

APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE FRONTEIRA NA ANÁLISE DE ESTRUTURAS SUBTERRÂNEAS*

APPLICATION OF THE BOUNDARY ELEMENT METHOD IN THE ANALYSIS OF UNDERGROUND STRUCTURES

por

L. NOLASCO LAMAS**

E. M. FRAZILLIO***

L. RIBEIRO E SOUSA****

C. SOUZA MARTINS***

RESUMO – Apresentam-se neste artigo modelos numéricos baseados no método dos elementos de fronteira, desenvolvidos no LNEC, para análise de estruturas subterrâneas.

Tecem-se algumas considerações sobre o método dos elementos de fronteira, descrevem-se os modelos desenvolvidos para equilíbrios planos e tridimensionais e apresentam-se alguns exemplos de aplicação.

SYNOPSIS – The article mentions boundary element models developed at LNEC used in the analysis of underground structures.

Some considerations are made on the boundary element method, the models developed for plane and three-dimensional equilibria are presented, and some instances of application are given.

1 – INTRODUÇÃO

Para o cálculo de estruturas subterrâneas, tem-se vindo a recorrer a modelos de cálculo, que proporcionam uma importante contribuição no projecto e na interpretação do seu comportamento, apesar das numerosas indeterminações associadas à caracterização dos maciços rochosos, à quantificação das acções, e das próprias limitações contidas na formulação dos modelos. Na escolha dos modelos de cálculo para representação dos fenómenos ou processos em jogo, tendo em vista a obtenção de resultados para um conjunto de situações que interessa considerar, há que admitir, essencialmente, objectivos de índole técnico-científica e de índole pragmática, assumindo os

* Trabalho recebido em Outubro de 1985. A discussão do trabalho está aberta por um período de 3 meses.

** Assistente de Investigação, Núcleo de Obras Subterrâneas, LNEC.

*** Estagiário, Núcleo de Obras Subterrâneas, LNEC.

**** Investigador, Núcleo de Obras Subterrâneas, LNEC.

modelos em relação aos primeiros uma forma complexa, que se adapte melhor aos resultados e (ou) informações disponíveis, e, em relação aos segundos, uma forma simplificada resultante, em geral, de considerações de natureza empírica. Convém ainda referir a existência de modelos utilizados a montante, que podem atingir níveis de rigor bastante elevados, e que procuram analisar a influência de certos fenómenos no comportamento das estruturas subterrâneas.

Em face do exposto, não resulta, por vezes, necessário nem conveniente enveredar por modelos rigorosos, sendo por isso usados modelos simplificados.

De entre os vários modelos de cálculo utilizados para previsão do comportamento destas estruturas, salientam-se os modelos numéricos baseados em métodos diferenciais – normalmente sob a forma de elementos finitos – e baseados em métodos integrais – em geral sob a forma de elementos de fronteira.

O método dos elementos de fronteira possui algumas vantagens importantes sobre o método dos elementos finitos, que justificam a sua crescente utilização, tal como foi evidenciando no último Congresso da Sociedade Internacional de Mecânica das Rochas, realizado em 1983 em Melbourne, onde as soluções numéricas apresentadas, utilizando métodos integrais, são já em grande número. Entre essas vantagens salientam-se as seguintes:

- i) Só é necessário discretizar a fronteira da estrutura, simplificando o trabalho de preparação de dados. Este facto é da maior importância na análise de estruturas tridimensionais.
- ii) O sistema de equações gerado é pequeno, mas cheio e não simétrico, conduzindo, em geral, a tempos de resolução mais baixos.
- iii) O tratamento de problemas envolvendo domínios infinitos é feito automaticamente, não sendo necessário limitar o domínio dos problemas em estudo.
- iv) Só são calculados valores nos pontos em que realmente se pretende conhecê-los.

Aliado a estas vantagens, o método dos elementos de fronteira apresenta alguns inconvenientes que, no estado actual do seu desenvolvimento, ainda não foi possível ultrapassar. Entre eles, contam-se os seguintes:

- i) É difícil tratar problemas não lineares complexos, como sejam os resultantes de variações de geometria relativas a diferentes sequências de construção.
- ii) O tratamento de domínios anisotrópicos, embora possível, quer em problemas bidimensionais, quer tridimensionais, é complexo, obrigando por vezes a esquemas de integração numérica que implicam tempos de cálculo muito elevados.

Tendo em vista aproveitar as vantagens do método dos elementos de fronteira no cálculo de estruturas subterrâneas, desenvolveram-se, no LNEC, modelos de cálculo para estudo de problemas bi e tridimensionais, admitindo a hipótese de comportamentos elásticos lineares em corpos isotrópicos, homogéneos e contínuos.

2 – FORMULAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE FRONTEIRA PARA A TEORIA DA ELASTICIDADE LINEAR

2.1 – *Considerações iniciais*

Só no final da década de cinquenta, princípio da década de sessenta, se começaram a utilizar, de uma forma sistemática, métodos numéricos envolvendo a resolução de equações integrais em problemas da Teoria da Elasticidade, tendo-se desenvolvido várias formulações para análise de problemas bidimensionais. Em 1969, foi apresentado por Cruse um modelo para análise de problemas tridimensionais. A partir de então, têm-se desenvolvido outras formulações, cada vez mais sofisticadas, não só no que diz respeito aos tipos de discretização utilizados, mas também no que se refere à otimização dos processos de integração numérica.

Hoje em dia, existem muitos autores a trabalhar no desenvolvimento de novos modelos e novas possibilidades do método dos elementos de fronteira, havendo já inúmeros trabalhos dedicados ao tratamento de diversos problemas no domínio da Mecânica dos Sólidos, como sejam, problemas de elastoplasticidade (Swedlow e Cruse, 1971), (Banerjee et al., 1979), (Telles, 1983), viscoelasticidade (Banerjee e Butterfield, 1981), viscoplasticidade (Telles e Brebbia, 1982), termoelasticidade (Rizzo e Shippy, 1977), dinâmica de estruturas (Brebbia e Walker, 1980), (Banerjee e Butterfield, 1981), mecânica da fractura (Cruse, 1979), meios descontínuos (Hocking, 1978), (Crouch e Starfield, 1983), meios sem resistência à tracção (Venturini e Brebbia, 1983), meios anisotrópicos (Wilson e Cruse, 1978), (Brebbia et al., 1984).

Existem duas formulações distintas do método dos elementos de fronteira, que se designam normalmente por indirecta e directa (Banerjee e Butterfield, 1977). Na formulação indirecta, as equações integrais expressam-se em termos de uma solução analítica conhecida para um dado problema, correspondente a uma solicitação unitária, distribuída ao longo da fronteira com densidades de distribuição desconhecidas. Estas densidades de distribuição não têm significado físico mas, uma vez conhecidas, permitem calcular as tensões e os deslocamentos em qualquer ponto. Na formulação directa, as incógnitas das equações integrais são os próprios deslocamentos e pressões nos pontos de fronteira. Os deslocamentos e as tensões em qualquer ponto são calculados, posteriormente, a partir dos valores de fronteira.

No Laboratório Nacional de Engenharia Civil, o estudo e a aplicação do método dos elementos de fronteira não tem sido feito de uma forma continuada. No entanto, deve-se citar o trabalho desenvolvido por Oliveira (1968), onde é apresentado um algoritmo para resolução de problemas de elasticidade plana utilizando uma formulação indirecta. Mais recentemente, Portela e Romãozinho (1979) desenvolveram um trabalho em que se apresentam as bases teóricas das formulações directa e indirecta para problemas de potencial e da Teoria da Elasticidade.

2.2 – Formulação matemática

2.2.1 – Equação integral na fronteira

Na formulação directa do método dos elementos de fronteira, as equações integrais podem ser obtidas a partir do método dos resíduos pesados ou do teorema da reciprocidade (ou de Betti). Se se tiver um corpo elástico com domínio V e fronteira S , tomam a seguinte forma:

$$C_{lk}^i u_k^i + \int_S p_{lk}^* u_k dS \times \int_S u_{lk}^* p_k dS + \int_V u_{lk}^* b_k dV \quad (1, k = 1, \dots, GL) \quad (1)$$

Nesta equação segue-se a convenção de índices mudos, tendo os símbolos utilizados o seguinte significado:

p_{lk}^* – pressão num ponto da fronteira, na direcção k , devido à aplicação de uma força unitária num ponto x_i do corpo elástico, actuando segundo a direcção l (solução fundamental em pressões).

u_{lk}^* – deslocamento num ponto da fronteira, na direcção k , devido à aplicação de uma força unitária num ponto x_i do corpo elástico actuando segundo a direcção l (solução fundamental em deslocamentos).

