

# NOVOS MÉTODOS PARA ANALISAR A ESTABILIDADE DE TALUDES HETEROGÊNEOS\*

New methods of analysis for stability of heterogenous slopes

por

JÚLIO B. MARTINS\*\*

EDUARDO B. REIS\*\*\*

ANTÔNIO C. MATOS\*\*\*

**RESUMO** — A estabilidade de solos e rochas pode ser calculada considerando a massa em deslizamento como corpo rígido-plástico em equilíbrio limite ou calculando as tensões e deformações internas usando modelos não-lineares. Neste artigo o primeiro método é generalizado a uma superfície de deslizamento para qualquer configuração de blocos em deslizamento com coesão e atrito nos pontos de contacto. O segundo método é desenvolvido através do recurso ao método dos elementos finitos considerando um modelo elástico-visco-plástico. Os coeficientes de segurança  $F$ , assim obtidos, podem então ser comparados desde que tenham a mesma base de definição.

**SYNOPSIS** — The stability of soil and rock masses has been so far calculated either assuming the limit equilibrium of part of mass sliding as rigid body or calculating internal stress and deformation using, in general, non linear models. In the paper the first method is generalized to one sliding surface to any configuration of sliding blocks with cohesion and friction at contact points; in the second method a elasto-visco-plastic model is applied using the finite elements method. The coefficient of safety calculated in this case by mathematical programming can be compared with that calculated by the finite elements method using the same strenght characteristics (friction and cohesion).

## 1 — INTRODUÇÃO

O método clássico do círculo de deslizamento para a análise da estabilidade de um talude é usado na prática desde Fellenius (1927) e assenta nas teorias de Coulomb (1927). Dentro dos critérios de plasticidade que entretanto se desenvol-

\* Artigo apresentado à "X International Conference in Soil Mechanics-Stockholm, 1981". Os estudos que originaram o presente texto são patrocinados pela NATO.

\*\* Professor da Universidade do Minho.

\*\*\* Assistente da FEUP. Equiparado a bolseiro pelo INIC.

veram pode-se dizer que a solução obtida é do tipo limite superior “upper bound”. Há duas décadas este método foi generalizado para ter em conta superfícies de deslizamento não circulares, Janbu (1957), Morgenstern e Price (1965). Estes métodos usam diferentes processos para tornar o problema estaticamente determinado e o coeficiente de segurança  $F$  é obtido por um processo iterativo pois o sistema de equações é do tipo não linear. Os algoritmos usados na resolução do sistema nem sempre garantem a convergência para uma solução; para contornar este inconveniente, Sarma (1973) substituiu o habitual coeficiente  $F$  por um factor de majoração  $\lambda$  de uma força horizontal aplicada no centro de gravidade de cada fatia e que representa, por exemplo, uma força estática sísmica. Desta forma Sarma evitou a não linearidade introduzida pelo coeficiente  $F$ . Contudo este método dá, em alguns casos, resultados pouco realistas para o factor  $\lambda$ . Um novo método, no qual se considera o habitual coeficiente  $F$ , foi então proposto por Martins (1979).

Recentemente desenvolveram-se métodos para a selecção da forma óptima da superfície de deslizamento usando o cálculo de variações, Castillo e Revilla (1977), Ramamurthy (1977); contudo estes métodos não são aplicáveis a meios heterogêneos. Em qualquer dos casos referidos apenas se utilizam fatias verticais. O método apresentado generaliza a solução de Coulomb para fatias de direcção qualquer.

O outro processo apresentado, para a análise da estabilidade de taludes, admite para o solo, ou rocha, um comportamento do tipo elasto-visco-plástico e utiliza o método dos elementos finitos (M.E.F.) para a obtenção das relações tensões e deformações. As características elásticas, módulo de Young  $E$  e coeficiente de Poisson  $\nu$  bem como as características de resistência, coesão  $c$  e ângulo de atrito  $\Phi$  são os principais dados de caracterização do material. Neste caso é possível obter, para além do estado de tensão, as deformações em qualquer ponto; a estrutura diz-se em rotura quando os deslocamentos em certos pontos ditos de controlo, como os da crista do talude, crescem muito rapidamente com o acréscimo do factor de segurança (redução das características de resistência  $c$  e  $\tan \Phi$ ). Embora com mais interesse para a investigação, é ainda possível obter vários elementos característicos da plasticidade, como sejam os vectores deslocamento plástico, as velocidades de escoamento, as rotações das tensões, etc.

