

DETERMINAÇÃO DE LINHAS DE FLUXO PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS*

Flow lines determination by the finite element method

por

ROBERTO KOCHEN**

NORBERTO GERMANO S. DA SILVA***

TARCÍSIO B. CELESTINO****

RESUMO — As análises usuais de percolação pelo Método dos Elementos Finitos determinam o potencial em todos os pontos nodais, de modo a satisfazer a Equação de Laplace e as condições de contorno do problema. A partir do potencial, calculam-se os gradientes hidráulicos, as velocidades aparentes de fluxo e as vazões na região analisada. Eventualmente, pode-se calcular outras variáveis de interesse, como pressões neutras e forças de percolação. No entanto, não é viável, do ponto de vista prático, determinar as linhas de fluxo por meio destas análises.

Este trabalho apresenta a formulação em termos da função fluxo, e a solução numérica pelo MEF, de problemas envolvendo fluxo de água em solos saturados. Esta formulação permite a determinação de linhas de fluxo em situações gerais. Apresentam-se exemplos de utilização envolvendo casos de interesse prático.

SYNOPSIS — The usual procedure for analysing seepage by the Finite Element Method consists of the computation of the potential at all nodal points, in such a way as to satisfy Laplace's Equation and the boundary conditions. After the potential is determined it is also possible to evaluate the hydraulic gradients, the seepage velocities and the seepage rate in the region. Eventually, other quantities may be computed, such as pore pressures and seepage forces. Nevertheless, it is not feasible to determine the flow lines directly by this method.

This paper presents a formulation for problems relative to seepage in saturated soils, using flow functions. The numerical solution is obtained by the FEM. This formulation enables the determination of the flow lines for general conditions. Examples of practical interest are also presented.

* Trabalho recebido em Abril de 1984. A discussão do trabalho está aberta por um período de três meses.

** Mestre em Engenharia, EPUSP. Engenheiro, Departamento de Análise Numérica, THEMAG Engenharia Ltda.

*** Estagiário do LNEC. Engenheiro, Departamento de Análise Numérica, THEMAG Engenharia Ltda.

**** Ph. D., University of Califórnia, Berkeley. Chefe do Departamento de Análise Numérica, THEMAG Engenharia Ltda.

1. – INTRODUÇÃO

Na análise de problemas de percolação, tem sido comum deduzirem-se as equações governantes em função do potencial (carga hidráulica total). Este enfoque é o mais simples e natural. Quando se determina uma solução aproximada do problema pelo MEF, este enfoque apresenta uma vantagem adicional, qual seja, a de ser necessário impor apenas um tipo de condição de contorno (a carga nas equipotenciais limites). Esta condição de contorno é muito simples e só apresenta dificuldades (porém, facilmente contornáveis) para fluxo não-confinado. Neste caso, é necessário adoptar um procedimento iterativo para determinação da linha freática e impor uma condição de contorno especial para a linha livre. Pode-se também ajustar a freática por meio de técnicas não-lineares em que a malha se mantém fixa, conforme descrito por Correia (1979).

Não é possível, em uma análise de percolação por elementos finitos em função do potencial, determinar directamente as linhas de fluxo. Isto se deve ao facto de todas as condições de contorno do problema serem função apenas do potencial. Por meio destas análises, obtém-se o potencial em todos os pontos nodais, o que possibilita a determinação das linhas equipotenciais. No entanto, alguns engenheiros argumentam (com razão), que somente as linhas equipotenciais não permitem analisar de modo completo problemas de percolação em secções de barragens com geometria complexa e sobre fundações estratificadas, nas quais o padrão de fluxo costuma ser pouco intuitivo. A representação dos gradientes hidráulicos ameniza o problema, porém não o soluciona, já que justamente nas regiões onde se tem maior concentração de fluxo (filtros, trincheiras drenantes, descontinuidades rochosas e outras) o gradiente é reduzido e pode eventualmente tender a zero (como no caso de trincheiras drenantes). Face ao exposto acima, verifica-se ser conveniente dispor de um programa de elementos finitos que permita a determinação de linhas de fluxo. A formulação que possibilita esta determinação, e que pode ser facilmente adaptada aos programas de elementos finitos para análise de percolação em função do potencial, será apresentada neste trabalho. A formulação em função do potencial não será discutida aqui, por se encontrar amplamente documentada na literatura (vide, por exemplo, Zagottis – 1971).

