

# A CONSIDERAÇÃO DOS VAZIOS E DA ANISOTROPIA NUM ESTUDO DE HETEROGENEIDADE\*

The consideration of empty inclusions and anisotropy  
in a study on heterogeneity

por  
JOSE GABRIEL CHARRUA-GRAÇA\*\*

RESUMO — Em anterior trabalho foi feita uma tentativa de teorização da heterogeneidade e sua influência no efeito de escala. Nessa altura dois problemas ficaram em aberto, nomeadamente os efeitos anisotrópicos e as inclusões vazias ou quase-vazias. Retomam-se aqui esses problemas e apresenta-se uma tentativa de solução.

SYNOPSIS — In a former work on essay on theoretical study of heterogeneity was presented. In that work two problems remained insolved, namely the effect of anisotropy and the empty or quasi-empty inclusions. Those problems are now analysed and a solution is proposed.

## I — INTRODUÇÃO

Num trabalho elaborado anteriormente [1] e partindo do princípio que o módulo de deformabilidade dum corpo composto seria a média harmónica dos módulos dos constituintes, conforme Peres-Rodrigues [2], o autor chegou à conclusão que numa amostra de dimensão  $nd$ , em que  $d$  era a dimensão dos grãos e  $n$  o número de grãos constituintes da amostra, a probabilidade de se obter uma certa deformabilidade  $D$  era expressa por uma distribuição normal de parâmetros.

$$\text{valor médio} \quad \bar{D} = D_1 P_1 + D_2 (1 - P_1) \quad (1)$$

\* Manuscrito recebido em . A discussão do trabalho está aberta durante o período de três meses.

\*\* Engenheiro Civil, Investigador Principal do Núcleo de Fundações Rochosas do LNEC.

e desvio padrão 
$$\pi = (D_1 - D_2) \sqrt{\frac{P_1 (1 - P_1)}{n}} \quad (2)$$

em que  $D_1$  e  $D_2$  são as deformabilidades e  $P_1$  e  $P_2 = 1 - P_1$  as proporções de ocorrência dos componentes 1 e 2 respectivamente.

Foi chamada a atenção para duas limitações de que o princípio de que se partia enfermava, e que eram:

- a) a não validade do princípio para casos em que uma das deformabilidades fosse excessivamente elevada em relação à outra, como seria o caso de inclusão de vazios;
- b) a não aplicabilidade a corpos anisotrópicos, a não ser para módulos normais a um plano de isotropia.

É objectivo do presente trabalho a resolução dessas limitações então encontradas.

## II — INCLUSÕES DE ELEVADA DEFORMABILIDADE

Uma via já preconizada por Peres-Rodrigues, para a solução da primeira limitação, foi a consideração, não das inclusões só por si, mas de elementos de dimensão superior que individualmente as contivessem. Assim, um corpo como o representado na fig. 1a deveria ser considerado não como os dois componentes 1 e 2 com os respectivos módulos  $E_1$  e  $E_2 = 0$  e as proporções de ocorrência respectivas  $P_1$  e  $P_2$  mas como por exemplo na fig. 1b, com as componentes 1 e 2' com os respectivos módulos  $E_1$  e  $E_2'$  ( $0 < E_2' < E_1$ ) e respectivas proporções de ocorrência  $P_1' < P_1$  e  $P_2' > P_2$ .

Uma questão que imediatamente se põe é a definição da dimensão que se deve atribuir ao componente fictício 2' pois soluções como as apresentadas em 1b e 1c são possíveis e devem em princípio ser coerentes.