Para se atingir o escoamento plástico estacionário têm sido usados, em plasticidade, dois processos. No primeiro, Snitbhan (1978), o peso próprio do material é progressivamente aumentado por um factor  $\lambda$  sendo analisado para cada situação o estado de deformação da massa terrosa; neste caso diz-se que a rotura

foi atingida quando os deslocamentos tendem para valores que crescem rapidamente com o incremento de carga. No segundo processo, que foi usado neste artigo, as características resistentes do material,  $c$  e  $\tan\Phi$ , são progressivamente reduzidas por um coeficiente  $F$ , até se obter divergência no cálculo dos deslocamentos. A aplicação do primeiro processo a materiais com atrito  $\Phi$ , e quando se desprezam as tensões neutras, conduz a erros no factor segurança, por defeito, pois a cada aumento de peso corresponde sempre um aumento fictício de resistência devida ao atrito.

## 2 — ESTABILIDADE DE TALUDES UTILIZANDO O M.E.F.

O M.E.F. como técnica de solução de problemas lineares elásticos está actualmente bem caracterizado, Zienkiewicz (1971). Para os materiais plásticos a lei de Hooke deixa de ser válida. Nestes casos há que introduzir um critério de cedência como por exemplo o de Mohr-Coulomb e uma teoria de escoamento plástico. O critério de Mohr-Coulomb quando baseado num sistema tridimensional e expresso como função de cedência  $f$  pode ser escrito na seguinte forma:

$$f = 2\sin\Phi\sigma_m + (2\cos\theta - 1/\sqrt{3} \sin\Phi\sin\theta)\sqrt{J_2} - 2\cos\Phi = 0 \quad (1)$$

onde

$$\sigma_m = J_1/3, J_1 = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}, J_2 = \frac{1}{2} s_{ij}s_{ji} \quad (2)$$

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_m\delta_{ij}, \delta_{ij} = 1 \text{ para } i = j;$$

$$\delta_{ij} = 0 \text{ para } i \neq j$$

e  $\theta$  é o ângulo de Lode:

$$-\frac{\pi}{6} < \theta = \frac{1}{3} \sin^{-1} \left( -\frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{J_2^{3/2}} \right) < \pi/6 \quad (3)$$

onde  $J_3$  é o terceiro invariante do tensor das tensões:

$$J_3 = s_{xx}s_{yy}s_{zz} + 2s_{xy}s_{yz}s_{zx} - s_{xx}s_{yz}^2 - s_{yy}s_{zx}^2 - s_{zz}s_{xy}^2 \quad (4)$$

Aceitando, na teoria de escoamento plástico, o princípio da normalidade, a lei da velocidade de escoamento expressa em termos das extensões  $\epsilon$  escreve-se:

$$\epsilon P_{ij} = \gamma \psi(f/f_0) \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ij}} \quad (5)$$

sendo  $Q$  a função potencial plástico,  $\gamma$  um parâmetro de viscosidade e  $\psi$  a função que define o módulo da velocidade  $\epsilon$ . Em certos materiais é ainda legítimo aceitar o princípio da associatividade ( $Q = f$ ) e substituir em (5) a função  $Q$  pelo

valor da função  $f$ . Calculando as derivadas em (5), e operando por incrementos de tempo, as zonas dos elementos que estão plastificadas podem ser tratadas como elásticas, não lineares, dentro de cada intervalo de tempo. O correspondente conjunto de equações de derivadas parciais resultantes da aplicação da técnica dos E.F. pode-se escrever na forma:

$$\Omega \int B^T d\Omega - \bar{F} = 0 \quad e \quad \dot{\epsilon}^p = H \cdot \bar{\sigma} \quad (6)$$

em que  $H$  é uma matriz que contém nos seus elementos as componentes de tensão e as características resistentes do material. A solução deste sistema de equações pode ser obtida por um método iterativo desde que os incrementos de tempo sejam controlados. A existência e a unicidade das soluções são ainda objecto de várias publicações dentro das quais se salienta a de Cormeau (1974). A impossibilidade de serem atingidas outras soluções, que em geral existem, resulta do facto de a posição de partida, que é a solução elástica, ser já uma posição fisicamente possível e próxima da solução procurada.