2. – EQUAÇÕES GOVERNANTES DO FLUXO DE ÁGUA EM SOLOS

Considere-se o problema da percolação de água pela fundação de uma barragem de concreto, conforme representado na Fig. 1.

Considere-se agora um elemento do estrato permeável, de lados dx e dy (paralelos aos eixos x , y globais) e espessura unitária, conforme mostra a Fig. 2. Sejam v_x e v_y as velocidades aparentes de fluxo (vazão por unidade de área) segundo as direcções x e y , respectivamente.

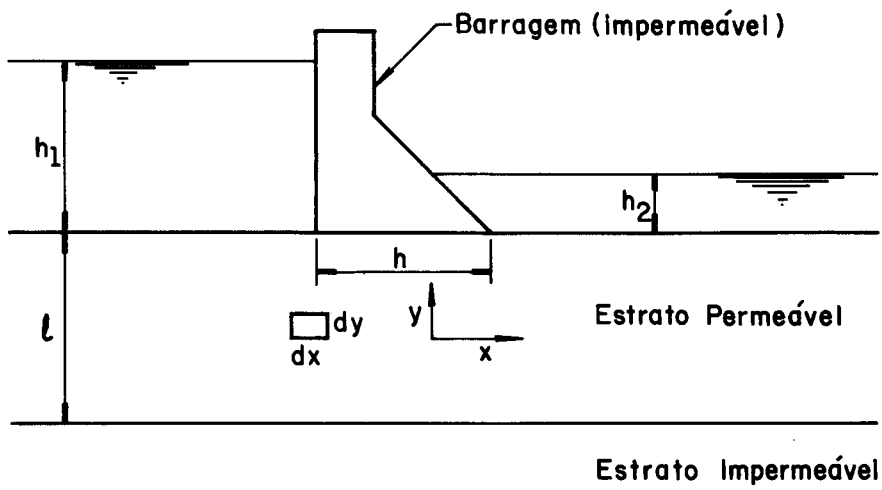


Fig. 1 — *Barragem sobre fundação permeável*

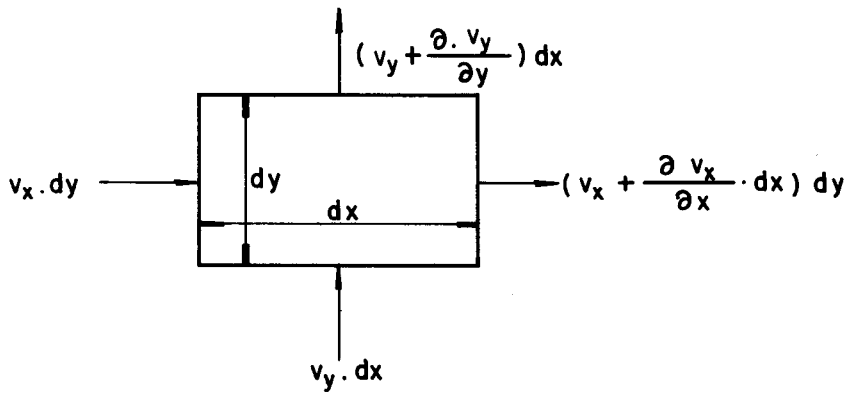


Fig. 2 — *Elemento diferencial do estrato permeável*

Para que haja continuidade no elemento diferencial representado na Fig. 2, a quantidade de água que entra no elemento deve ser igual à quantidade de água que sai. Este resultado é conhecido como Princípio da Continuidade. Portanto, pode-se escrever a seguinte equação:

$$v_x \cdot dy + v_y \cdot dx = (v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x} \cdot dx) dy + (v_y + \frac{\partial v_y}{\partial y} \cdot dy) dx \dots\dots\dots (1)$$

A Equação (1), após algumas simplificações, resulta em:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \dots\dots\dots (2)$$

A interpretação física da Equação (2) é clara: os eventuais acréscimos (decrécimos) de velocidades aparentes segundo a direcção x devem ser compensados por decréscimos (acréscimos) segundo a direcção y , de modo a manter a vazão total no elemento constante.

