

DETERMINAÇÃO DAS CONSTANTES ELÁSTICAS DOS CORPOS ANISOTRÓPICOS POR MEIO DE ENSAIOS DE COMPRESSÃO DIAMETRAL*

Determination of the Elastic Constants of Anisotropic Bodies by Diametral Compression Tests

por

JOSÉ LOUREIRO PINTO**

RESUMO – Neste trabalho apresentam-se as expressões que permitem determinar as constantes elásticas dos corpos anisotrópicos por meio de ensaios de compressão diametral, sobre provetes de secção circular pertencentes aos planos principais ou, a três planos quaisquer, normais entre si. Apresentam-se também os resultados de ensaios já efectuados sobre provetes de xisto.

SYNOPSIS – This work presents the expressions that allow the elastic constants of anisotropic bodies to be determined by means of diametral compression tests carried out on circular cross-section specimens containing either the principal planes or three any planes intersecting at right angles. Results of tests already performed on schist specimens are also presented.

1 – INTRODUÇÃO

Na determinação das constantes elásticas dos corpos anisotrópicos depara-se por vezes o problema do número de provetes necessários para a sua determinação com um certo rigor, ser bastante elevado, necessitar-se de um bloco de dimensões tais que em rochas bastante diaclasadas são difíceis de obter, ou obrigar à utilização de um número tal de blocos, por vezes recolhidos em locais suficientemente afastados, para que as suas propriedades se possam considerar constantes.

O método proposto, permite com um número muito baixo de provetes determinar as constantes elásticas, sendo necessário apenas o conhecimento da posição dos eixos de simetria do corpo em análise, tarefa geralmente facilitada pela existência de xistosidade, gnaissosidade ou estratificação visíveis na amostra.

* Trabalho apresentado ao 4.º Congresso Internacional de Mecânica das Rochas, Montreux, Set. 1979.

** Engenheiro civil. Especialista do Núcleo de Fundações Rochosas do LNEC.

A determinação das constantes elásticas pode neste caso ser feita por meio do ensaio de compressão diametral de três provetes contendo cada um deles um dos planos principais, efectuando-se medições das deformações no centro do provete segundo três direcções, geralmente duas coincidindo com os eixos principais e outra a 45° com elas, para várias direcções de aplicação da força diametral.

2 – ENSAIO DE COMPRESSÃO DIAMETRAL

Se um provete de diâmetro d e de espessura e muito pequena for actuado por duas forças P iguais e opostas actuando segundo uma direcção diametral, que faz um ângulo α com o eixo de simetria 1 do plano normal ao eixo do provete cilíndrico, suposto coincidente com a direcção principal 3, fig. 1,

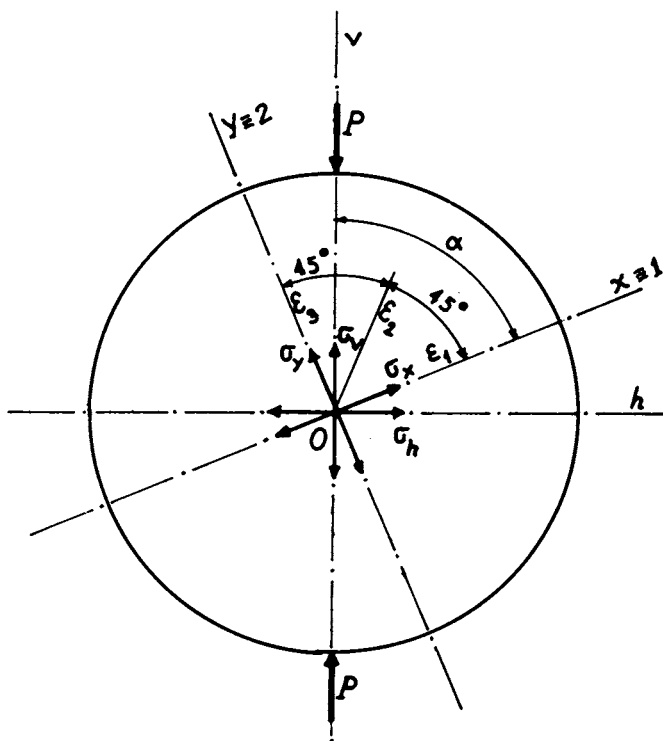


Fig. 1

obter-se-ão no ponto central 0 tensões de valor:

$$\sigma_v = -\frac{6P}{\pi de} \quad ; \quad \sigma_h = \frac{2P}{\pi de} \quad (1)$$

pelo que em relação aos eixos principais será:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{2P}{\pi de} (2\cos 2\alpha + 1) \quad ; \quad \sigma_y = \frac{2P}{\pi de} (2\cos 2\alpha - 1) \\ \tau_{xy} &= -\frac{4P}{\pi de} \sin 2\alpha \end{aligned} \quad (2)$$