### 3 — EQUILÍBRIO LIMITE DE UMA CONFIGURAÇÃO DE BLOCOS

Admita-se que, devido a condições geológicas, a superfície de deslizamento externa mais provável é (ABCDEFGH) — Fig. 1 — com superfícies de deslizamen-

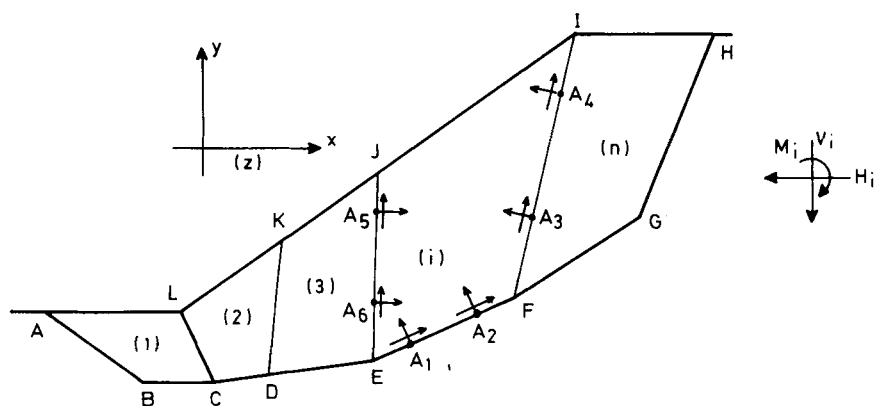


Fig. 1

to internas potenciais CL, DK, EJ e FI. Desta forma, a massa de solo e (ou) rocha pode ser dividida em número  $n$  de "blocos". Se a ruptura ocorrer para esta configuração de "blocos", o atrito e a coesão desenvolver-se-ão em alguns (ou todos) os pontos de contacto.

Tome-se o “bloco” de ordem  $i$  e admita-se que este tem  $n$  pontos de contacto com os seus vizinhos e que todas as forças que nele actuam, incluindo acção da gravidade, acção sísmica e pressões da água intersticial são reduzidas às suas componentes  $V_i$  e  $H_i$  aplicadas no seu centro de gravidade juntamente com um momento  $M_i$ .

O estado de equilíbrio limite para o “bloco” de ordem  $i$  é então traduzido pelo sistema de equações

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m (N_j \cos(n_j, x) + T_j \sin(n_j, x) - \lambda H_i) &= 0 \\ \sum_{j=1}^m (N_j \sin(n_j, x) - T_j \cos(n_j, x) - \lambda V_i) &= 0 \\ \sum_{j=i}^m [(N_j \cos(n_j, x) + T_j \sin(n_j, x))y_j + (N_j \sin(n_j, x) - T_j \cos(n_j, x))x_j - \lambda M_i] &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

onde  $\lambda$  é um factor de carga e  $N_j$  e  $T_j$  são, respectivamente, as forças normal e tangencial que actuam no bloco no ponto de contacto  $A_j(x_j, y_j)$  e  $n_j$  é o vector unitário dirigido para o interior em  $A_j$ .

Para o conjunto da massa deslizante pode ser estabelecido um sistema de  $3n$  equações. A estas devem-se juntar as equações de Mohr-Coulomb.

$$\begin{aligned} T_k &\leq C_k/F + N_k \operatorname{tg} \Phi_k/F \\ N_k &\geq 0 \end{aligned} \quad (8)$$

onde  $\Phi_k$  é o ângulo de atrito no ponto de contacto  $A_k$ ,  $C_k = c_k \cdot l_k$ , sendo  $l_k$  o comprimento da superfície de deslizamento (externa ou interna) correspondente ao ponto de contacto  $A_k$  e  $c_k$  a coesão unitária entre as superfícies de deslizamento, a qual pode variar de ponto para ponto, sendo  $p$  o número total de pontos de contacto ( $k = 1, 2, \dots, p$ ) e  $F$  o coeficiente de segurança.

O número total de incógnitas é  $2p + 1$  ( $p$  forças normais  $N_k$ ,  $p$  forças tangenciais  $T_k$  e o coeficiente de segurança  $F$ ). Em geral o número de incógnitas é maior que o número de equações (16) isto é, a estrutura da Fig. 1 é indeterminada. O problema de se alcançar o valor mínimo para  $F$  e as correspondentes forças  $N_j$  e  $T_j$  pode ser convertido num problema de programação linear, como se segue.