Neste estágio do problema, é necessário definir as equações constitutivas do material. A equação constitutiva do material. A equação constitutiva correspondente a fluxo laminar é a Lei de Darcy:

$$\left[\begin{array}{l} v_x = - k_x \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ v_y = - k_y \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{array} \right] \dots\dots\dots (3)$$

Se for admitido que os coeficientes de permeabilidade k_x e k_y são constantes, resulta a seguinte equação (denominada Equação de Laplace) em função do potencial ϕ [após a substituição da Equação (3) na Equação (2)]:

$$k_x \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \dots\dots\dots (4)$$

A Equação (4) pode ser resolvida graficamente, traçando-se manualmente a rede de fluxo, ou pelo Método dos Elementos Finitos, sendo então necessário impor apenas, como condição de contorno, o potencial nas equipotenciais limites, conforme comentado anteriormente. Em alguns casos, pode-se resolver a Equação (4) analiticamente.

Pode-se demonstrar que, se existe uma função ϕ que satisfaz a Equação (4), então existe também uma outra função ψ (denominada função conjugada harmónica de ϕ), tal que:

$$\eta = \phi - i\psi$$

é uma função analítica. As funções ϕ e ψ são ortogonais, e devem obedecer às Equações de Cauchy-Riemann (Scott, 1963):

$$\left[\begin{array}{l} \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} = - \frac{\partial \psi}{\partial x} \end{array} \right. \dots\dots\dots (5)$$

Fisicamente, estas equações definem a função fluxo, tal que as linhas de $\psi = cte$ dividem o domínio em «canais» de fluxo por onde passam vazões constantes. Esta propriedade é uma consequência de a componente de velocidade aparente na direcção normal à linha de fluxo ser nula.

As velocidades aparentes de fluxo relacionam-se com a função ψ através de:

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} \dots\dots\dots (6)$$

$$v_y = - \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Convém notar que as Equações (6) satisfazem identicamente à Equação da continuidade [Equação (2)]. No entanto, a função de fluxo ψ não pode ser atribuída, conforme se verifica combinando-se as Equações (6) e (3):

$$\left[\begin{array}{l} \frac{\partial \psi}{\partial y} = - \, k_v \, \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} = k_v \, \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{array} \right. \dots\dots\dots (7)$$

A Equação (7) pode ser colocada em uma forma mais adequada:

$$\left[\begin{array}{l} -\frac{I}{k_y} \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \dots\dots\dots (8a) \\ \frac{I}{k_x} \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial y} \dots\dots\dots (8b) \end{array} \right.$$

Diferenciando-se a Equação (8 a) em relação a y , a Equação (8b) em relação a x e substituindo-se as expressões obtidas, resulta a seguinte expressão:

$$\frac{I}{k_y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{I}{k_x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \dots\dots\dots (9)$$

A Equação (9), formulada por meio da *função de fluxo* ψ , descreve a percolação de água em solos. Para que esta equação possa ser resolvida, é necessário impor as condições de contorno do problema analisado em termos da função de fluxo ψ . Antes de se passar à discussão das condições de contorno, convém observar que:

- a) De acordo com esta formulação, pode-se definir linhas de fluxo como sendo linhas nas quais a função ψ apresenta valores constantes. Esta definição é análoga à definição de linhas equipotenciais, no caso da formulação em função do potencial.
- b) Consequentemente, a vazão entre duas linhas de fluxo quaisquer é dada pela diferença entre os respectivos valores de ψ .