C_{lk}^i – coeficiente dependente da geometria da fronteira.

u_k^i – deslocamento no ponto x_i segundo a direcção k .

u_k, p_k – deslocamentos e pressões na fronteira na direcção k .

b_k – forças na direcção k aplicadas no domínio.

As direcções l e k ($l, k = 1, \dots, GL$) são as direcções do sistema de eixos cartesianos global adoptado para a estrutura, sendo GL o número de graus de liberdade.

Nos problemas de elasticidade linear em meios isotrópicos, são normalmente utilizados dois tipos de soluções fundamentais: i) solução fundamental de Kelvin para o espaço inteiro (Brebbia, 1978); ii) solução fundamental de Mindlin para o meio espaço (Telles, 1983).

No que se vai expôr considera-se, por simplicidade, que não existem forças mássicas aplicadas no domínio, obtendo-se uma equação só com incógnitas sobre a fronteira:

$$C_{lk}^i u_k^i + \int_S p_{lk}^* u_k dS = \int_S u_{lk}^* p_k dS \quad (1, k = 1, \dots, GL) \quad (2)$$

Para a resolução desta equação, a fronteira S é aproximada por uma série de elementos, denominados elementos de fronteira, definidos por um conjunto de pontos nodais, sendo os integrais calculados separadamente em cada elemento. A expressão que se obtém é a seguinte:

$$C_{ik}^i u_k^i + \sum_{e=1}^E \left[\int_{S_e} p_{ik}^* u_k dS \right] = \sum_{e=1}^E \left[\int_{S_e} u_{ik}^* p_k dS \right] \quad (1, k = 1, \dots, GL) \quad (3)$$

em que E é o número total de elementos de fronteira.

As funções u_k e p_k são aproximadas, em cada elemento, a partir dos seus valores nos pontos nodais, utilizando funções interpoladoras, em regra, coincidentes:

$$u_k = N_j u_{jk}^e \quad (j = 1, 2, \dots, P) \quad (4)$$

$$(k = 1, \dots, GL)$$

$$p_k = N_j p_{jk}^e$$

em que N_j são as funções interpoladoras, u_{jk}^e e p_{jk}^e são as componentes dos deslocamentos e pressões nodais no elemento e, sendo P o número de pontos nodais do elemento de fronteira.

Substituindo as expressões (4) em (3) obtém-se, para cada ponto x_i , a equação:

$$C_{ik}^i u_k^i = \sum_{e=1}^E \left[\left(\int_{S_e} p_{ik}^* N_j dS \right) u_{jk}^e \right] = \sum_{e=1}^E \left[\left(\int_{S_e} u_{ik}^* N_j dS \right) p_{jk}^e \right] \quad (1, k = 1, \dots, GL) \quad (5)$$

$$(j = 1, 2, \dots, P)$$

Os integrais desta equação são calculados numericamente, utilizando-se em geral, o método da quadratura de Gauss.

A equação (5) é válida para um ponto nodal x_i sobre a fronteira e para o grau de liberdade 1. Efectuando o espalhamento das matrizes pelos pontos nodais chega-se à seguinte equação genérica:

$$C_{ik}^i u_{ik} + \hat{H}_{iljk} u_{jk} = G_{iljk} p_{jk} \quad (1, k = 1, \dots, GL) \quad (6)$$

$$(j = 1, 2, \dots, N)$$

em que u_{jk} e P_{jk} representam, respectivamente, o deslocamento e a pressão no ponto nodal j da estrutura, segundo a direcção k . N é o número total de pontos nodais.

A expressão (6) pode-se escrever sob a forma matricial:

$$CU + \hat{H}U = GP \quad (7)$$

contendo os vectores U e P os deslocamentos e as pressões em todos os pontos nodais. C é uma matriz «quase-diagonal», em que só os termos das submatrizes diagonais de $GL \times GL$ contêm elementos não nulos, que podem ser determinados indirectamente através da imposição de condições de translação de corpo rígido. Podem-se, então, somar as matrizes C e \hat{H} obtendo-se:

$$HU = GP \quad (8)$$

A expressão (8) representa um sistema de $GL \times N$ equações, em que existem $GL \times N$ valores de pressões e igual número de valores de deslocamentos. Como num problema correctamente formulado são impostos à partida $GL \times N$ valores de fronteira (pressões e deslocamentos), restam $GL \times N$ incógnitas. Assim, têm-se algumas incógnitas em pressões no segundo membro, pelo que se impõe um reordenamento das equações de modo a obterem-se todas as incógnitas no primeiro membro e todos os valores conhecidos no segundo. Obtém-se, finalmente, o sistema de equações:

$$AX = F \quad (9)$$

em que X é o vector das incógnitas, F é um vector que resulta dos valores conhecidos e A é uma matriz de ordem $GL \times N$, cheia e não simétrica.

Uma vez determinadas as incógnitas, têm-se os deslocamentos e as pressões nos pontos nodais da fronteira, sendo os valores, em qualquer ponto de um elemento, calculados com base nas expressões (4). Os valores das tensões na fronteira são determinados a partir dos deslocamentos, por aplicação das relações deformações-deslocamentos e tensões-deformações, e adicionando uma parcela correspondente às pressões aplicadas na fronteira.

2.2.2 – Equação integral para pontos interiores

Uma vez calculados os deslocamentos e as pressões nos pontos nodais da fronteira, podem-se determinar os valores dos deslocamentos e das tensões em qualquer ponto interior do domínio da estrutura.

Para cálculo dos deslocamentos em pontos interiores x_i , utiliza-se a expressão (2). Neste caso, pertencendo o ponto x_i de aplicação da carga unitária ao domínio, tem-se $C_{lk}^i = \delta_{lk}$ (em que δ_{lk} é o símbolo de Kronecker). Deste modo, a expressão (2) transforma-se em:

$$u_l^i = \int_S u_{lk}^* p_k dS - \int_S p_{lk}^* u_k dS \quad (1, k = 1, \dots, GL) \quad (10)$$

Para um meio isotrópico, os valores das tensões em pontos interiores são calculados por diferenciação da equação (10), de modo a obterem-se as deformações, e multiplicando estas pela matriz de elasticidade resulta:

$$\sigma_{ij} = \frac{2G\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \frac{\partial u_l}{\partial x_l} + G \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (i, j, l = 1, \dots, GL) \quad (11)$$

Diferenciando directamente dentro dos integrais da expressão (10), obtém-se:

$$\sigma_{ij} = \int_S D_{kij} p_k dS - \int_S S_{kij} u_k dS \quad (i, j, k = 1, \dots, GL) \quad (12)$$

Os termos D_{kij} e S_{kij} são dados por fórmulas complexas (Brebbia, 1978).

Para determinação dos valores dos deslocamentos e das tensões, as expressões (10) e (12) são discretizadas de forma análoga à equação integral na fronteira.

3 – MODELOS POR ELEMENTOS DE FRONTEIRA DESENVOLVIDOS

3.1 – Considerações iniciais

Com base na formulação descrita anteriormente, desenvolveram-se no LNEC dois modelos de cálculo para estudo de equilíbrios bidimensionais e tridimensionais, tendo em vista, fundamentalmente, a sua aplicação na análise estrutural de obras subterráneas. Admitiu-se a hipótese de comportamento elástico linear em corpos isotrópicos, homogêneos e contínuos. De facto, este é o caso mais simples de abordar e pensa-se que, no imediato, será útil explorar todas as suas capacidades, antes de se passar para formulações mais complexas, pois modelos deste tipo constituirão sempre a base de modelos mais sofisticados.

Descrevem-se, seguidamente, de uma forma resumida, os modelos de cálculo desenvolvidos. Uma sua descrição mais completa encontra-se nas publicações de Frazillio e Martins (1984) e de Lamas (1984). No final, apresentam-se alguns testes dos referidos modelos a situações para as quais se dispunha de soluções analíticas ou numéricas.

3.2 – Descrição dos modelos

Em ambos os modelos, utilizaram-se elementos curvos e funções interpoladoras do segundo grau. No modelo bidimensional, os elementos de fronteira são lineares e definidos por 3 pontos nodais (Fig. 1a). Os elementos de fronteira utilizados no modelo tridimensional são superficiais, definidos por 8 pontos nodais (Fig. 1b).