Considere-se, portanto que na solução da fig. 1c a dimensão dos elementos fictícios 2'' é superior à dos elementos 2' por forma que a sua proporção de ocorrência é  $k$  vezes superior ( $P_2'' = kP_2'$ ). Como os valores dos parâmetros da distribuição normal, expressos (1) e (2) se devem manter constantes, facilmente se demonstra que as deformabilidades dos componentes fictícios se encontram relacionados por

$$D_2'' = D_2' \frac{2 \left[ \sqrt{\frac{1 - P_2'}{k(1 - kP_2')}} - 1 \right]}{\left[ 1 + k \sqrt{\frac{1 - P_2'}{k(1 - kP_2')}} \right]} \quad (3)$$

A existência desta solução, mostra que não existe em princípio qualquer problema para se variar a dimensão do componente que contém a inclusão, sendo apenas de ter em atenção que este elemento não deverá ter uma dimensão tão próxima da inclusão que a sua deformabilidade venha a ser excessivamente superior à do componente 1 (digamos a título de exemplo da ordem das mil vezes).

Quanto à deformabilidade que se deve tomar para o elemento, é em princípio possível determinar por via experimental, quer por modelos físicos quer por matemáticas, mas não se vê vantagem numa determinação de tipo geral dado a gama de diferentes inclusões que podem ocorrer, devendo para cada caso específico ser feita a sua determinação.

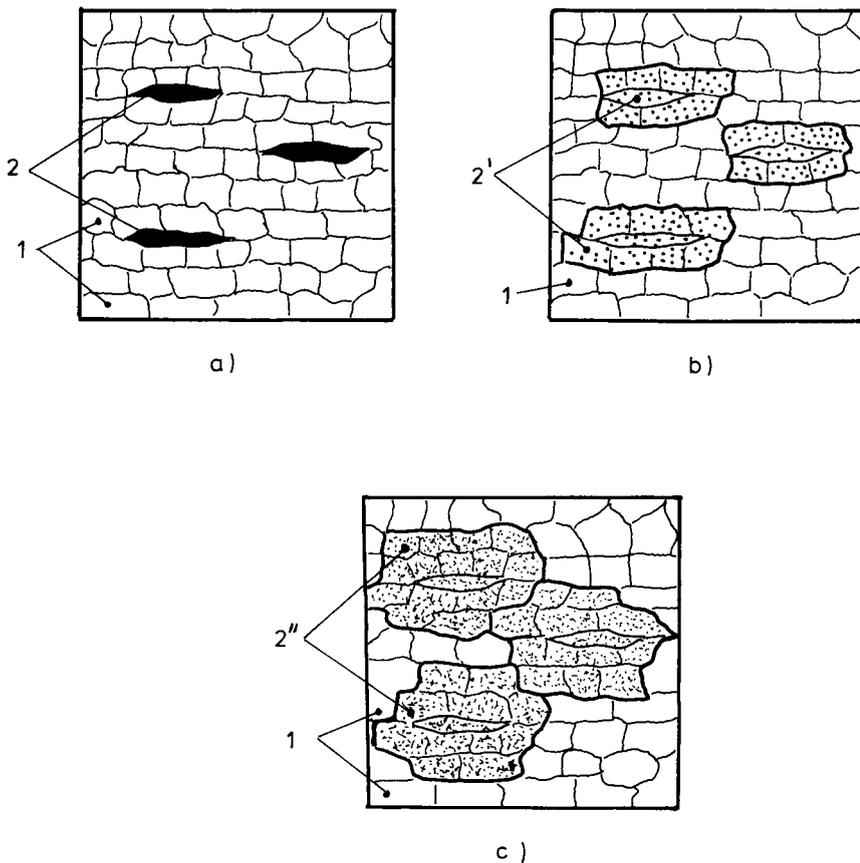


Fig. i

### III — EFEITO DE ESCALA NOS CORPOS ANISOTROPICOS

Considere-se um corpo anisotrope (fig. 2), com eixos principais de deformabilidade coincidentes com os eixos coordenados  $xyz$ . Foi referido no trabalho anterior que se  $xy$  for plano de isotropia as expressões definidoras do efeito de escala eram aplicáveis para solicitações segundo  $z$ . Mais se pode afirmar que para solicitações segundo os eixos principais de deformabilidade, ainda se mantêm válidas aquelas expressões.