Assim, o problema da determinação da função de fluxo ψ é análogo ao da determinação do potencial ϕ , mudando apenas as condições de contorno a serem impostas. Estas condições de contorno serão função da vazão especificada em parte da fronteira do problema. Devido à característica das condições de contorno, não é possível determinar directamente as linhas de fluxo em uma análise de percolação. É necessário primeiramente efectuar uma análise em função do potencial, determinando a vazão total pelo domínio e a vazão específica nos pontos nodais correspondentes à linha livre. Estas vazões serão as condições de contorno para a análise em função de ψ , conforme discutido a seguir.

3. – CONDIÇÕES DE CONTORNO

Considera-se agora a percolação de água em uma barragem de terra, representada na Fig. 3.

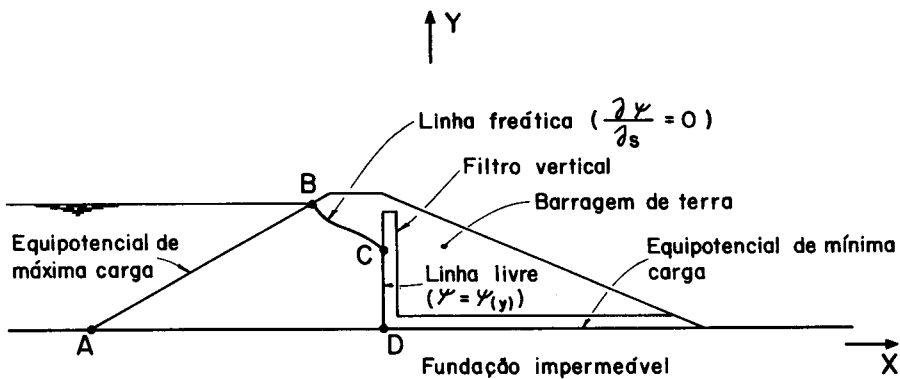


Fig. 3 — Condições de contorno para uma análise de percolação

Para as duas equipotenciais limites, a condição de contorno a ser imposta é dada por:

$$v_n = \frac{\partial}{\partial s} (\psi) \dots\dots\dots (10)$$

onde v_n é a componente da velocidade v normal à superfície s e $\partial/\partial s$ representa a diferenciação ao longo da fronteira em um sentido horário. Esta é uma condição de contorno natural, e que não necessita ser imposta na análise por elementos finitos, conforme será discutido mais adiante.

Para a linha livre, é necessário impor uma condição de contorno especial, já que esta linha não é uma equipotencial e nem tão pouco uma linha de fluxo. Nas análises usuais em função do potencial impõe-se como condição de contorno $\phi = v$ nesta linha. Nas análises por meio da função fluxo, é necessário impor:

$$\psi = \psi (v) \dots\dots\dots (11)$$

em cada ponto da linha livre (linha CD na Fig. 3). Ou seja, na linha CD impõe-se um valor de ψ correspondente a uma vazão variando de ponto a ponto.

Resta apenas impor as condições de contorno nas linhas de fluxo limites. A linha de fluxo de menor comprimento corresponde à linha freática (linha BC na fig. 3), enquanto que a de maior comprimento corresponde à linha AD nesta mesma figura. Nestas duas linhas, pode-se impor valores arbitrários de ψ , desde que a diferença entre estes valores corresponda à vazão total que passa pela barragem. Em geral escolhe-se o valor nulo para a linha freática. Deste modo, os valores a serem especificados nas linhas de fluxo limites são:

$$\left[\begin{array}{l} \psi = 0 \text{ na linha BC} \\ \psi = \int_S v_n dS \text{ na linha AD} \end{array} \right. \dots\dots\dots (12)$$

Portanto, o problema da determinação das linhas de fluxo em um maciço de permeabilidade anisotrópica está equacionado. Deve-se satisfazer à Equação (9) no domínio, e às condições de contorno (11) e (12) na fronteira. Convém notar que, ao se adoptar este enfoque para o problema, pressupõe-se que a linha freática já tenha sido determinada, bem como a vazão total através da barragem.