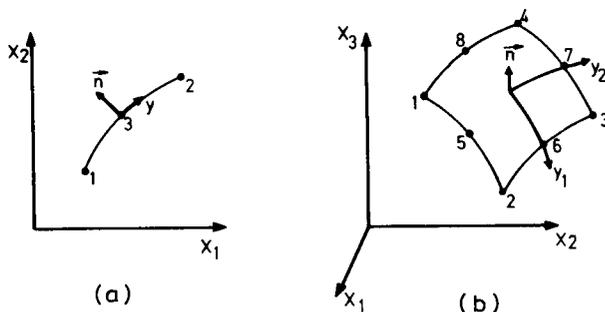


Fig. 1 – Elementos de fronteira utilizados

Para integração das equações, utiliza-se, em ambos os modelos, o método de quadratura de Gauss. No modelo tridimensional, o tempo de processamento exigido para a sua execução é bastante elevado, pelo que se utilizou um algoritmo que escolhe, automaticamente, em cada integração, a ordem da fórmula de integração numérica a utilizar, em função das dimensões do domínio e da rapidez de variação do integrando. Pretendeu-se, assim, obter uma precisão uniforme em todas as integrações. Este esquema foi inicialmente apresentado nas publicações de Lachat (1975) e Lachat e Watson (1976).

Tanto no modelo bidimensional como no tridimensional se utilizou o algoritmo de Gauss para resolução do sistema de equações. Neste último modelo, foi necessário desenvolver um esquema de partição da matriz por blocos, devido à sua dimensão ser, em geral, elevada.

Os sistemas computacionais que traduzem os modelos desenvolvidos são constituídos por três módulos independentes e executáveis sequencialmente. No primeiro módulo, é feita uma verificação dos dados definidores da estrutura, nomeadamente através da sua análise gráfica. No segundo, efectua-se o cálculo da estrutura, procedendo-se à integração das equações na fronteira e resolvendo-se o sistema de equações, obtendo-se os deslocamentos, as pressões e as tensões na fronteira. No terceiro módulo, são calculados os deslocamentos e as tensões nos pontos interiores, efectuando-se uma análise gráfica dos valores obtidos.

3.3 – Testes aos modelos de cálculo

3.3.1 – Cavidade circular

Este teste diz respeito a uma cavidade circular inserida num meio homogéneo, elástico linear e isotrópico, caracterizado por um módulo de elasticidade $E = 1\text{GPa}$ e um coeficiente de Poisson $\nu = 0,1$, e submetida a um estado de tensão inicial hidrostático de 1MPa . Tem como objectivo comparar os resultados obtidos pelo modelo com as soluções analíticas da Teoria da Elasticidade. Para discretização da cavidade, utilizou-se uma malha de 8 elementos de fronteira e 16 pontos nodais (Fig. 2). Valores de deslocamentos e de tensões ao longo de uma direcção radial são também apresentados na mesma figura, constatando-se que os valores obtidos são muito próximos dos correspondentes valores analíticos.

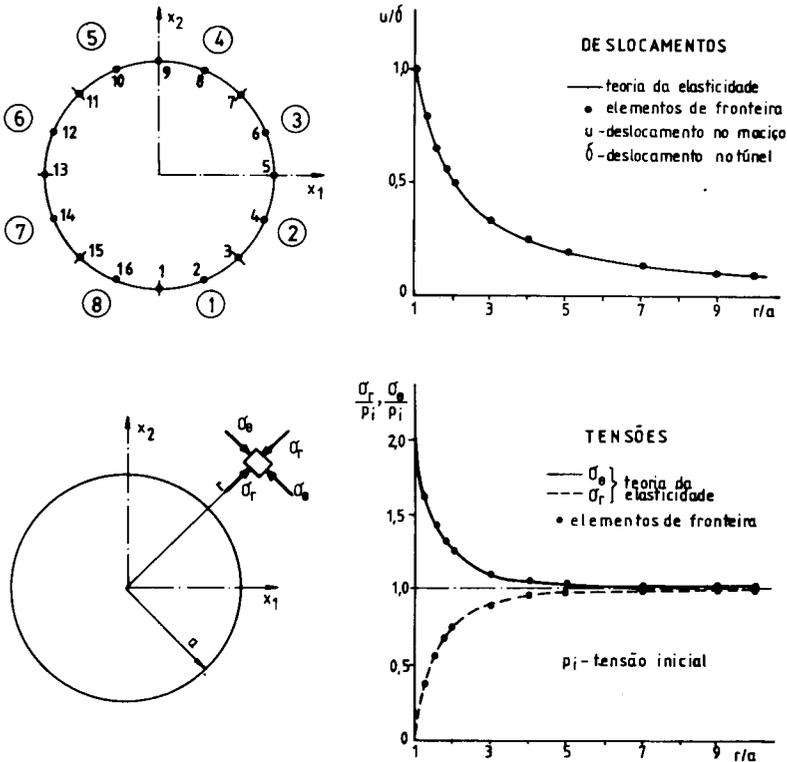


Fig. 2 – Cavidade circular

3.3.2 – Cavidade quadrangular

Com este exemplo, procurou-se comparar os resultados obtidos pelo modelo bidimensional com a solução apresentada por Riccardella e Wardle (Beer e Meek, 1980), utilizando também elementos de fronteira. A cavidade está inserida num meio elástico caracterizado por $E = 1\text{GPa}$ e $\nu = 0,1$, submetido a um estado de tensão inicial axial, segundo a direcção horizontal, de 1MPa . Para discretização, utilizaram-se 16 elementos de fronteira e 32 pontos nodais. Na Fig. 3, apresentam-se a malha de elementos de fronteira e diagramas das tensões principais ao longo de três direcções, uma subhorizontal ($\Theta = 4,75^\circ$), outra subvertical ($\Theta = 85,25^\circ$) e outra próxima de 45° ($\Theta = 42,6^\circ$).

Pode observar-se a boa concordância existente entre os resultados obtidos pelo LNEC e pelos autores referidos.

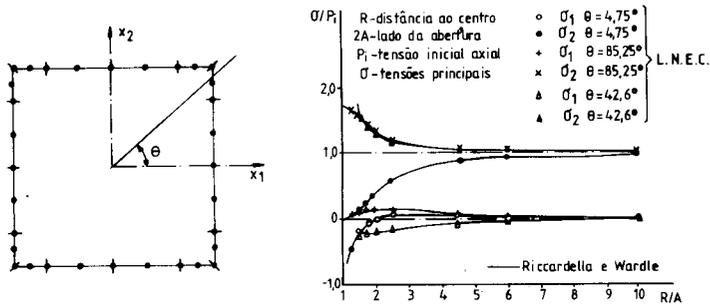


Fig. 3 – Cavidade quadrangular

3.3.3 – Cavidade esférica

O cálculo de uma cavidade esférica visa comparar os resultados obtidos com as soluções analíticas disponíveis e com a solução apresentada por Ocampo (1982) utilizando um modelo tridimensional por elementos finitos. O estado de tensão inicial é hidrostático de 1MPa e as características elásticas são, respectivamente, $E = 1\text{GPa}$ e $\nu = 0,2$. Na Fig. 4, apresentam-se uma malha utilizada formada por 24 elementos de fronteira e 74 pontos nodais e diagramas de deslocamentos e de tensões obtidos pelos dois modelos para uma direcção radial, bem como a solução analítica.