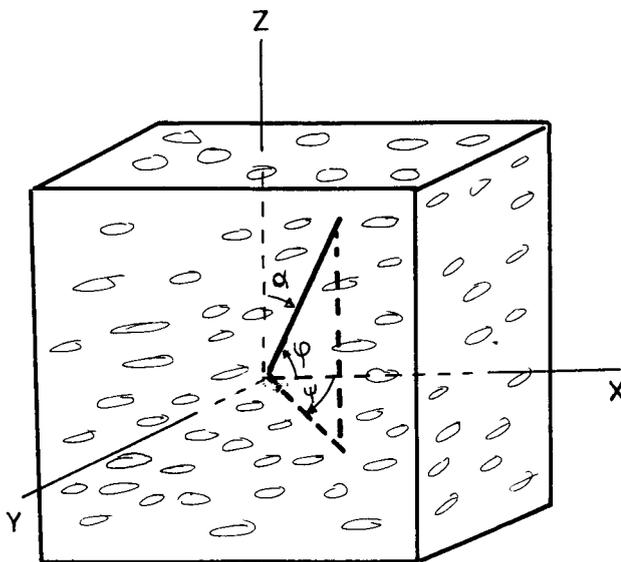


Fig. 2

Vejamos agora como variarão as expressões com a direcção da solicitação.

Pode em princípio admitir-se que para um corpo anisotrope a deformabilidade em qualquer direcção se possa exprimir na deformabilidade segundo uma direcção principal através duma função tendo por parâmetros os ângulos directores e por coeficientes valores característicos do material (constantes elásticas e proporções de ocorrência).

$$E = \frac{E_z}{f(\phi, \psi)} \quad (4)$$

Loureiro Pinto [3] mostrou que nos corpos compostos, transversalmente isotropos (plano  $\lambda$  de isotropia), esta função tinha a forma

$$f(\alpha) = 1 + d \operatorname{sen}^2 \alpha - \delta \operatorname{sen}^4 \alpha \quad (5)$$

em que  $d$  e  $\delta$  dependem dos módulos de elasticidade, coeficientes de Poisson e percentagens de ocorrência dos componentes.

Peres-Rodrigues [4] por sua vez, encontrou uma expressão, aplicável nomeadamente a rochas e maciços graníticos, da forma de uma quartica fechada.

$$f(\phi, \psi) = \sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2 \phi \operatorname{sen}^2 \psi + b^2 \operatorname{sen}^2 \phi \cos^2 \psi + c^2 \cos^2 \psi \cos^2 \psi \operatorname{sen}^2 \psi} \quad (6)$$

Estas duas leis que se apresentam apenas a título de exemplo, mostram que é possível expressar a deformabilidade em qualquer direcção na deformabilidade segundo um eixo principal da deformabilidade, para as rochas e maciços mais comuns e com maior interesse.

Será uma lei do mesmo tipo que caracterizará a variação de valor médio  $\bar{D}$  com a direcção de solicitação, tomando a expressão (1) a sua forma mais geral

$$\bar{D} \alpha \psi = \frac{f(\phi, \psi)}{D_1 P_1 + D_2 (1 - P_1)} \quad (7)$$

podendo particularizar-se para o caso das rochas ou maciços transversalmente isotropos

$$\bar{D} \alpha = \frac{1 + d \operatorname{sen}^2 \alpha - \delta \operatorname{sen}^4 \alpha}{D_1 P_1 + D_2 (1 - P_1)} \quad (7')$$

e para o caso de maciços graníticos ou de anisotropia representável por uma quartica fechada

$$\bar{D} \phi, \psi = \sqrt{\frac{a^2 \operatorname{sen}^2 \phi \operatorname{sen}^2 \psi + b^2 \operatorname{sen}^2 \phi \cos^2 \psi + c^2 \cos^2 \psi \cos^2 \psi \operatorname{sen}^2 \psi}{D_1 P_1 + D_2 (1 - P_1)}} \quad (7'')$$

Estas expressões, ou outras semelhantes caracterizarão o valor médio de deformabilidade em qualquer direcção, em função das deformações dos constituintes  $D_1$  e  $D_2$  e

da proporção de ocorrência segundo a direcção do eixo principal de deformabilidade considerado.