Comparando-se a Equação (9) com a Equação (4), verifica-se que a solução de um problema de percolação por meio de uma formulação em função de ψ , reduz-se à solução da equação de Laplace na seguinte forma:

$$K'_x \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + K'_y \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \dots\dots\dots (13)$$

onde os parâmetros K'_x e K'_y são dados por:

$$\begin{aligned} K'_x &= \frac{1}{K_y} \\ K'_y &= \frac{1}{K_x} \end{aligned} \dots\dots\dots (14)$$

Esta analogia será discutida com maior detalhe no próximo item, relativo à aproximação da Equação (13) por elementos finitos.

4 – APROXIMAÇÃO POR ELEMENTOS FINITOS

Conforme visto nos itens anteriores, a determinação das linhas de fluxo em um maciço de permeabilidade anisotrópica reduz-se ao cálculo da função de fluxo ψ que satisfaz a equação de Laplace (Equação 13) e as condições de contorno do problema (Equações 11 e 12).

Porém, a Equação (13) é válida em um domínio contínuo, com infinitos graus de liberdade. Para a solução numérica desta equação, é necessário discretizar o domínio em elementos finitos. Isto feito, aplica-se o Método de Ritz ou de Galerkin (Zienkiewicz e Morgan, 1983) para a obtenção de um sistema de equações com um número finito de graus de liberdade. Este sistema, uma vez resolvido, fornece os valores de ψ nos pontos nodais.

A aplicação do Método de Ritz a este problema requer a minimização de um funcional que, embora possa ser estabelecido com base em considerações matemáticas, conforme descrito em Ponter (1972), não decorre imediatamente da teoria apresentada. Por outro lado, o Método de Galerkin opera directamente com as equações governantes do problema (Equação 13), e portanto possui uma interpretação física mais imediata e satisfatória. A aplicação de qualquer um destes métodos conduz, neste caso, a equações idênticas. Consequentemente, será utilizado o Método de Galerkin neste trabalho.

O Método de Galerkin procura minimizar, no domínio do problema, o erro cometido ao se calcular a equação de Laplace por meio de uma solução aproximada. Ou seja, o método impõe a seguinte condição:

$$\int_A (Ew) dA = 0 \quad \dots\dots\dots (15)$$

onde:

$$E = K'_x \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + K'_y \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \quad \dots\dots\dots (16)$$

e w é uma função de ponderação adequada. A integração é efectuada sobre a área A do domínio. O erro E surge em consequência da utilização de uma aproximação para a função ψ . A Equação (15) representa a exigência de se anular a média ponderada dos erros E no domínio A . Substituindo-se a Equação (16) na (15), obtém-se:

$$\int_A \left[K'_x \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + K'_y \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right] w dA = 0 \quad \dots\dots\dots (17)$$

Neste estágio, aplica-se o Teorema de Gauss à Equação (17). Este teorema transforma o integral de uma função em um domínio A e um integral no seu contorno S :

$$\int_A \left(C \frac{\partial^2 D}{\partial x^2} \right) dA = \int_S C \frac{\partial D}{\partial x} n_x ds - \int_A \frac{\partial C}{\partial x} \frac{\partial D}{\partial x} dA \quad \dots\dots\dots (18)$$

onde C e D são funções escalares quaisquer e n_x é a componente segundo o eixo x da normal $\bar{n}$ à superfície S .

Para a variável y , a expressão obtida é idêntica, bastando trocar x por y na Equação (18).