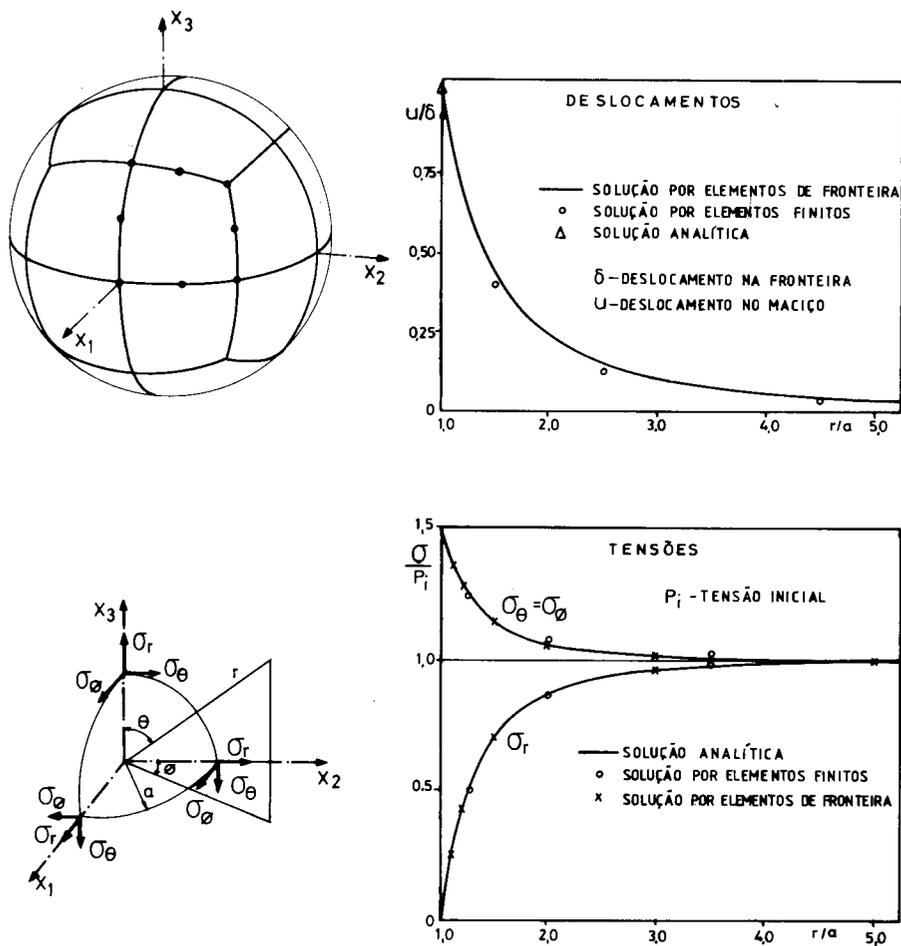


Fig. 4 - Cavidade esférica

Da análise da figura de deslocamentos, verifica-se uma boa concordância com a solução analítica na fronteira. Os valores obtidos por elementos de fronteira são ligeiramente superiores aos por elementos finitos o que em parte se poderá explicar devido a, neste modelo, existir uma imposição de deslocamentos nulos a uma certa distância da cavidade. Quando às tensões, constata-se que os valores obtidos por ambos os modelos são praticamente coincidentes com a solução analítica. Pode concluir-se que, de uma maneira geral, as soluções por elementos de fronteira em estruturas subterrâneas simples conduzem, para níveis de discretização semelhantes, a melhores resultados.

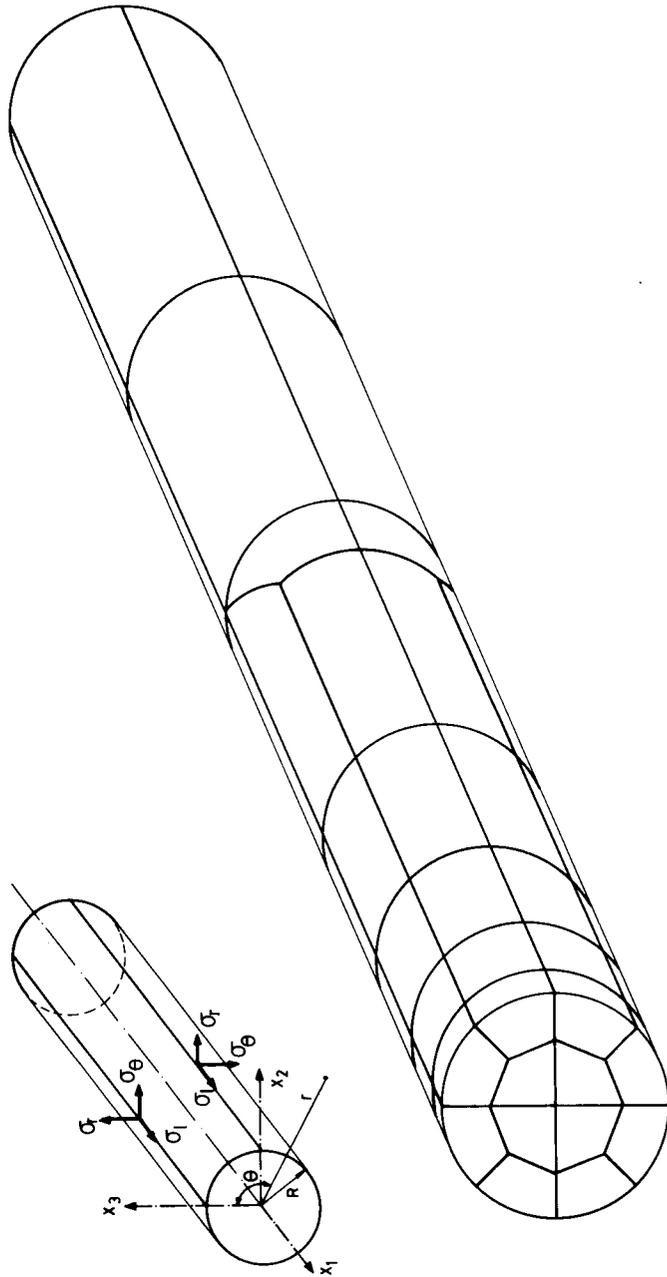


Fig. 5 – Túnel circular. Convenções e discretização

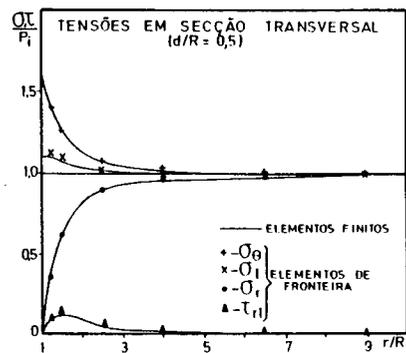
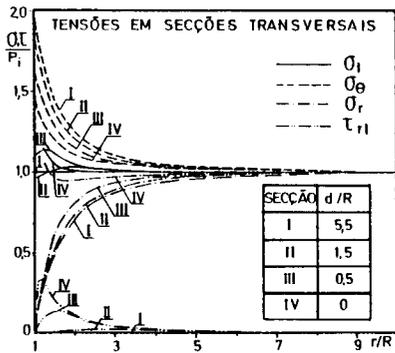
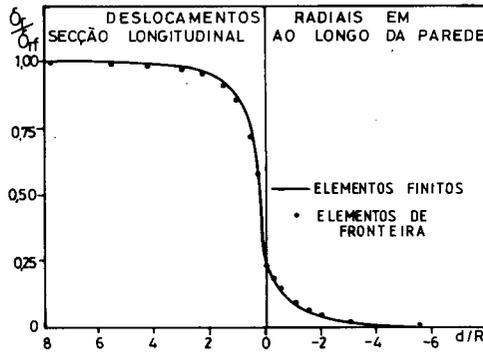
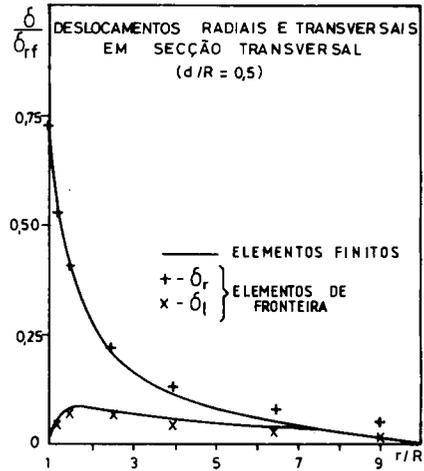
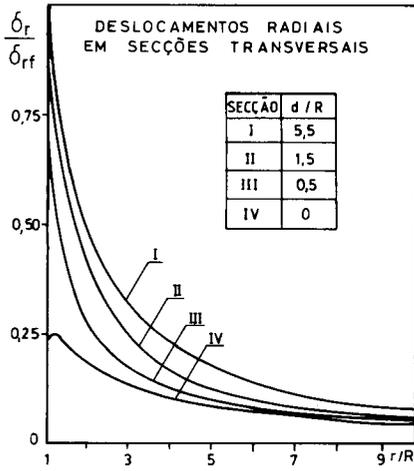


Fig. 6 – Túnel circular. Tensões e deslocamentos em secções transversais

3.3.4 – Frente de túnel circular

O estudo do comportamento dos maciços rochosos na vizinhança da frente de túneis constitui um dos problemas fundamentais em engenharia subterrânea.

A análise da frente de um túnel circular de raio R foi efectuada por intermédio do modelo tridimensional, em que se considerou para seu comprimento o valor de $10R$, tendo-se utilizado uma malha constituída por 69 elementos de fronteira e 233 pontos nodais. A sua perspectiva e o esquema de convenções são apresentados na Fig. 5.