Neste caso as equações (7) e condições (8) definem  $F$  como uma função das incógnitas  $N_k$  e  $T_k$ . Como  $F$  aparece em denominador (17) esta função é não linear. Contudo, por um simples artifício e utilizando um processo iterativo, o problema pode ser convertido num problema de programação linear. Com efeito, pode-se partir com  $F=1$  por exemplo e calcular o valor máximo do factor de carga  $\lambda$  que pode ser aplicado às forças “exteriores”  $V_i$ ,  $H_i$  e  $M_i$  para se atingir o estado de equilíbrio limite. Se o talude é estável dever-se-á ter  $\lambda > 1$ . Nesta hipótese pode-se repetir o cálculo fazendo  $F=1.1$  (por exemplo), obtendo-se um novo valor para  $\lambda$  que deve ser menor que o precedentemente calculado desde que a configuração de deslizamento escolhida seja realista. Por consequência, o processo termina quando se chega a  $\lambda = 1$ . O correspondente valor de  $F$  é o actual coeficiente de segurança para a configuração escolhida. Geralmente, outras configurações podem ser escolhidas de acordo com particularidades geológicas conduzindo a superfícies de deslizamento potencialmente menos resistentes.

As equações (7) e condições (8) conduzem a um problema de programação linear cuja forma canónica é

$$\begin{aligned} &\text{maximizar } \lambda = CT\bar{x} \\ &\text{subordinado} \\ &\text{a } A\bar{x} = \bar{b} \\ &\quad x_i \geq 0 \end{aligned} \tag{9}$$

onde  $\bar{x}$  é o vector das incógnitas,  $\bar{b}$  um vector conhecido e  $A$  a matriz dos coeficientes. Isto vê-se facilmente eliminando  $\lambda$  entre equações (7) e escrevendo (8) sob a forma

$$\begin{aligned} T_k &\leq C_k/F + N_k \cdot \text{tg}\Phi_k/F \\ T_k &\geq -(C_k/F + N_k \cdot \text{tg}\Phi_k/F) \end{aligned} \tag{10}$$

Visto  $T_k$  poderem ser positivos, negativos ou zero, devem ser eliminados de (7) e (10).

Após estas transformações, chega-se a

$$\lambda = CT \cdot \tilde{N} \tag{11}$$

$$A\tilde{N} = \bar{b} \tag{12}$$

$$N_k \geq 0 \tag{13}$$

A matriz  $A$  e os vectores  $\bar{b}$  e  $CT$  podem ser calculados desde que sejam conhecidas as características de resistência  $C_k$  e  $\Phi_k$  e as características geométricas e seja arbitrado  $F$ . A solução de (11) pode ser obtida pelo bem conhecido método "SIMPLEX" onde um número de "variáveis de ajuste" (slack variables) deve ser induzido de modo a ter-se uma forma sistemática de se atingir a solução do sistema (12) subordinado às condições (13) e maximizando  $\lambda$  em (11) (ver por exemplo Luenberger, 1969). Neste caso, o processo pode ainda ser simplificado visto que para pontos na parte inferior da superfície de deslizamento tem-se necessariamente  $T_k \geq 0$ , como consequência a 2.ª equação é substituída por  $T_k \geq 0$ .

Estudou-se também uma variante no método SIMPLEX a fim de se evitar a manipulação explícita das "variáveis artificiais", poupando-se desta forma muita memória no computador.

#### 4 — APLICAÇÃO

O Método dos elementos finitos, tal como foi anteriormente descrito, foi aplicado ao estudo da estabilidade do talude representado na Fig. 2; o solo A é

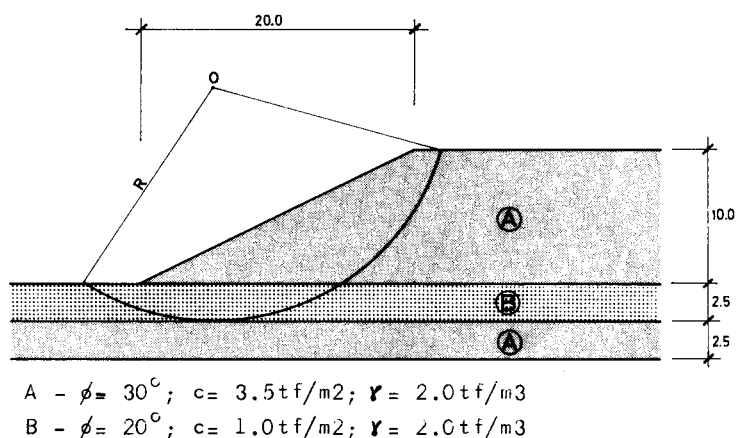


Fig. 2

uma areia argilosa com ângulo de atrito  $\Phi = 30^\circ$ , coesão  $c = 3.5 \text{ tf/m}^2$  e baridade  $\gamma = 2.0 \text{ tf/m}^3$ ; o solo B é uma argila com ângulo de atrito  $\Phi = 20^\circ$ , coesão  $c = 1.0 \text{ tf/m}^2$  e baridade  $\gamma = 2.0 \text{ tf/m}^3$ . Para ambos os solos foi considerado um módulo