Aplicando-se a Equação (18) na Equação (17), obtêm-se:

$$\int_S \left[K'_x \frac{\partial \psi}{\partial x} n_x + K'_y \frac{\partial \psi}{\partial y} n_y \right] w dS - \int_A \left[K'_x \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + K'_y \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right] dA = 0 \quad \dots\dots\dots (19)$$

No Método dos Elementos Finitos, a função a ser determinada (no caso, a função de fluxo ψ) é aproximada no domínio por meio de uma interpolação do seguinte tipo:

$$\psi = \sum_{i=1}^n N_i \cdot \psi_i \quad \dots\dots\dots (20)$$

onde n é o número total de nós da malha de elementos finitos, N_i são as funções de interpolação (que dependem do tipo de elemento finito utilizado) e ψ_i são os valores nodais da função ψ . No Método de Galerkin, o número de funções de interpolação é igual ao número de valores nodais desconhecidos.

A função de ponderação w_i , correspondente ao nó i , é escolhida de modo a se ter $w_i = N_i$. Convém notar que, nos nós onde o valor de ψ é imposto como condição de contorno [Equação (11)], não existem incógnitas associadas ao ponto. Consequentemente, a função de ponderação se anula para estes nós. Portanto, o primeiro integral constante da Equação (19) se anula na parte da fronteira onde a função ψ é especificada. Ao longo da parte restante da fronteira, o primeiro integral constante da Equação (19) se reduz, mediante a utilização da Equação (10), a

$$\int_{S_B} \bar{v}_n w ds = 0 \quad \dots\dots\dots (21)$$

Substituindo-se a Equação (20) na (19), e incorporando-se a Equação (21) na expressão resultante, obtém-se:

$$\int_A \left[\sum_{j=1}^n \left(K'_x \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + K'_y \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) \psi_j \right] dA = 0 \quad \dots\dots\dots (22)$$

Se em um nó da fronteira não forem especificadas condições de contorno, então a condição de contorno natural é implicitamente admitida, com $v = 0$ (velocidade aparente nula imposta na fronteira) sendo satisfeita de modo apenas aproximado. Na prática, basta impor $\psi = 0$ na linha freática, $\psi = \text{vazão total no domínio}$ para a maior linha de fluxo e $\psi = \psi_{(v)}$ na linha livre, conforme comentado anteriormente (vide Fig. 3).

A Equação (22) representa um sistema de n equações, no qual as equações correspondentes aos nós nos quais ψ é imposto são eliminadas. Após se arranjar a Equação (22), e alterar a ordem de soma e integração, obtém-se:

$$\sum_{j=1}^n \left[\int_A \left(K'_x \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + K'_y \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) dA \right] \psi_j = 0 \quad \dots\dots\dots (23)$$

A Equação (23) pode ser reescrita na seguinte forma matricial:

$$\underline{K} \underline{a} = \underline{0} \quad \dots\dots\dots (24)$$

na qual a matriz de permeabilidade global é dada por:

$$K_{ij} = \int_A \left[K'_x \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + K'_y \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right] dA \quad \dots\dots\dots (25)$$

Em aplicações práticas, a matriz de permeabilidade global não é montada directamente de acordo com a Equação (25). Ao invés da montagem directa, a Equação (25) é utilizada para estabelecer separadamente a matriz de permeabilidade de cada elemento. As matrizes estabelecidas em cada elemento são então montadas de modo a obter o sistema global de equações, conforme se encontra amplamente descrito na literatura (Hinton e Owen, 1979).

5 – APLICAÇÕES PRÁTICAS

As Figs. 4, 5 e 6 mostram exemplos práticos de determinação de linhas de fluxo no maciço e na fundação de uma barragem de terra. Neste trecho da barragem, a fundação apresenta estratos avulsionares altamente permeáveis, sobrejacentes a estratos de arenito e basalto intercalados por descontinuidades rochosas. A Fig. 4 mostra o modelo geológico adotado. A Fig. 5 mostra as linhas de fluxo obtidas, considerando-se o estrato superior de arenito isotrópico, enquanto que a Fig. 6 mostra as linhas obtidas considerando-se este mesmo estrato com permeabilidade anisotrópica.

