

APLICABILIDADE DAS TEORIAS E CRITÉRIOS DE ROTURA ÀS ROCHAS E AOS MACIÇOS ROCHOSOS

THE Applicability of the Rupture Theories and Criteria to Rocks and Rock Masses

Por
F. PERES-RODRIGUES*

RESUMO — Apresentam-se as principais teorias e critérios de rotura com aplicações às rochas e aos maciços rochosos, fazendo-se algumas considerações sobre a teoria de Griffth e o mecanismo da rotura frágil de Bieniawski.

SYNOPSIS — The most important rupture theories and criteria which may be applied to rocks and rock masses are presented, together with some considerations about Griffth's theory and Bieniawski's brittle fracture mechanism.

Como se sabe as roturas por compressão, tracção ou corte das rochas e dos maciços rochosos exibem comportamento bastante complexo e diversificado, pois os materiais em causa, além de se poderem considerar como corpos variando desde o dúctil ao frágil, variação esta ainda dependente da velocidade das cargas impostas e do seu tempo de actuação, apresentam quase sempre uma anisotropia e heterogeneidade mais ou menos acentuadas. As diversas teorias e critérios de rotura, já em número apreciável, mostram a não preponderância de nenhum, sendo cada um deles aplicável a determinados casos particulares.

As várias teorias de rotura existentes, entre as quais as denominadas por Mello Mendes [10], teorias clássicas de rotura: teoria de Rankine ou de Lamé, teoria de St. Venant ou de Poncelet, teoria de Beltrami, teoria da tensão octaédrica máxima e teoria de Von Mises; e ainda a teoria de Mohr-Cauchy, a teoria de Coulomb, caso particular da anterior, a teoria de Tresca, com aplicação

*Engenheiro investigador, Laboratório Nacional de Engenharia Civil.

praticamente nula na Mecânica das Rochas, a teoria de Griffith e a obtida desta por modificação de McClintock e Wash e, finalmente, o mecanismo da rotura frágil de Bieniawski, são exemplos de numerosas tentativas feitas para a compreensão e explicação do fenómeno altamente complexo da rotura.

A teoria de Rankine ou de Lamé [10], também denominada por teoria da tensão máxima, considera que a rotura tem lugar quando, num dado ponto do material, é atingido um dado valor considerado como máximo para a tensão normal, e isto quer se trate de ensaios uniaxiais ou triaxiais, de tracção ou de compressão.

A teoria de St. Venant ou de Poncelet [10], também chamada de teoria da extensão máxima, admite que a rotura de um dado material ocorre quando, num dado ponto, se atingir um valor para a extensão considerado como máximo.

A teoria de Beltrami [10] ou teoria da energia de deformação máxima, afirma que a energia armazenada num corpo por unidade de volume sob a acção de qualquer estado de tensão, não pode exceder a que for armazenada, nessa mesma unidade de volume, num ensaio uniaxial de tracção ou compressão.

A teoria da tensão octaédrica máxima [10] considera que os planos de corte, por onde se dá a rotura, fazem ângulos iguais com as direcções principais.

A teoria de Von Mises [10] ou teoria da energia de distorção máxima, admite que a rotura é devida à mudança de forma e que não é influenciada pela quantidade de energia elástica associada à variação de volume.

A teoria de Mohr-Cauchy [16] considera que a ruína de um dado corpo sujeito a um estado de tensão triaxial $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, só depende das tensões normais extremas e que as correspondentes circunferências de Mohr admitem uma envolvente.

Se se admitir que a rotura se dá por corte, então a envolvente será dada pela equação:

$$\tau = f(\sigma) \quad (1)$$

a que se dá o nome de curva intrínseca e que se apresenta na Fig. 1.