de Young  $E = 2000 \text{ tf/m}^2$ . Experimentaram-se dois valores para o coeficiente de Poisson,  $\nu = 0.25$  e  $\nu = 0.4$ . Neste problema foi utilizado o critério de cedência de Drucker Prager.

Usaram-se elementos isoparamétricos parabólicos de oito nós, sem nó central; as dificuldades que surgem na integração, com este tipo de elemento, em domínios triangulares foram evitados limitando a distorsão completa dos lados. O programa detecta o ponto de máximo deslocamento elástico e em seguida considera este como ponto de controle dos deslocamentos de toda a massa terrosa em regimen elasto-plástico. Neste caso o ponto em questão foi o n.º 278, situado perto do topo do talude. Apresenta-se na Fig. 3 a relação do deslocamento deste ponto como factor de segurança  $F$ .

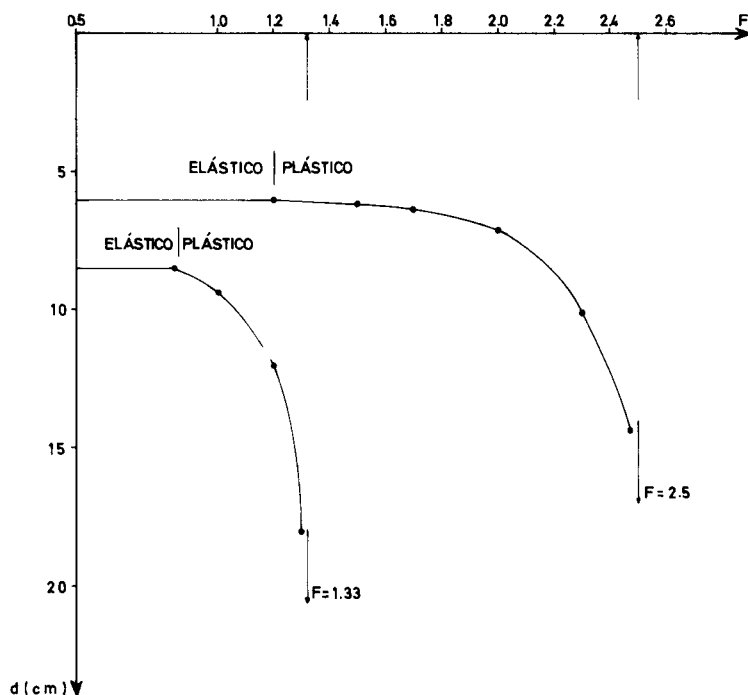


Fig. 3

O factor  $F$  reduz simultaneamente a coesão  $c$  e a tangente de ângulo de atrito  $\Phi$ . Verificou-se, por exemplo, para  $\nu = 0.25$  e  $F = 0.85$  um deslocamento elástico de 9 cm; para  $F = 1.0$  algumas zonas do material plastificam, aumentando os deslocamentos, mas o talude no conjunto é ainda estável; para  $F = 1.4$  há um au-



mento das zonas plastificadas, e para  $F = 1.5$  já não é possível obter convergência no cálculo dos deslocamentos.

Usando um coeficiente de Poisson  $\nu = 0.4$ , verificou-se uma diminuição nos deslocamentos sendo necessário reduzir fortemente  $c$  e  $\tan\Phi$  para se obter a rotura ( $F = 2.5$ ). A explicação para este aumento do coeficiente  $F$  está na dependência que existe entre as deformações elasto-plásticas no plano, nos estados planos de deformação e a tensão normal ao plano. O módulo de Young  $E$  tem uma influência pouco significativa em  $F$ . As condições fronteira desempenham um papel importante nos deslocamentos calculados para a massa terrosa e por consequência na sua estabilidade. A base do talude foi considerada fixa na direcção vertical e as fronteiras laterais afastadas e com deformações verticais livres e horizontais nulas.