Conforme pode ser observado nas Figs. 5 e 6, a parede diafragma veda as camadas superficiais da fundação, forçando as linhas de fluxo a contorná-la. Nestes exemplos, devido à complexidade da geologia de fundação (com vários estratos permeáveis intercalados por descontinuidades rochosas), só é possível traçar manualmente a rede de fluxo se forem adoptadas diversas hipóteses simplificadoras (como, por exemplo, admitir a parede diafragma e o maciço como sendo impermeáveis). Já com a utilização do Método dos Elementos Finitos, obtém-se as linhas de fluxo com maior precisão. Além disso, apesar do padrão de percolação pelo maciço e pela fundação ser complexo e não intuitivo, as linhas calculadas permitem visualizar este padrão de modo global.

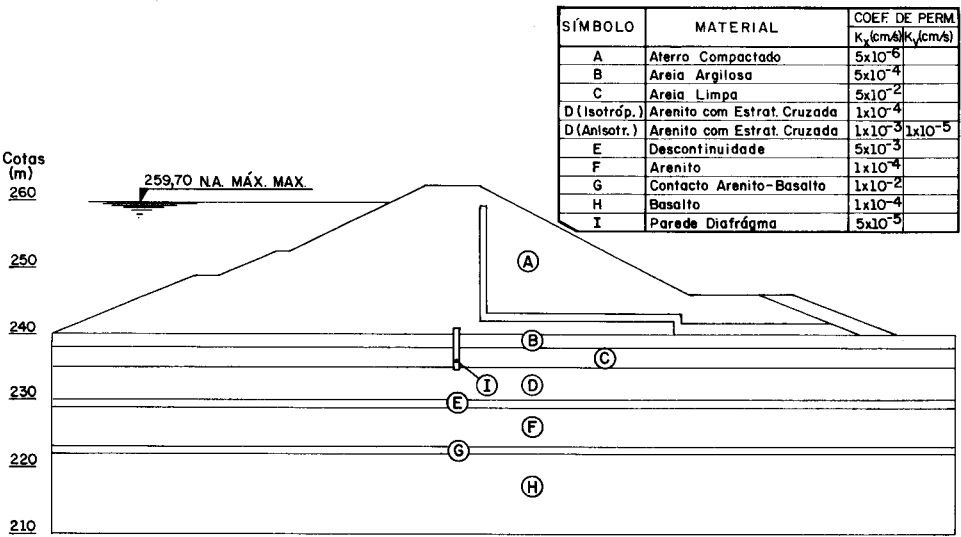


Fig. 4 — Modelo geológico-geotécnico adaptado

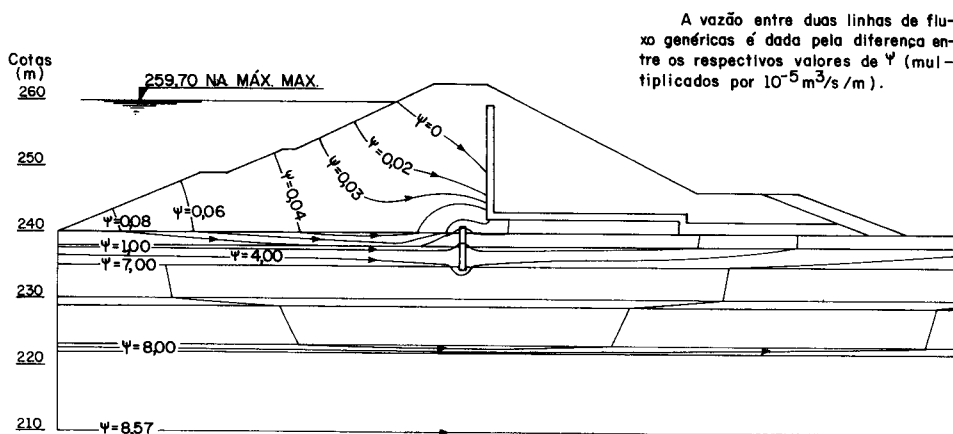


Fig. 5 — Linhas de fluxo pelo maciço e pela fundação de uma barragem de terra, considerando-se o estrato superior de arenito isotrópico