Se a relação indicada na expressão (1) for linear:

$$\tau = c + \sigma \operatorname{tg} \Phi \quad (2)$$

em que:

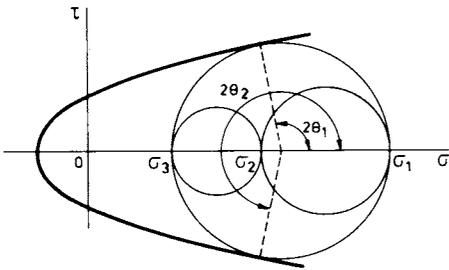
c — coesão do material;

Φ — ângulo de atrito do material;

a teoria de Mohr-Cauchot particulariza-se na teoria de Coulomb [16], recebendo a expressão (2) o nome de recta de Coulomb e dela se deduzindo que a rotura por corte só se pode dar segundo planos paralelos à tensão intermédia, dependendo dos valores das tensões normais extremas, e sendo as orientações dos planos de rotura apenas função do ângulo de atrito, Fig. 2. Igualmente se conclui que os dois planos de rotura fazem com o plano onde actua a tensão normal máxima, os ângulos de:

$$\Theta_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\Phi}{2} \text{ e } \Theta_2 = \frac{3\pi}{4} - \frac{\Phi}{2}, \quad (3)$$

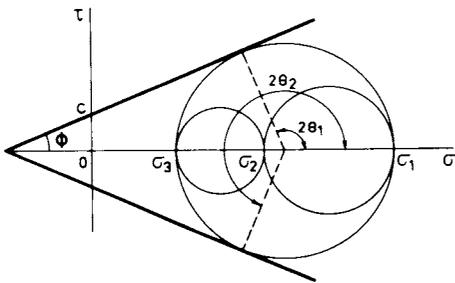
fazendo os dois planos entre si o ângulo de:



$$\Theta_2 - \Theta_1 = \frac{\pi}{2} - \Phi. \quad (4)$$

Fig. 1 — Envolvente de Mohr

No caso particular de Φ ser nulo, a expressão (2) simplifica-se para:



$$\tau = c \quad (5)$$

Fig. 2 — Rectas de Coulomb

e as rectas de Coulomb tornam-se paralelas ao eixo dos σ , Fig. 3, desta se deduzindo a condição da rotura:

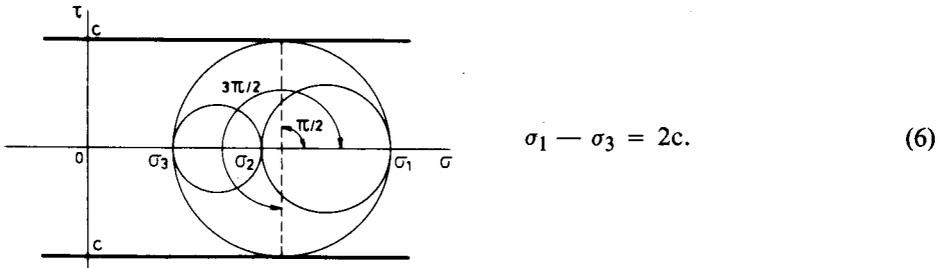


Fig. 3 — Condição de Tresca

Esta condição impõe que a rotura por corte se verifique por um plano onde a tensão tangencial atinja o valor da coesão, c , do material, recebendo a teoria que a admite o nome de teoria de Tresca [16], de aplicação praticamente nula na Mecânica das Rochas, dado que impõe valor nulo para o ângulo de atrito, Φ . Por outro lado, esta condição introduzida nas expressões (3) e (4) conduz a que os planos de corte bissectem as direcções das tensões principais máxima e mínima, facto que praticamente não ocorre nos materiais rochosos.

A teoria de Griffth [6], enunciada em 1920 para a rotura dos materiais frágeis quando submetidos a esforços de tracção, punha como hipótese o início da ruína a partir das discontinuidades ou microfissuras existentes. Em 1924, Griffth [5] alargou a sua hipótese à rotura devida a um estado de compressão triaxial e estabeleceu as leis aplicáveis à determinação das tensões de rotura, mas só em 1950 a sua teoria passou a ser aplicada à rotura das rochas, principalmente às rochas consideradas frágeis. Griffth considerou que as microfissuras existentes no interior dos materiais tinham secções elípticas muito alongadas e estabeleceu por critérios baseados, ou na concentração de tensões de tracção nos vértices das microfissuras ou no balanço energético, o valor da tensão de tracção, σ_t , para o início da rotura:

$$\sigma_t = \sqrt{\frac{2\gamma E}{\pi c (1-\nu^2)}} \quad (7)$$

em que:

γ — energia de superfície específica, isto é, por unidade de comprimento da fenda;

E — módulo de elasticidade do material;
 ν — coeficiente de Poisson do material;
 $2c$ — eixo maior da fenda elíptica.