Mais complexo é o problema do desvio padrão  $\sigma$ , pois enquanto que para o valor médio, a variação de proporções relativas dos componentes vinha já afectando a função  $f(\phi, \psi)$ , para o desvio padrão, não só as proporções mas também a dimensão relativa  $n$  poderá variar com a direcção.

Considere-se a fig. 3a. Para a direcção  $\alpha = 0^\circ$  a proporção entre os elementos constituintes é

$$P_{1(0)} = \frac{\bar{d}_0}{\bar{e}_0}$$

em que  $\bar{d}_0$  é a dimensão média dos grãos na direcção de  $\alpha = 0^\circ$  e  $\bar{e}_0$  o espaçamento médio na direcção  $\alpha = 0^\circ$  dos centros dos mesmos.

Para uma direcção de sollicitação qualquer  $\alpha$ , a proporção  $P_\alpha$  será

$$P_{1(\alpha)} = \frac{\bar{d}_\alpha}{\bar{e}_\alpha}$$

só no caso de  $\frac{\bar{d}_\alpha}{\bar{e}_\alpha} = \frac{\bar{d}_0}{\bar{e}_0}$  a proporção de ocorrências se mantém. Ora variando

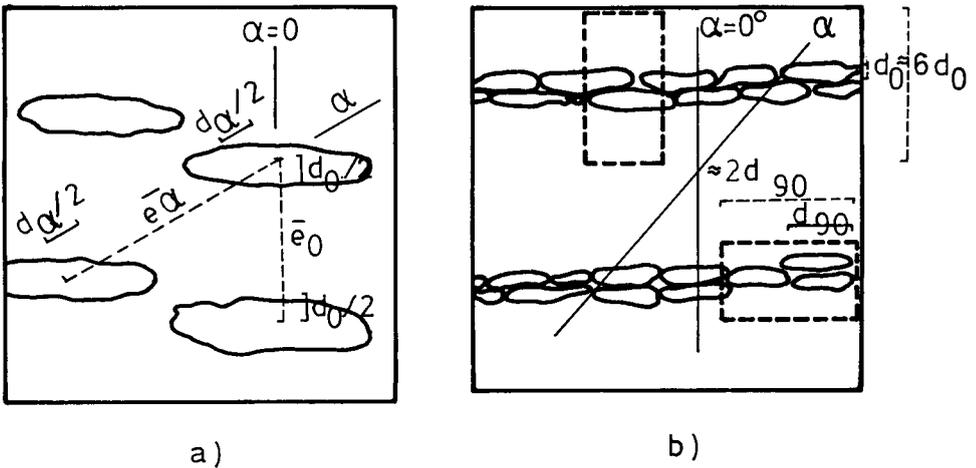


Fig. 3

$\bar{d} \alpha / \bar{d}$  o em função da forma do grão, não existe qualquer razão para que o espaçamento médio varie segundo a mesma lei, a menos que por exemplo os grãos se agrupem em bandas como na fig. 3b. No caso desta figura como no caso de estratos alternados, a proporção de componentes mantém-se constante, dado que as dimensões segundo a direcção  $\alpha$ , são, para os dois componentes as dimensões segundo  $\alpha = 0^\circ$  divididos pelo  $\cos \alpha$ .

Evidentemente que as dimensões dos grãos e os espaçamentos entre eles poderão até nem ser constantes segundo um dado  $\alpha$ , e assim  $P_1(\alpha)$  será generalizado para  $P_1(\phi, \psi)$  em que haverá dois ângulos directores e não apenas um.

Quanto à dimensão relativa  $n$  da amostra, também ela pode ser variável com a direcção, para um mesmo tamanho de amostra, pois variando a dimensão e/ou a forma dos grãos, o número de grãos que podem ser contidos na amostra segundo a direcção de solicitação é variável. Vemos na fig. 3b que a amostra corresponde a  $\alpha = 0^\circ$  terá um  $n \approx 6$  e amostra com a mesma dimensão absoluta, para  $\alpha = 90^\circ$  tem apenas  $n \approx 2$ .