Dado tratar-se de planos principais de referência, ter-se-ão para os corpos anisotrópicos as deformações:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= a_{11}\sigma_x + a_{12}\sigma_y + a_{16}\tau_{xy} = \\ &= -\frac{2P}{\pi de} [a_{11}(2\cos 2\alpha + 1) - a_{12}(2\cos 2\alpha - 1) + 2a_{16}\sin 2\alpha] \\ \epsilon_y &= a_{12}\sigma_x + a_{22}\sigma_y + a_{26}\tau_{xy} = \\ &= -\frac{2P}{\pi de} [a_{12}(2\cos 2\alpha + 1) - a_{22}(2\cos 2\alpha - 1) + 2a_{26}\sin 2\alpha] \\ \tau_{xy} &= a_{16}\sigma_x + a_{26}\sigma_y + a_{66}\tau_{xy} = \\ &= -\frac{2P}{\pi de} [a_{16}(2\cos 2\alpha + 1) - a_{26}(2\cos 2\alpha - 1) + 2a_{66}\sin 2\alpha] \end{aligned} \quad (3)$$

No caso mais geral far-se-ão medições utilizando rosetas de extensómetros eléctricos a 45°, medindo-se as deformações ϵ_1 , ϵ_2 e ϵ_3 , pelo que se terá:

$$\epsilon_x = \epsilon_1 \quad ; \quad \epsilon_y = \epsilon_3 \quad ; \quad \tau_{xy} = 2\epsilon_2 - \epsilon_1 - \epsilon_3 \quad (4)$$

Variando agora o ângulo α de aplicação da carga P, e fazendo as correspondentes leituras ϵ_1 , ϵ_2 , ϵ_3 , obter-se-ão conjuntos de valores ϵ_{1i} , ϵ_{2i} e ϵ_{3i} que permitem por utilização do método dos mínimos quadrados a determinação das constantes elásticas no plano xy.

Se em vez de se utilizar apenas um provete do plano xy, se usarem três correspondentes aos planos xy, xz, e yz, ou seja os planos principais, procedendo de modo análogo ao já descrito poderão obter-se 15 das 21 constantes elásticas do corpo anisotrópico no caso mais geral.

Assim o ensaio do plano xy envolve as constantes elásticas a_{11} , a_{12} , a_{16} , a_{22} , a_{26} e a_{66} , o do plano xz as constantes a_{11} , a_{13} , a_{15} , a_{33} , a_{35} e a_{55} , e finalmente no plano yz mobilizar-se-ão as constantes a_{22} , a_{23} , a_{24} , a_{33} , a_{34} e a_{44} , pelo que não ficarão abrangidas nesta análise as constantes elásticas a_{14} , a_{25} , a_{36} , a_{45} , a_{46} e a_{56} .

A não determinação das constantes indicadas conduz à não resolução completa de duas classes de simetria cristalográfica correspondentes aos sistemas triclinico e monoclinico de 21 e 13 constantes elásticas independentes, podendo-se assim resolver os casos mais comuns de simetria cristalográfica.

No caso geral, considerando-se como ângulo de referência no plano xy o ângulo α formado pela direcção de ensaio com o eixo dos xx, no plano xz o ângulo γ com o eixo dos zz e no plano yz o ângulo β com o eixo dos yy, as expressões das deformações tomarão a forma:

– No plano xy as expressões são as já indicadas em (3).

– No plano xz serão:

$$\begin{aligned}\epsilon_x &= -\frac{2P}{\pi de} \left[a_{13}(2\cos 2\gamma + 1) - a_{11}(2\cos 2\gamma - 1) + 2a_{15}\sin 2\gamma \right] \\ \epsilon_z &= -\frac{2P}{\pi de} \left[a_{33}(2\cos 2\gamma + 1) - a_{13}(2\cos 2\gamma - 1) + 2a_{35}\sin 2\gamma \right] \quad (5) \\ r_{xz} &= \frac{-2P}{\pi de} \left[a_{35}(2\cos 2\gamma + 1) - a_{15}(2\cos 2\gamma - 1) + 2a_{55}\sin 2\gamma \right]\end{aligned}$$

– No plano yz serão:

$$\begin{aligned}\epsilon_y &= -\frac{2P}{\pi de} \left[a_{22}(2\cos 2\beta + 1) - a_{23}(2\cos 2\beta - 1) + 2a_{24}\sin 2\beta \right] \\ \epsilon_z &= -\frac{2P}{\pi de} \left[a_{23}(2\cos 2\beta + 1) - a_{33}(2\cos 2\beta - 1) + 2a_{34}\sin 2\beta \right] \quad (6) \\ r_{yz} &= \frac{-2P}{\pi de} \left[a_{24}(2\cos 2\beta + 1) - a_{34}(2\cos 2\beta - 1) + 2a_{44}\sin 2\beta \right]\end{aligned}$$

Estas expressões tomam uma forma particular para cada classe de simetria, obtendo-se para os diferentes casos:

- No sistema monoclinico

Plano xy

$$\epsilon_x = -\frac{2P}{\pi de} [a_{11}(2\cos 2\alpha + 1) - a_{12}(2\cos 2\alpha - 1) + 2a_{16}\sin 2\alpha]$$

$$\epsilon_y = -\frac{2P}{\pi de} [a_{12}(2\cos 2\alpha + 1) - a_{22}(2\cos 2\alpha - 1) + 2a_{26}\sin 2\alpha]$$

$$\tau_{xy} = -\frac{2P}{\pi de} [a_{16}(2\cos 2\alpha + 1) - a_{26}(2\cos 2\alpha - 1) + 2a_{66}\sin 2\alpha]$$