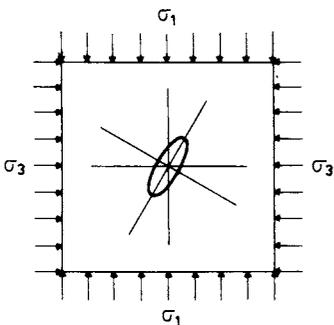
A teoria de Griffth deduzida para microfissuras planas, foi generalizada por Sack [17] em 1946 a microfissuras de forma elipsoidal muito achatada, obtendo para tensão de tracção necessária ao início da rotura:

$$\sigma_t = \sqrt{\frac{\pi\gamma E}{2c(1-\nu^2)}} \quad (8)$$

Em 1948, Orowan [13], chegou, por via diferente, atendendo ao valor da tensão de tracção necessária à rotura das ligações intermoleculares, à equação:

$$\sigma_t = \sqrt{\frac{\gamma E}{2c}} \quad (9)$$

A dificuldade prática da determinação do valor da energia de superfície específica, γ , por um lado, e a necessidade da extensão da teoria de Griffth à rotura de corpos frágeis quando sujeitos a estados triaxiais de compressão, por outro, foram motivos para orientar o estudo de forma a estabelecer uma relação entre as tensões principais extremas, σ_1 e σ_3 , impostas ao corpo, e a tensão de rotura por tracção, σ_t . Assim as investigações de Sack [17] levaram à conclusão de que, no interior de um corpo frágil sujeito a um estado de tensão triaxial, as microfissuras elipsoidais, mais aptas a darem origem à rotura, se dispõem de forma a que o plano, definido pelas suas maiores dimensões, contenha a direcção da tensão principal intermédia, σ_2 , sendo, por isso, a distribuição das tensões à volta dos vértices dessas microfissuras independente desta tensão, Fig. 4. Por considerações geométricas e mecânicas chega-se à fórmula:



$$(\sigma_1 - \sigma_3)^2 + 8 \sigma_t (\sigma_1 + \sigma_3) = 0 \quad (10)$$

Fig. 4 — Posição da microfissura elipsoidal

que relaciona as tensões principais extremas aplicadas, σ_1 e σ_3 , com a resistência à tracção do material, σ_t , no início da rotura. Para a determinação da curva intrínseca, basta ter em consideração que a equação genérica da circunferência de Mohr é dada por:

$$\left(\sigma - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}\right)^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right)^2 \quad (11)$$

Eliminando entre as expressões (10) (11) o valor $(\sigma_1 - \sigma_3)$ resulta a equação de uma família de circunferências de Mohr [14]:

$$\left(\sigma - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}\right)^2 + \tau^2 + 4\sigma_t \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} = 0 \quad (12)$$

de parâmetro $(\sigma_1 + \sigma_3)/2$.

A curva intrínseca do material, envolvente da família de circunferências (12), obtém-se eliminando o parâmetro $(\sigma_1 + \sigma_3)/2$ entre a expressão (12) e a sua derivada em ordem ao referido parâmetro, donde resulta:

$$\tau^2 = 4 \sigma_t (\sigma_t - \sigma) \quad (13)$$

que representa, no plano (σ, τ) , uma parábola do eixo coincidente com os eixos dos σ , de vértice no ponto de abscissa σ_t e tendo a origem das coordenadas como foco, Fig. 5.