Adoptou-se um estado de tensão inicial hidrostático de 1MPa , um módulo de elasticidade de 1GPa e um coeficiente de Poisson de $0,25$. No primeiro gráfico da Fig. 6, estão representados os deslocamentos em secções transversais a várias distâncias d da frente. Os restantes gráficos de deslocamentos referem-se à comparação dos valores obtidos pelo modelo de elementos de fronteira com os obtidos por elementos finitos, utilizando um modelo axissimétrico (Cunha, 1981). Os diagramas de tensões da Fig. 6 traduzem, respectivamente, a sua evolução em secções transversais à distância da frente e a comparação de valores obtidos por elementos de fronteira e por elementos finitos para $d/R = 0,5$. Verifica-se que, tanto em deslocamentos como em tensões, a concordância entre os valores calculados pelos modelos é muito boa. No entanto, é de referir que a discretização por elementos de fronteira envolveu uma quantidade de dados consideravelmente menor.

4 – APLICAÇÕES DOS MODELOS DE CÁLCULO

4.1 – Introdução

As aplicações dos modelos desenvolvidos têm-se dirigido para o estudo de centrais hidroeléctricas subterrâneas (Martins, 1985), de explorações mineiras (Cunha et al., 1985), (Sousa e Lamas, 1985), de túneis (Sousa et al., 1986), e cavidades naturais (Maranha das Neves et al., 1985). Ilustram-se seguidamente algumas aplicações efectuadas.

4.2 – Influência da cavidades naturais na fundação de um aterro

Este estudo refere-se a uma aplicação do modelo plano na análise da influência de cavidades naturais na fundação do aterro de prolongamento da pista do aeroporto de Ponta Delgada (Maranha das Neves et al., 1985). Nesta fundação basáltica, os

principais problemas resultam da heterogeneidade do maciço, devido à alternância de várias formações, e à presumível ocorrência de cavidades subterrâneas, tendo sido detectadas algumas devidas a fenómenos de erosão interna por circulação subterrânea das águas.

Foram efectuados cálculos por elementos de fronteira, tendo em vista a análise dos efeitos introduzidos no aterro por eventual ruína de cavidades existentes no maciço de fundação. Para estudo da estabilidade da fundação, considerou-se um bloco transversal ao aterro, indicado na Fig. 7, tendo sido adoptada uma pressão vertical de 1,4 MPa, para uma largura de 100 m correspondente à faixa do aterro. Previram-se várias cavidades, de forma circular e em losango, cuja probabilidade de ocorrência é considerada muito baixa, para as dimensões adoptadas.

Na Fig. 7, indica-se, ainda, a discretização utilizada e resultados em termos de tensões na vizinhança de uma cavidade em forma de losango. Verificam-se concentrações de tensões de compressão de valor elevado nas extremidades da abertura e tensões de tracção na parte superior da cavidade, tendo um valor máximo de cerca de 1,3 MPa. As zonas de rotura previstas por plastificação abrangem uma área importante do tecto da cavidade, que, no caso de existência de duas cavidades em forma de losango e para um ângulo de atrito de 30° e coesão nula, atingem mesmo a superfície do aterro.

4.3 – Estabilidade global de uma exploração mineira.

Com esta aplicação pretendeu-se ilustrar as potencialidades destes modelos na análise da estabilidade global das cavidades introduzidas no maciço rochoso, resultantes de escavações de desmonte de minério, na exploração mineira de Neves-Corvo (SOMINCOR, 1983). Integrou-se num estudo que envolveu a utilização de modelos por elementos finitos, cuja malha de cálculo inicial era composta por 547 elementos finitos parabólicos e 1562 pontos nodais (Sousa e Lamas, 1985).

A situação analisada com o modelo bidimensional dizia respeito a um maciço rochoso suposto homogéneo com $E = 40$ GPa e $\nu = 0,2$, e admitiu-se um estado de tensão inicial constante e hidrostático de 15 MPa (Frazillio e Martins, 1984). Formulou-se um modelo de cálculo compreendendo um total de 130 pontos nodais e 59 elementos de fronteira que, por razões de simetria, simula metade da estrutura das cavidades mineiras. Representa-se, na Fig. 8, um pormenor da malha de cálculo, bem como os deslocamentos e as tensões principais no maciço rochoso.

Da observação da imagem de deslocamentos, constata-se a existência de um campo deformacional com valores máximos da ordem de 5 cm, dirigido preferencial-

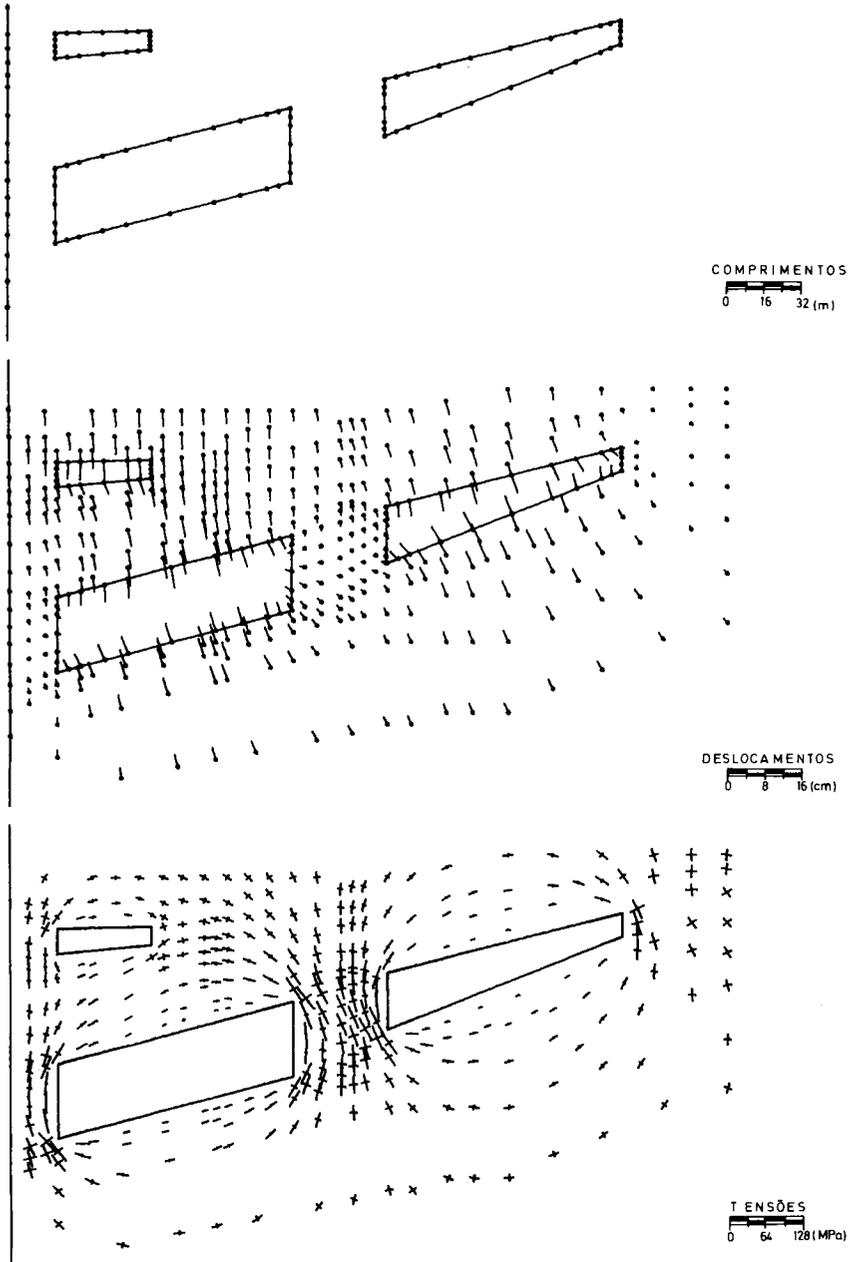


Fig. 8 – Exploração mineira. Malha de cálculo, campos de deslocamentos e de tensões

mente para as cavidades, com excepção da cavidade superior, de menores dimensões, largamente influenciada pelas restantes aberturas. Uma vez que as cavidades têm um desenvolvimento predominante segundo a horizontal, os vectores de deslocamentos têm uma direcção próxima da vertical, com excepção das zonas próximas dos pilares. Existem grandes concentrações de tensões nos pilares, atingindo as tensões verticais cerca de duas vezes o valor da tensão inicial, e é muito nítido o efeito de arco sobre o tecto e sob a soleira das grandes cavidades. O campo de tensões é de compressão em todo o maciço a menos de uma pequena zona sob a cavidade superior (Fig. 9), verificando-se ainda o aumento das tensões perimetrais nas paredes das cavidades nas zonas dos cantos.