Os dois casos presentes na fig. 3 correspondem a formações diferentes. No primeiro caso, trata-se de uma distribuição homogénea de grãos que devido apenas à sua forma conferem uma certa anisotropia ao composto, no 2.º caso a distribuição dos grãos não é homogénea mas há zonas com maior probabilidade de ocorrência de grãos, e para além da forma destes este agrupamento vai também conferir propriedades anisotrópicas ao material.

Vê-se assim que o valor  $n$  pode de facto variar com a direcção. Podemos no entanto considerar que este valor na direcção  $(\phi, \psi)$  pode ser expresso na forma

$$n(\phi, \psi) = g'(\phi, \psi) n$$

em que  $n$  é a dimensão relativa da amostra referida a dimensões dos grãos na direcção principal correspondente à considerada na expressão (7).

Fazendo a mesma convenção em relação à percentagem de ocorrências

$$\sqrt{P_1(\phi, \psi) [1 - P_1(\phi, \psi)]} = g''(\phi, \psi) \times \sqrt{P_1(1 - P_1)}$$

em que  $P_1$  é a percentagem de ocorrências na mesma direcção principal, virá

$$\sigma = \frac{g(\phi, \psi) (D_1 - D_2) \sqrt{P_1(1 - P_1)}}{n} \quad (8)$$

em que

$$g(\phi, \psi) = \frac{g''(\phi, \psi)}{g'(\phi, \psi)}$$

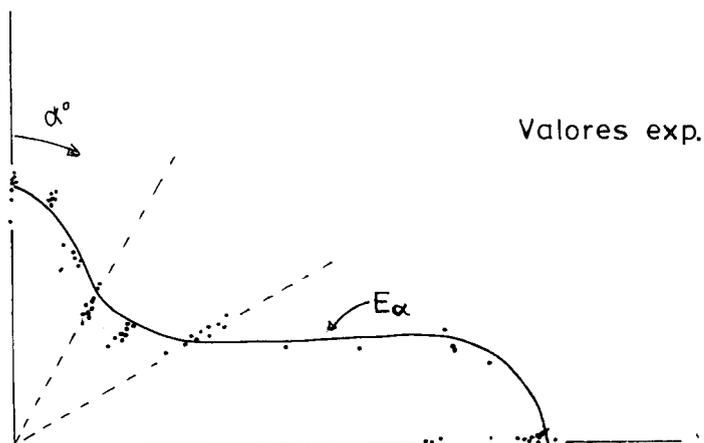


Fig. 4

Na figura 4 apresenta-se uma síntese de resultados obtidos por Loureiro Pinto [ 3 ] em materiais transversalmente isotrópicos, e embora a curva  $E_{\alpha}$  apresentada seja correspondente a valores mais prováveis e não a valores médios, verifica-se uma variação na dispersão, sendo esta máxima para  $\alpha = 90^{\circ}$  como seria de esperar.

Na figura 5, que por simplificação só apresenta um quadro de espaço, encontra-se representada a cheio uma superfície de deformabilidades médias dum material do mesmo tipo e a tracejado representam-se as superfícies que delimitam as deformabilidades que se poderão encontrar com uma probabilidade correspondente a  $K$  desvios padrão. Na mesma figura encontra-se ainda representada, para um valor de  $n = n_1$  e para  $\alpha = 0^{\circ}$  e  $\alpha = 90^{\circ}$  as distribuições das ocorrências prováveis de deformabilidades, que serão como foi visto, distribuições normais.

#### REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- CHARRUA-GRAÇA, J. G. — Contribuição para uma teorização do estudo da heterogeneidade. Geotecnica 27, Novembro de 1979
- PERES-RODRIGUES, F. — Modulus of Elasticity of a rock obtained from the Moduli of Elasticity of its constituents — Mem. 453 — LNEC, 1974.
- LOUREIRO-PINTO, J. — O corpo isotrópico transversal e a sua aplicação ao estudo da deformabilidade de rochas xistosas — LNEC. Tese para especialista 1969.
- PERES-RODRIGUES, F. — Anisotropia das rochas e dos maciços rochosos. Tese para investigador — Mem. 483 — LNEC, 1977.

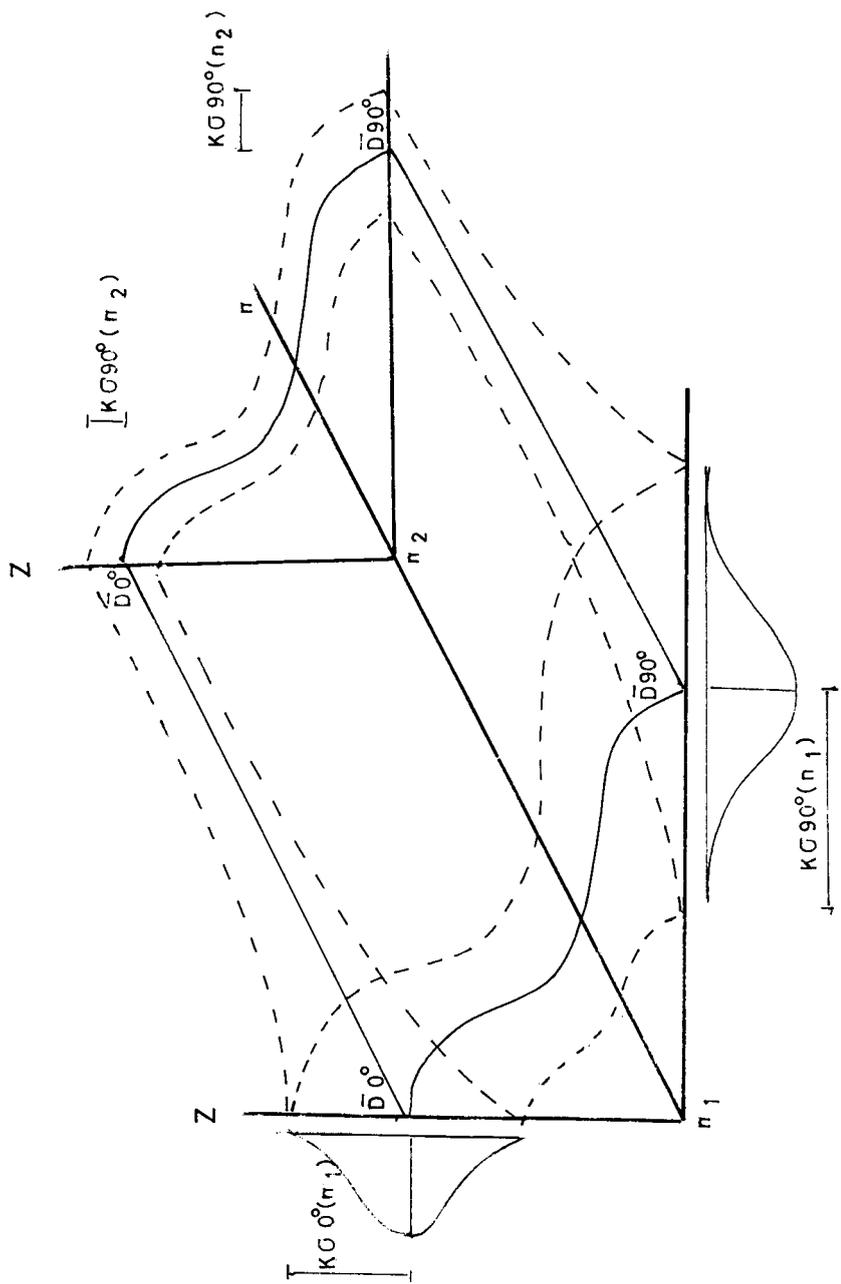


Fig. 5