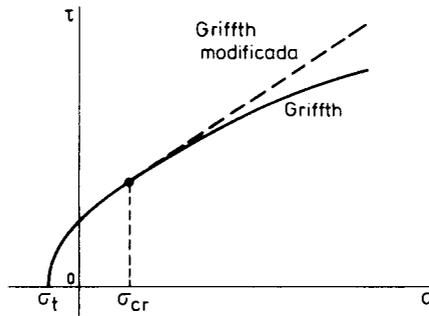


Fig. 5 — Curvas intrínsecas das teorias de Griffith e de Griffith modificada.

A teoria de Griffth foi modificada em 1963 por McClintock e Walsh [11] a fim de ter em conta o efeito da compressão nos bordos das microfissuras após o seu fechamento, fig. 6. Como resultado deste fechamento, instalam-se as tensões σ_n e τ_n nos bordos das microfissuras, sendo admissível afirmar que, se for σ_{cr} a tensão necessária para o encosto dos bordos e μ o seu coeficiente de atrito, seja:

$$\sigma_n \left. \begin{array}{l} \right\} = 0 \quad \text{para } \sigma_x \leq \sigma_{cr} \\ \left. \begin{array}{l} \right\} = \sigma_x - \sigma_{cr} \quad \text{para } \sigma_x > \sigma_{cr} \end{array} \right. \quad (14)$$

$$\zeta_n \left. \begin{array}{l} \right\} = 0 \quad \text{para } \sigma_x \leq \sigma_{cr} \\ \left. \begin{array}{l} \right\} = \mu (\sigma_x - \sigma_{cr}) \quad \text{para } \sigma_x > \sigma_{cr}. \end{array} \right. \quad (15)$$

Enquanto for $\sigma_x \leq \sigma_{cr}$, a teoria de Griffth continua a ser válida, quando $\sigma_x > \sigma_{cr}$ chega-se à seguinte expressão:

$$(\sigma_1 - \sigma_3) \sqrt{1 + \mu^2} - \mu (\sigma_1 + \sigma_3 - 2 \sigma_{cr}) + 4 \sqrt{\sigma_t(\sigma_t - \sigma_{cr})} = 0. \quad (16)$$

Resultados experimentais, realizados por diversos investigadores, mostraram que as tensões de encosto dos bordos, σ_{cr} , apresentam valores muito baixos, sendo por isso razoável a sua anulação [1], pelo que a expressão [16] se pode particularizar para:

$$(\sigma_1 - \sigma_3) \sqrt{1 + \mu^2} - \mu (\sigma_1 + \sigma_3) + 4 \sigma_t = 0.$$

Em face da dificuldade prática da determinação da tensão de rotura por tracção, σ_t , do material, Hoek e Bieniawski [7], propuseram a sua substituição pela tensão de rotura por compressão σ_c , tendo chegado à expressão seguinte:

$$(\sigma_1 - \sigma_c) \sqrt{1 + \mu^2} - \mu - \sigma_3 \sqrt{1 + \mu^2} + \mu = 0. \quad (17)$$

A curva intrínseca correspondente à teoria de Griffth modificada, obtém-se de modo análogo à já obtida para a teoria de Griffth. Assim, eliminando $(\sigma_1 - \sigma_3)$ entre as expressões (11) e (16), obtém-se a equação da família de circunferências:

$$\left(\sigma - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \right)^2 + \tau^2 - \frac{\{ \mu[(\sigma_1 + \sigma_3) - 2\sigma_{cr}] - 4 \sqrt{\sigma_t(\sigma_t - \sigma_{cr})} \}^2}{4(1 + \mu^2)} = 0. \quad (18)$$