4.4 – *Comportamento estrutural de uma central hidroeléctrica subterrânea*

De entre os vários parâmetros que determinam o comportamento estrutural de cavernas de centrais hidroeléctricas, salienta-se o estado de tensão inicial, cuja libertação, nas fronteiras das escavações, origina um movimento deformacional para as cavidades e uma redistribuição do estado de tensão na sua vizinhança. Por outro lado, nestas obras de carácter concentrado desenvolvem-se equilíbrios tridimensionais, pelo que se procurou analisar a sua influência com relação aos estudos habitualmente efectuados com modelos planos (Martins, 1985).

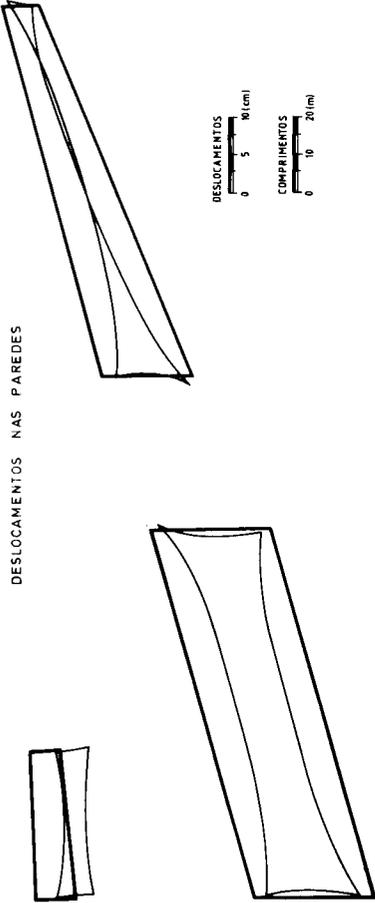
Considerou-se uma central hidroeléctrica com a forma de ferradura, com uma altura de 35 m e largura na base de 20 m. Para estudo do problema enunciado, utilizou-se um modelo plano para uma secção transversal da caverna e o correspondente modelo de cálculo tridimensional para um comprimento da caverna de 100 m com idêntica discretização na secção transversal (Fig. 10).

Procurou-se analisar a influência da distância das secções transversais ao topo da caverna, no que diz respeito à evolução dos deslocamentos e das tensões.

Em ambos os modelos se estudaram quatro situações de estado de tensão inicial no plano transversal. No primeiro caso, considerou-se um estado de tensão hidrostático de compressão de 3 MPa. Nos outros três casos, o estado de tensão caracterizou-se por tensões principais de compressão de 3 MPa e 1 MPa, fazendo a direcção da maior tensão principal ângulos de $\beta = 0^\circ$, 45° e 90° com a vertical, respectivamente. Na análise tridimensional, considerou-se que a direcção longitudinal era uma direcção principal e adoptou-se o valor da tensão de 1 MPa, que corresponde sensivelmente ao valor da tensão, na perpendicular ao plano, do caso bidimensional.

Apresentam-se, na Fig. 11, gráficos de deslocamentos e de tensões ao longo de três superfícies assinaladas na figura, para três secções transversais à distância de $1/L = 0$; 0,4; e 2,5, sendo L a largura da cavidade na base e 1 a distância ao topo.

DESLOCAMENTOS NAS PAREDES



TENSÕES PERIMETRAIS NAS PAREDES

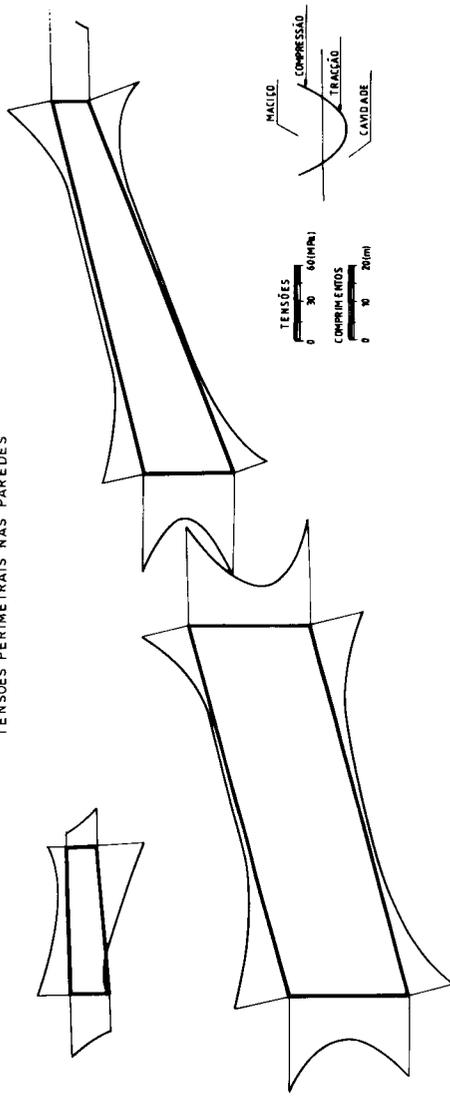


Fig.9 – Exploração mineira. Deslocamentos e tensões perimetrais

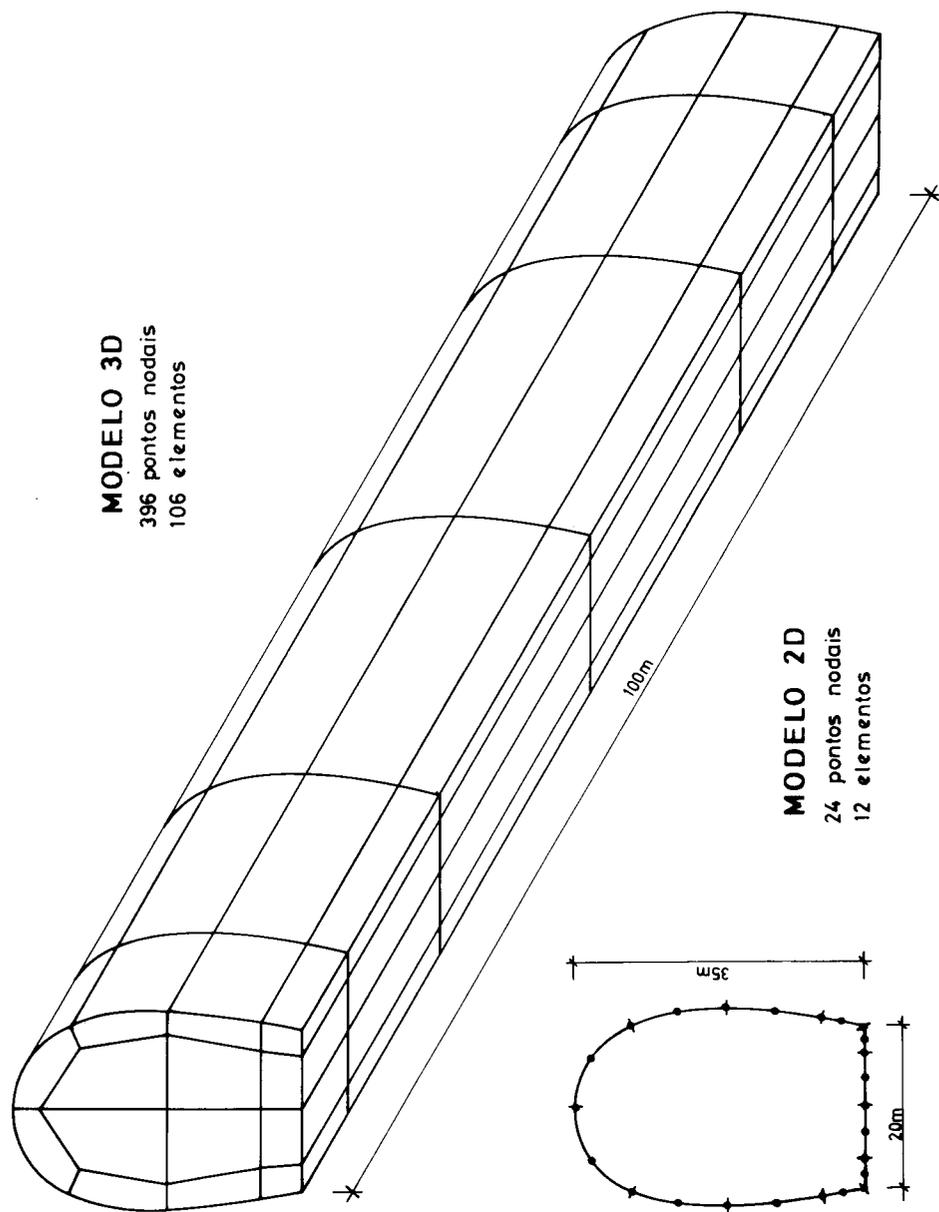


Fig. 10 – Caverna de um central hidroeléctrica. Malhas de cálculo

Nesta figura, apenas se representam curvas relativas a três estados de tensão, referindo-se a Fig. 12 aos resultados relativos a $\beta = 45^\circ$, para análise bidimensional e para duas secções relativas à análise tridimensional.