O mesmo talude foi analisado, através de um programa de cálculo automático, pelo método do círculo de deslizamento tendo-se obtido um coeficiente de segurança mínimo  $F = 1.9$ . Se no M.E.F. for admitida uma dependência linear entre  $F$  e  $\nu$  verifica-se que o mesmo valor 1.9 é obtido para  $\nu = 0.3$ .

Usando o segundo método descrito, de programação linear, na análise do mesmo talude obteve-se o factor de carga  $\lambda = 10.58$  para  $F = 1.3$ ;  $\lambda = 0.966$  para  $F = 1.9$ ;  $\lambda = 0.51$  para  $F = 2.5$ . Interpolando linearmente obtém-se  $F = 1.87$  como valor do coeficiente de segurança.

## 5 — CONCLUSÕES

A estabilidade de taludes pode ser analisada pelo método dos elementos finitos. Existem dois critérios para se obter o coeficiente de segurança  $F$ : a majoração da baridade  $\gamma$  ou a redução das características resistentes  $c$  e  $\tan\Phi$ . O segundo critério é geral; o primeiro só se pode aplicar a maciços sem atrito. Foi verificado que o coeficiente de Poisson afecta os resultados no cálculo da estabilidade do talude pelo método dos elementos finitos; deve-se, portanto, considerar com cuidado os valores que se atribuem a este coeficiente.

As leis constitutivas baseadas em  $E = f(s_{ij}, \epsilon_{ij})$ , onde  $s_{ij}$  e  $\epsilon_{ij}$  são “normas” dos respectivos tensores e onde  $f$  pode ser obtido de medidas laboratoriais, devem também ser tentadas pois alguma simplificação se poderia obter em relação à expressão de Mohr-Coulomb que é mais apropriada à análise rígido-plástica tradicional. Contudo, estando esta comprovada por mais de meio século de experiência, deve continuar-se o seu uso para a determinação do coeficiente  $F$ . De qualquer forma, os métodos baseados na elasto-visco-plasticidade são importan-

tes pois fornecem a evolução dos deslocamentos e são adaptáveis a uma grande generalidade de casos. A dificuldade continua a estar na obtenção de relações tensões-deformações mais gerais e realistas.

#### REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- CASTILLO, E. e J. REVILLA (1977). The calculus of variations and the stability of slopes. Proc. 9th Int. Conf. Soil Mech. F.E., Tokyo, 2:9-12.
- FELLENIUS, W. (1927). Erdstatistische Berechnungen mit Reibung und Kohäsion, Ernst, Berlin.
- JANBU, N. (1957). Earth pressure and bearing capacity by generalized procedure of slices. Int. Conf. Soil Mech., 2:207-212.
- LUENBERGER, D.G. (1969). Introduction to linear and non linear programming. Ed. Addison-Wesley.
- MARTINS, J.B. (1979). Revisão dos métodos de resolução do problema do equilíbrio-limite dos maciços terrosos e rochosos diaclasados. I.U.T.A.M. National Congress, Lisbon, LNEC, Oct. 1979.
- MARTINS, J.B. and A.C. MATOS (1979). A survey of the methods to calculate safety against collapse in soil and rock masses. 3rd. Int. Conf. on Num. Meth. in Geomechanics, (1), 339-345, Aachen, 2/6 April 1979.
- MORGENSTERN, N.R. and V.E. PRICE (1965). The analysis of the stability of general slip surfaces, geotechnique. Vol. XV, 1, March, 79-93.
- RAMAMURTHY, T.C.G.P. NARAYAN and U.P. BHATKAR. Variational method for slope stability analysis. Proc. 9th I.C.S.M.F.E., Tokyo, 1977, pp. 139-142.
- SARMA, S.K. (1973). Stability analysis of embankments and slopes, geotechnique 23, n.º 3: 423-433.
- SNITBHAN, N. and W.F. CHEN (1978). Elastic-plastic large deformation analysis of soil slopes, computer & Str., 9:567-577.
- ZIENCKIEWICZ, O.C. (1971). The finite element method in engineering science, Mc Graw-Hill.
- ZIENCKIEWICZ, O.C. and I.C. CORMEAU (1974). Visco-plasticity and creep in elastic solids — a unified numerical solution approach. Int. J. Num Meth. Eng., vol. 8:821-845.