A curva intrínseca procurada, será dada pela expressão que resulta da eliminação do parâmetro $(\sigma_1 + \sigma_3)$ entre a equação (18) e a sua derivada em ordem a esse mesmo parâmetro, donde:

$$\tau = \mu (\sigma - \sigma_{cr}) - 2 \sqrt{\sigma_t (\sigma_t - \sigma_{cr})} \quad (19)$$

ou, considerando σ_{cr} nulo, como em (17):

$$\tau = \mu \sigma - 2 \sigma_t. \quad (20)$$

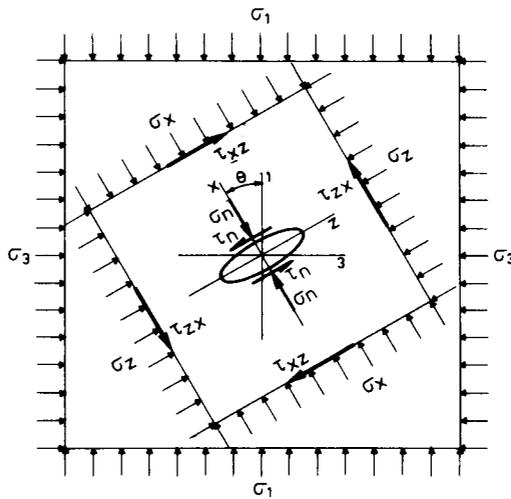


Fig. 6 — Compressão nos bordos das microfissuras

É de salientar que a consideração da existência de tensões de fechamento das microfissuras, σ_{cr} , leva a curva intrínseca da teoria de Griffth modificada a particularizar-se numa recta, expressão (19), para os valores de $\sigma > \sigma_{cr}$, Fig. 5, tal como na teoria de Coulomb.

A partir das expressões (13) e (19) verifica-se que as curvas intrínsecas das teorias de Griffth e de Griffth modificada têm de comum o ponto de coordenadas [14]:

$$\sigma = \sigma_{cr} \quad \tau = -2 \sqrt{\sigma_t (\sigma_t - \sigma_{cr})} \quad (21)$$

e que neste ponto a tangente à curva intrínseca da teoria de Griffth é dada pela equação:

$$t = \sqrt{\frac{\sigma_t}{\sigma_t - \sigma_{cr}}} (\sigma - \sigma_{cr}) - 2 \sqrt{\sigma_t (\sigma_t - \sigma_{cr})}. \quad (22)$$

Para que a recta correspondente à curva intrínseca da teoria de Griffth modificada seja tangente à curva intrínseca da teoria de Griffth no ponto comum de coordenadas (21) é necessário que as duas expressões (19) e (22) sejam iguais, isto é, que o coeficiente de atrito dos bordos das microfissuras, μ , seja dado por[14]:

$$m = \sqrt{\frac{\sigma_t}{\sigma_t - \sigma_{cr}}}; \quad (23)$$

como em geral, por resultados experimentais, a tensão de encosto dos bordos das microfissuras, σ_{cr} , tem um valor muito perto do zero, o valor de μ dado por (23) torna-se praticamente igual à unidade, resultado a que muitos investigadores, por via experimental, também chegaram [9] e [8].

O mecanismo da rotura frágil de Bieniawski [1] e [2] baseia-se na aceitação da teoria de Griffth modificada até ao início da rotura frágil, fazendo introduzir em seguida a hipótese adicional da variação da energia cinética, dW_k , devida ao movimento dos bordos das microfissuras ser significativo no comportamento e propagação da rotura frágil, isto é, deverá observar-se a seguinte equação diferencial:

$$\frac{dW_e}{dc} + \frac{dW_s}{dc} + \frac{dW_k}{dc} \quad (24)$$

em que:

dW_e — variação da energia elástica de deformação;

dW_s — variação da energia de superfície da microfissura;

dc — variação do comprimento da microfissura.

A energia cinética, W_k , para um estado plano de tensão correspondente a uma tracção uniaxial, deduzida por Mott [12], é dada pela expressão:

$$W_k = \frac{k \rho c^2 v^2 \sigma^2}{2gE^2} \quad (25)$$

sendo:

k — constante de proporcionalidade;

ρ — peso específico do material;

c — meio comprimento da microfissura;
 v — velocidade de propagação da rotura;
 σ — tensão aplicada;
 g — aceleração da gravidade;
 E — módulo de elasticidade do material.