Da observação dos gráficos de deslocamentos verifica-se que os maiores valores correspondem, de modo geral, ao cálculo bidimensional, sendo os valores para a cavidade tridimensional, na secção transversal equidistante de ambos os topos ($1/L = 2,5$), quase coincidentes ou ligeiramente inferiores. À medida que as secções transversais se aproximam do topo, o efeito da tridimensionalidade, que se traduz numa diminuição dos deslocamentos, ganha maior importância, até que, na secção coincidente com o topo, a sua expressão é nitidamente diferente, devido à influência da complexa geometria dessa zona.

Comparando os gráficos correspondentes aos diferentes estados de tensão, constata-se que, como seria de esperar, o que conduz a um menor valor dos deslocamentos nas paredes é aquele a que corresponde uma tensão inicial horizontal inferior. Este facto é agravado devido à geometria alongada, segundo a vertical, da cavidade. O estado de tensão hidrostático provoca deslocamentos horizontais bastante superiores, os quais atingem o seu valor máximo para a situação com a tensão horizontal superior à vertical, na zona a meia altura das paredes da caverna. Para este estado de tensão, é interessante verificar que os deslocamentos no tecto têm o sentido do interior do maciço, ao contrário do que acontece nas outras situações. Para a situação em que as direcções principais das tensões iniciais não coincidem com os eixos coordenados ($\beta = 45^\circ$), verifica-se que o sentido dos deslocamentos traduz a orientação do estado de tensão inicial, e que o seu valor diminui ligeiramente com a aproximação do topo da cavidade.

Nos gráficos de tensões não se representam os seus valores na secção a $1/L = 2,5$, em virtude de serem praticamente iguais aos correspondentes valores do cálculo bidimensional. As tensões são sempre de compressão, com excepção da tensão vertical na zona intermédia da parede da cavidade para o estado de tensão inicial horizontal superior ao vertical. No entanto, a profundidade da zona traccionada é relativamente reduzida. Para este estado de tensão inicial, verificam-se, também, as maiores compressões na zona do tecto da caverna. As tensões de compressão nesta zona têm ainda valores importantes no caso do estado de tensão inicial hidrostático, diminuindo de forma muito acentuada para $\sigma_y^0 = 1 \text{ MPa}$ e $\sigma_z^0 = 3 \text{ MPa}$. Relativamente à variação das tensões com a distância ao topo da caverna, constata-se que é menor do que a verificada com os deslocamentos.

Para a situação correspondente a $\beta = 45^\circ$, os seus valores para as diferentes secções representadas não têm uma variação sensível. Nota-se a existência de uma assimetria no campo de tensões, verificando-se, no tecto, uma concentração num dos lados e um alívio no outro.

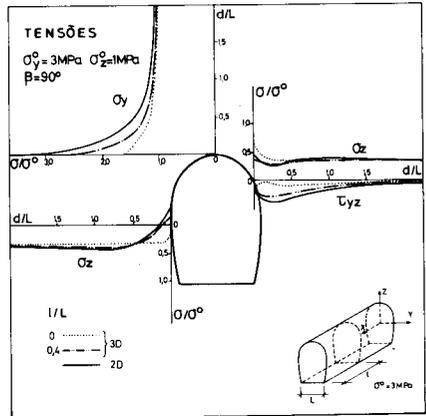
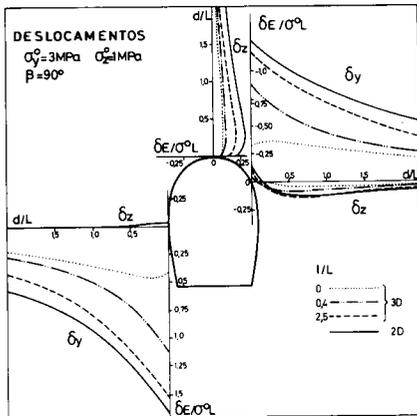
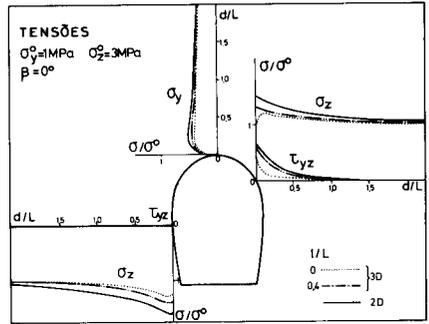
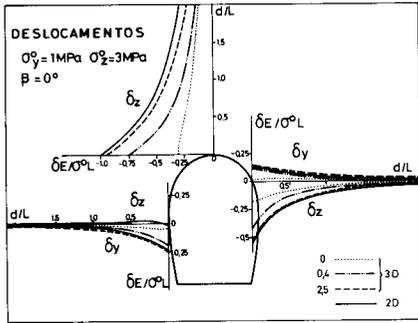
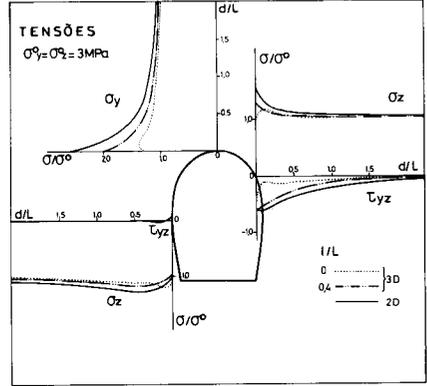
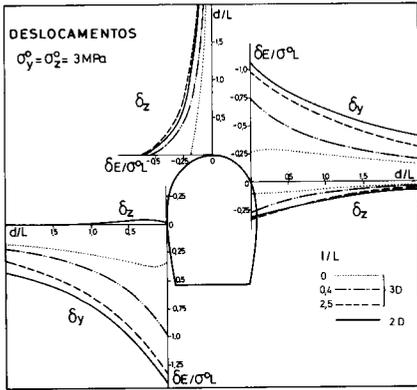


Fig. 11 – Caverna de uma central hidroeléctrica. Deslocamentos e tensões.

