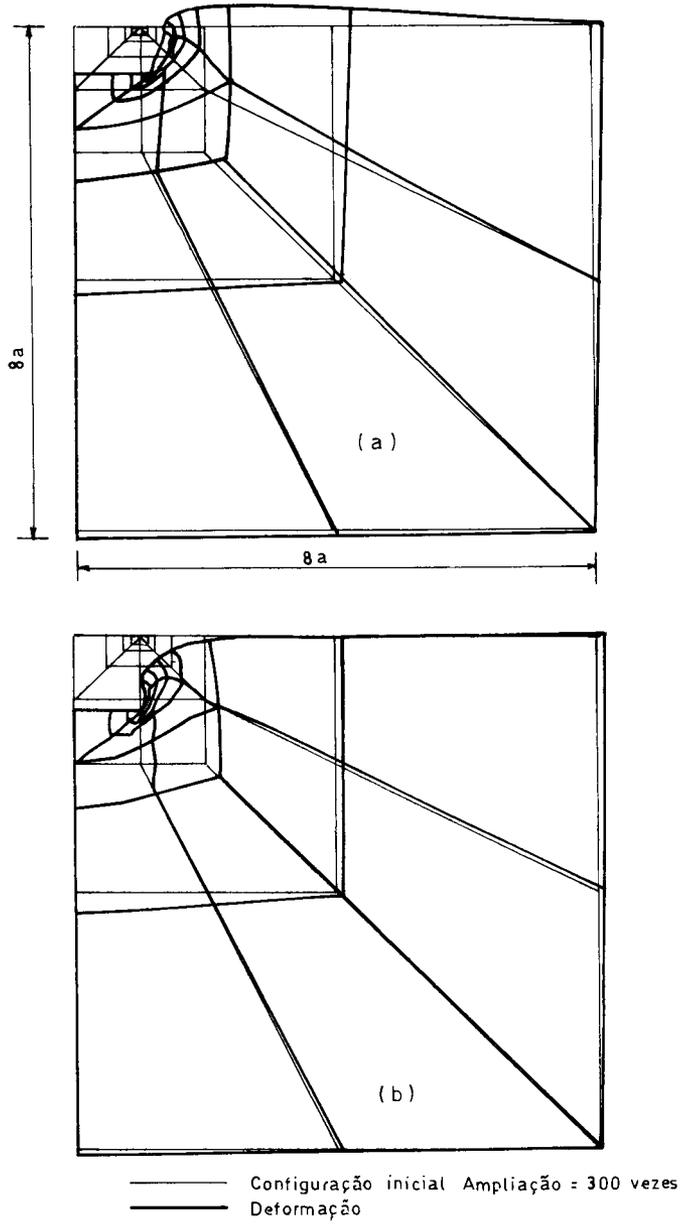


Fig. 3 — Deformada do solo com lei associada(a) e não associada(b)

No que respeita à convergência, a tendência global é a necessidade de um menor número de iterações nos primeiros incrementos e de um número de iterações semelhante ao do algoritmo KT nos últimos incrementos. Esta dificuldade de convergência nos últimos incrementos crê-se ser devida ao facto de, atendendo a ser H^* função do incremento de deformação plástica, haver a possibilidade de H^* ser negativo a que corresponderá um amaciamento do material equivalente.

f) Da Fig. 2 é evidente a diferença significativa entre os resultados obtidos com o modelo associado e com o não associado. Na Fig. 3 vai indicada para ambos os modelos a deformada da massa de solo na zona mais próxima da sapata. Como se vê na figura o modelo não associado leva a uma menor variação de volume, resultado este que é confirmado experimentalmente (4).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- (1) – PANDE, G.; PIETRUSZCZAK (1982) — *Symmetric Tangential Stiffness Formulation for Non-associated Plasticity*. C/R/405/83, April, Internal Report, University College of Swansea, Wales.
- (2) – OWEN, D.; HINTON, E. (1980) — *Finite Elements in Plasticity: Theory and Practice*, Pineridge Press, Swansea, U.K..
- (3) – THOMAS, J. (1984) — *An Improved Accelerated Initial Stress Procedure for Elastoplastic Finite Element Analysis*; International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, Vol. 8, pp. 359-379.
- (4) – SENSENY, P.; FOSSUM, T.; PFEIFLE, T. (1983) — *Non-associated Constitutive Laws for Low Porosity Rocks*, International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, Vol. 7, pp. 101-115.