A velocidade de propagação da rotura, v , pode ser dada, segundo Dulaney e Brace [4], por:

$$v = \sqrt{\frac{2\pi g E}{k \rho}} \sqrt{\frac{c-c_0}{c}} \quad \text{ou} \quad v = \sqrt{\frac{2\pi g E}{k \rho}} \cdot \frac{c-c_0}{c} \quad (26)$$

consoante se considera ou não a condição de $\frac{dv}{dc}$ ser nula e sendo c_0 o meio comprimento inicial da microfissura. O valor limite da velocidade de propagação da rotura, v , denominada velocidade terminal, v_T , obtém-se, por condições aos limites de (26) e tem, em qualquer das expressões, o valor:

$$v_T = \lim_{c \rightarrow \infty} v = \sqrt{\frac{2\pi g E}{k \rho}} \quad (27)$$

donde se vê que esta velocidade terminal, v_T , é uma característica do material, por apenas depender de E e ρ ; a sua substituição em (26), permite escrever:

$$v = v_T \sqrt{\frac{c-c_0}{c}} \quad \text{ou} \quad v = v_T \frac{c-c_0}{c} \quad (28)$$

Como síntese pode dizer-se que o mecanismo da rotura frágil de Bieniawski, apoiado em numerosos estudos experimentais realizados com aparelhagem altamente especializada, veio mostrar que a teoria de rotura de Griffith modificada apenas pode ser aplicada ao início da rotura, pois que na rotura franca, a recta intrínseca definida pela expressão (19) deixa de ser válida, tomando a forma curva de acordo com a teoria de Mohr.

Para melhor compreensão do que se acaba de expôr a traços largos, apresenta-se um exemplo referente aos ensaios realizados por Bieniawski [3] sobre provetes de norite, fig. 7.

Nesta figura encontra-se representada a relação entre a velocidade de propagação das microfissuras, v , e o seu comprimento relativo c/c_0 . Admitindo que a

lidade do fenómeno. Entre os pontos B e C dá-se o parecimento de outras microfissura ramificadas com a inicial até se atingir em C a rotura franca.

Pode-se pois afirmar que as causas que originam a rotura são variadas e as suas influências nem sempre iguais em situações diversas, dado o elevado número de parâmetros em jogo. São assim naturais as inúmeras investigações teóricas e experimentais que desde há tempo vêm sendo feitas com o intuito de prever, baseadas em hipóteses ou efeitos mais ou menos envolventes de um conhecimento ainda precário, o comportamento durante e após a rotura das rochas e dos maciços rochosos.

Se à engenharia civil mais interessa o conhecimento dos estados de tensão e deformação acentuadamente antes da rotura, à engenharia de minas e de obras subterrâneas o interesse é, em geral, maior no que se refere ao comportamento junto à rotura.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS:

- [1] BIENIAWSKI, Z. T. — Mechanism of brittle fracture of rock. *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.*, Vol. 4, pp. 395-430, 1967.
- [2] BIENIAWSKI, Z. T. — Mechanism of brittle fracture of rock, of *Sci. and Ind. Reser.* N.º MEG 518, Pretória 1967.
- [3] BIENIAWSKI, Z. T. — Stable and unstable fracture propagation in rock. Report of the South African Council of Sci. and Ind. Reser. N.º MEG 493, Oct., 1966.
- [4] DULANEY, E. N.; BRACE, W. F. — Velocity behaviour of a growing crack. *J. Appl. Phys.*, 31, (12) 2233-2236, 1960.
- [5] GRIFFITH, A. A. — Theory of rupture. *Proc. I Int. Cong. Appl Mech.*, pp. 55-63, Deft. 1925.
- [6] GRIFFITH, A.A. — The Phenomena of rupture and flow in solids. *Phil. Transp. Roy Soc.*, Vol. 221, pp. 163-198, London, 1920.
- [7] HOEK, E.; BIENIAWSKI, Z. T. — Fracture propagation mechanism in hard rock. *Proc. I Cong. I.S.R.M.*, Vol. 1, pp. 243-249, Lisboa, 1966.
- [8] HOEK, E.; BIENIAWSKI, Z. T. — Brittle fracture propagation in rock under compression. *Int. J. Frac. Mech.* 1, (3) 139-155, 1965.
- [9] McLAMORE, R.; GRAY, K. E. — The mechanics behaviour of anisotropic sedimentary rocks. *J. Engrs. Ind. (Trans. ASME)*, pp. 62-76, Feb. 1967.
- [10] MELLO MENDES, F. — *Mecânica das Rochas*. Instituto Superior Técnico. Lisboa, 1968.
- [11] MELLO MENDES, F. — About the anisotropy of schistose rocks. *Proc. I Cong. I.S.R.M.*, Vol. 1, pp. 607-612, Lisboa, 1966.
- [12] MOTT, N. F. — Fracture of metals: Theoretical considerations. *Engineering* 165, 15-18, 1948.