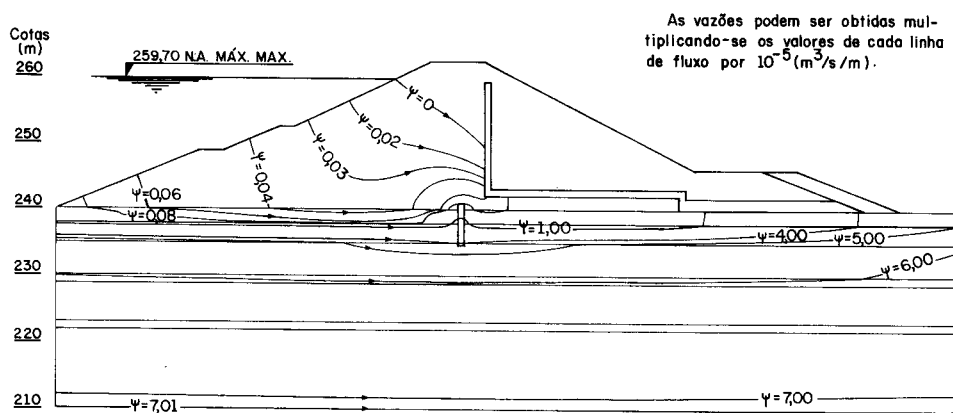


Fig. 6 — Linhas de fluxo pelo maciço e pela fundação de uma barragem de terra, considerando-se o estrato superior de arenito anisotrópico

6 – RESUMO E CONCLUSÕES

Este trabalho apresentou a formulação e a solução, pelo Método dos Elementos Finitos, de problemas envolvendo fluxo de água em solos saturados. Esta formulação permite calcular linhas de fluxo em situações gerais, sem restrições quanto à geometria e permeabilidade dos materiais envolvidos.

A formulação apresentada consiste, basicamente, em estabelecer a equação de Laplace, que descreve a percolação de água em solos saturados, com base na função de fluxo ψ ao invés do potencial, como se faz usualmente. Os programas de análise de percolação em função do potencial podem ser facilmente adaptados para esta formulação. É necessário apenas tomar precauções na imposição das condições de contorno do problema, conforme discutido neste trabalho.

Os exemplos práticos apresentados mostram a determinação das linhas de fluxo pelo maciço e pela fundação de uma barragem de terra em uma secção de geologia complexa e padrão de percolação não-intuitivo. Estes exemplos ilustram o grande potencial de aplicação prática da formulação descrita neste trabalho.

AGRADECIMENTOS

À THEMAG Engenharia, Ltda., pelo apoio proporcionado durante a elaboração deste trabalho. À Companhia Energética de São Paulo, pela permissão referente à divulgação dos resultados aqui apresentados.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- CORREIA, R. (1979) — *O Método da Permeabilidade Variável na Análise por Elementos Finitos dos Escoamentos em Meios Porosos*, Geotecnia 27, Lisboa
- HINTON, E. e OWEN D. R. J. (1979) — *An Introduction to Finite Element Computations*, Pineridge Press Ltd.
- PONTER, A. R. S. (1972) — *The Application of Dual Minimum Theorems to the Finite Element Solution of Potencial Problems with Special Reference to Seepage*, Int. J. for Num. Meth. In Engng., Vol. 4, pp. 85-93.
- SCOTT, R. F. (1963) — *Principles of Soil Mechanics*, Addison-Wesley.
- ZAGGOTTIS, D. L. (1971) — *Aplicações do Método dos Elementos Finitos a Problemas de Percolação*, 3.^{as} Jornadas Luso-Brasileiras de Eng.^a Civil, Lisboa.
- ZIENKIEWICZ, O. C. e MORGAN, K. (1983) — *Finite Elements and Approximation*, Wiley – Interscience.