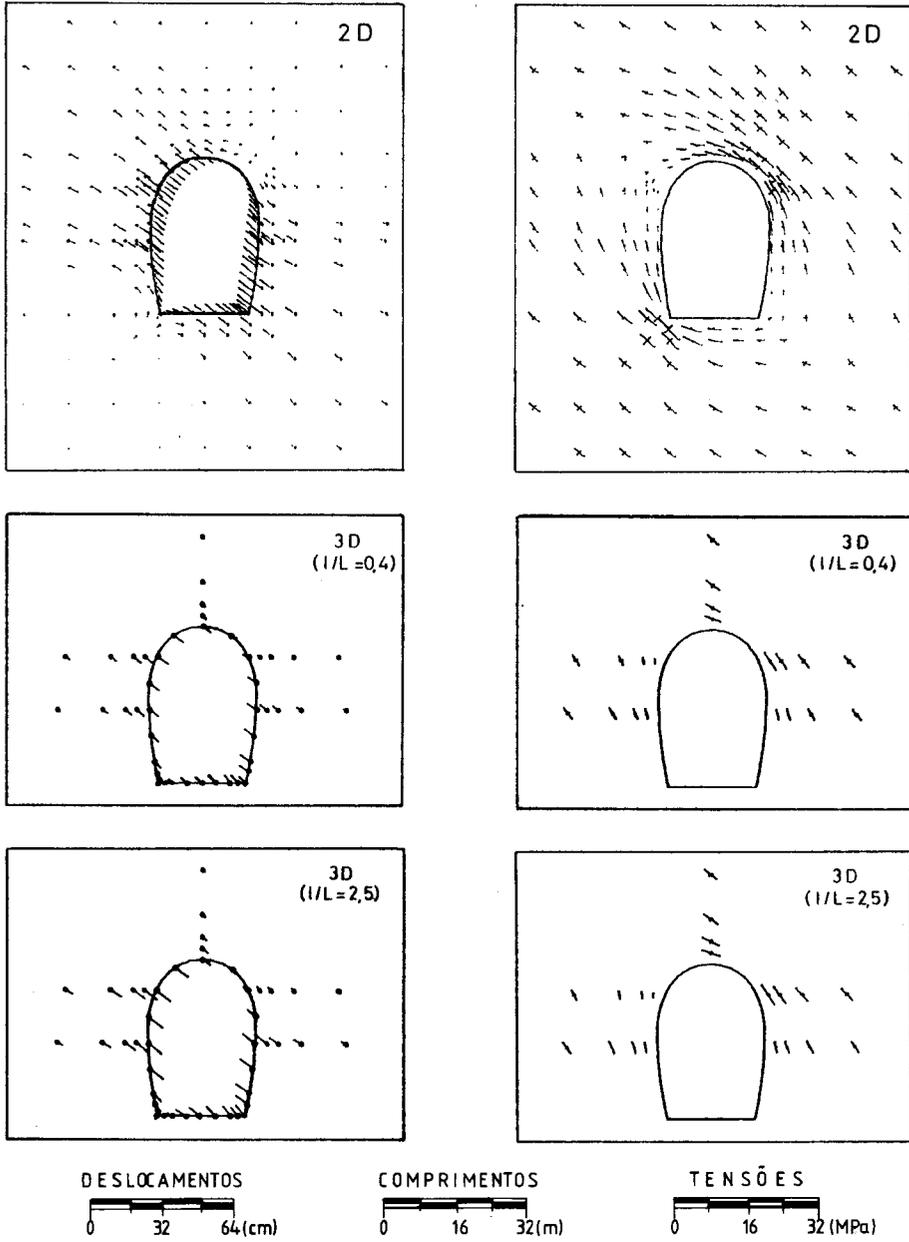


Fig. 12 – Caverna de uma central hidroeléctrica. Imagens de deslocamentos e tensões para $\beta = 45^\circ$

5 – CONSIDERAÇÕES FINAIS

Apresentaram-se, neste trabalho, os modelos por elementos de fronteira, desenvolvidos no LNEC, para cálculo de estruturas subterrâneas. Realça-se a sua aplicação a uma central hidroeléctrica subterrânea e a uma exploração mineira.

Os modelos desenvolvidos constituem um primeiro passo para dotar o LNEC de modelos de cálculo por elementos de fronteira para o estudo de estruturas subterrâneas. Pensa-se generalizar os modelos de modo a permitir, nomeadamente, o tratamento de heterogeneidades, comportamentos não lineares e anisotrópicos.

6 – AGRADECIMENTOS

Agradece-se à empresa Sociedade Mineira de Neves Corvo, SOMINCOR, o ter permitido a inclusão de alguns elementos referentes a estudos empreendidos pelo LNEC para as minas de Neves-Corvo.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BANERJEE, P.K.; BUTTERFIELD, R. (1977) — «*B.E.M. in geomechanics*». Finite Elements in Geomechanics, Cap. 16, Ed. Gudehus, New York.
- BANERJEE, P.K.; BUTTERFIELD, R. (1981) — «*B.E.M. in engineering science*». McGraw-Hill, U.K.
- BANERJEE, P.K.; CATHIE, D.N.; DAVIES, T.G. (1979) — «*Two and three dimensional problems of elastoplasticity*». Developments in B.E.M. - 1, Ed. Banerjee e Butterfield, London.
- BEER, G.; MEEK, J. (1980) — «*A boundary finite element for underground mining applications*». New Developments in Boundary Element Methods, University of Southampton.
- BREBBIA, C.A. (1978) — «*The B.E.M. for engineers*». Pentech Press, London.
- BREBBIA, C.A.; WALKER, S. (1980) — «*Boundary element techniques in engineering*». Newnes-Butterworths.
- BREBBIA, C.A.; TELLES, J.C.; WROBEL, L.C. (1984) — «*Boundary element techniques; theory and applications in engineering*». Springer-Verlag.
- CROUCH, S.L.; STARFIELD, A.M. (1983) — «*B.E.M. in solid mechanics*». George Allen and Unwin, London.
- CRUSE, T.A. (1979) — «*Two and three-dimensional problems of fracture mechanics*». Developments in B.E.M. - 1, Ed. Banerjee e Butterfield, London.
- CUNHA, A.P. (1981) — «*Aplicação de modelos matemáticos ao estudo de túneis em maciços rochosos*». Tese para especialista, LNEC, Lisboa.
- CUNHA, A.P.; LAMAS, L.; SOUSA, L. (1985) — «*Estudos geomecânicos da mina de Neves-Corvo. Análise da estabilidade das câmaras de fragmentação*». Rel. interno, LNEC, Lisboa.
- FRAZILLIO, E.; MARTINS, C. (1984) — «*Modelo por elementos de fronteira para análise de equilíbrios dimensionais - aplicações a estruturas subterrâneas*». Rel. interno, LNEC, Lisboa.

- HOCKING, G. (1978) — «*Stress analysis of underground excavations incorporating slip and separation along discontinuities*». 1st Int. Seminar on Recent Advances in Boundary Element Methods, Southampton.
- LACHAT, J.C. (1975) — «*A further development of the boundary integral technique for elastostatics*». PhD thesis, Univ. of Southampton.
- LACHAT, J.C.; WATSON, J.O. (1976) — «*Effective numerical treatment of boundary integral equations: a formulation for three-dimensional elastostatics*». Int. J. Num. Meth. Engng., Vol. 10.
- LAMAS, L. (1984) — «*Modelo tridimensional de elementos de fronteira para análise de estruturas subterrâneas*». Rel. interno, LNEC, Lisboa.
- MARANHA DAS NEVES, E.; RODRIGUES, F.; SOUSA, L.; PINTO, V. (1985) — «*Prolongamento da pista do aeroporto de Ponta Delgada. Influência de cavidades naturais na fundação do aterro*». Rel. interno (a publicar), LNEC, Lisboa.
- MARTINS, C. (1985) — «*Contribuição para o estudo de estruturas subterrâneas associadas a empreendimentos hidroeléctricos*». Tese para especialista, LNEC, Lisboa.
- OCAMPO, F. (1982) — «*Aplicação de modelos de cálculo tridimensionais na análise de grandes estruturas subterrâneas*». Rel. interno, LNEC, Lisboa.
- OLIVEIRA, E.R.A. (1968) — «*Plane stress analysis by a general integral method*». J. Eng. Mech. Div., Proc. A.S.M.E., EMI.
- PORTELA, A.; ROMÃOZINHO, T. (1979) — «*Tópicos sobre o método dos elementos de fronteira*». LNEC, Lisboa.
- RIZZO, F.J.; SHIPPY, D. (1977) — «*An advanced boundary integral equation method for three-dimensional thermoelasticity*». Int. J. Num. Meth. Engng, Vol. 11.
- SOMINCOR (1983) — «*Geomechanical characterization of Neves-Corvo rock mass*». Int. Symposium on Engineering Geology and Underground Construction, Lisboa.
- SOUSA, L.; LAMAS, L. (1985) — «*Estudos geomecânicos da mina de Neves-Corvo. Análise da estabilidade global e da exploração da mina*». Rel. interno, LNEC, Lisboa.
- SOUSA, L.; MARTINS, C.; LAMAS, L. (1968) — «*Development of the techniques of measurement and interpretation of the state of stress in rock masses. Application to Cstelo de Bode tunnel*». 5th Int. Congress of IAEG (a publicar), Buenos Aires.
- SWEDLOW, J.L.; CRUSE, T.A. (1971) — «*Formulation of boundary integral equation for three-dimension elasto-plastic flow*». Int. J. Solids and Structures, Vol. 7.
- TELLES, J.C. (1983) — «*The B.E.M. applied to inelastic problems*». Ed. Brebbia e Orszag, Springer-Verlag, Berlin.
- TELLES, J.C.; BREBBIA, C.A. (1982) — «*Viscoplastic analysis*». B.E.M. in Engineering, 4th Int. Seminar, Ed. Brebbia, Southampton.
- VENTURINI, W.S.; BREBBIA, C.A. (1983) — «*Some applications of the boundary element method in geomechanics*». Int. J. Num. Analytical Meth. in Geomechanics, Vol. 7.
- WILSON, R.B.; CRUSE, T.A. (1978) — «*Efficient implementation of anisotropic three-dimensional boundary-integral equation stress analysis*». Int. J. Num. Meth. Engng., Vol. 12.