norite tem um coeficiente de Poisson da ordem de 0,25, que a constante k que lhe corresponde é tal que a fórmula (27), segundo Roberts e Wells [15], assume o aspecto:

$$v_T = 0,38 \sqrt{\frac{gE}{\rho}} \quad (29)$$

e com os valores determinados de $E = 93 \times 10^4 \text{ kg/cm}^2$, $\rho = 2,65 \text{ g/cm}^3$ e $g = 9,8 \text{ m/seg}^2$ vem $v_T = 1875 \text{ m/seg}$.

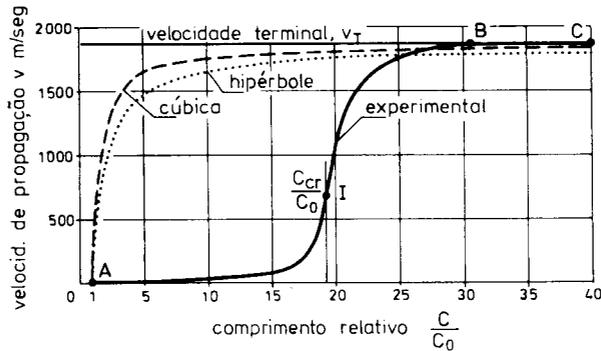


Fig. 7 — Ensaios sobre provetes de norite

Bieniawski obteve experimentalmente a curva, a traço contínuo, da fig. 7, onde também se traçaram as curvas, a tracejado e a ponteadas, correspondentes às duas fórmulas (26), respectivamente para a variação cúbica e para a variação hiperbólica, as quais se afastam significativamente da experimental, apresentando esta um ponto de inflexão de interesse para a interpretação do mecanismo, ponto não existente nas duas curvas teóricas. Assim, para Bieniawski, o início da microfissura dá-se para o ponto A de velocidade nula correspondente a $c = c_0$; em seguida, a microfissura propaga-se de uma forma estável e a uma velocidade com taxa crescente até atingir o ponto I de inflexão da curva experimental a que corresponde um comprimento crítico da microfissura traduzido pela libertação de energia, dita, crítica; para este intervalo, pode considerar-se existir equilíbrio entre a energia de deformação elástica e a energia de superfície nos bordos da microfissura. Daí em diante, a microfissura propaga-se de uma forma instável a uma velocidade com taxa decrescente até atingir o ponto B correspondente à destruição da resistência; é neste intervalo que, dada a velocidade da propagação atingida, se faz sentir a influência da perda de energia cinética, causa da instabi-

- [13] OROWAN, E. — Fracture and strength of solids. Rep. Prog. Phys., Vol. 12, pp. 185-232, 1949.
- [14] PERES-RODRIGUES, F. — Anisotropia das rochas e dos maciços rochosos - aplicação de quárticas fechadas ao estudo da deformabilidade e da rotura. Memória 483 do LNEC, Lisboa, 1977.
- [15] ROBERTS, D. K.; WELLS, A. A. — The velocity of brittle fracture. Engineering 178, pp. 820-821, 1954.
- [16] ROCHA, M. — Mecânica das Rochas. LNEC, Lisboa, 1971.
- [17] SACK, R. A. — Extension of Griffith's theory of rupture to three dimensions. Proc. Phys. Soc., Vol. 58, pp. 729-736, 1946.