Plano xz

$$\epsilon_x = -\frac{2P}{\pi de} [a_{13}(2\cos 2\gamma + 1) - a_{11}(2\cos 2\gamma - 1)]$$

$$\epsilon_z = -\frac{2P}{\pi de} [a_{33}(2\cos 2\gamma + 1) - a_{13}(2\cos 2\gamma - 1)] \quad (7)$$

$$\tau_{xz} = -\frac{4P}{\pi de} a_{55} \sin 2\gamma$$

Plano yz

$$\epsilon_y = -\frac{2P}{\pi de} [a_{22}(2\cos 2\beta + 1) - a_{23}(2\cos 2\beta - 1)]$$

$$\epsilon_z = -\frac{2P}{\pi de} [a_{23}(2\cos 2\beta + 1) - a_{33}(2\cos 2\beta - 1)]$$

$$\tau_{yz} = -\frac{4P}{\pi de} a_{44} \sin 2\beta$$

Ficarão por determinar as constantes elásticas a_{36} e a_{45} .

- No sistema ortorrômbico (corpo ortotrópico)

Plano xy

$$\epsilon_x = -\frac{2P}{\pi de} [a_{11}(2\cos 2\alpha + 1) - a_{12}(2\cos 2\alpha - 1)]$$

$$\epsilon_y = -\frac{2P}{\pi de} [a_{12}(2\cos 2\alpha + 1) - a_{22}(2\cos 2\alpha - 1)]$$

$$\tau_{xy} = -\frac{4P}{\pi de} a_{66} \sin 2\alpha$$

Plano xz

$$\epsilon_x = -\frac{2P}{\pi de} [a_{13}(2\cos 2\gamma + 1) - a_{11}(2\cos 2\gamma - 1)]$$

$$\epsilon_z = -\frac{2P}{\pi de} [a_{33}(2\cos 2\gamma + 1) - a_{13}(2\cos 2\gamma - 1)] \quad (8)$$

$$\tau_{xz} = -\frac{4P}{\pi de} a_{55} \sin 2\gamma$$

Plano yz

$$\epsilon_y = -\frac{2P}{\pi de} [a_{22}(2\cos 2\beta + 1) - a_{23}(2\cos 2\beta - 1)]$$

$$\epsilon_z = -\frac{2P}{\pi de} [a_{23}(2\cos 2\beta + 1) - a_{33}(2\cos 2\beta - 1)]$$

$$\gamma_{yz} = -\frac{4P}{\pi de} a_{44} \sin 2\beta$$

- No sistema trigonal, classes com operadores de simetria não co-axiais

Plano xy

$$\epsilon_x = -\frac{2P}{\pi de} [a_{11}(2\cos 2\alpha + 1) - a_{12}(2\cos 2\alpha - 1)]$$

$$\epsilon_y = -\frac{2P}{\pi de} [a_{12}(2\cos 2\alpha + 1) - a_{11}(2\cos 2\alpha - 1)]$$

$$\gamma_{xy} = -\frac{8P}{\pi de} (a_{11} - a_{12}) \sin 2\alpha$$

Plano xz

$$\epsilon_x = -\frac{2P}{\pi de} [a_{13}(2\cos 2\gamma + 1) - a_{11}(2\cos 2\gamma - 1)]$$

$$\epsilon_z = -\frac{2P}{\pi de} [a_{33}(2\cos 2\gamma + 1) - a_{13}(2\cos 2\gamma - 1)]$$

$$\gamma_{xz} = -\frac{4P}{\pi de} a_{44} \sin 2\gamma$$

9)

Plano yz

$$\epsilon_y = -\frac{2P}{\pi de} [a_{11}(2\cos 2\beta + 1) - a_{13}(2\cos 2\beta - 1) - 2a_{14} \sin 2\beta]$$

$$\epsilon_z = -\frac{2P}{\pi de} [a_{13}(2\cos 2\beta + 1) - a_{33}(2\cos 2\beta - 1)]$$

$$\gamma_{yz} = -\frac{2P}{\pi de} [a_{14}(2\cos 2\beta + 1) + 2a_{44} \sin 2\beta]$$

- No sistema trigonal, classes com todos os operadores de simetria co-axiais

Plano xy

$$\epsilon_x = -\frac{2P}{\pi de} [a_{11}(2\cos 2\alpha + 1) - a_{12}(2\cos 2\alpha - 1)]$$

$$\epsilon_y = -\frac{2P}{\pi de} [a_{12}(2\cos 2\alpha + 1) - a_{11}(2\cos 2\alpha - 1)]$$

$$\gamma_{xy} = -\frac{8P}{\pi de} (a_{11} - a_{12}) \sin 2\alpha$$

Plano xz

$$\epsilon_x = -\frac{2P}{\pi de} [a_{13}(2\cos 2\gamma + 1) - a_{11}(2\cos 2\gamma - 1) - 2a_{25}\sin 2\gamma]$$

$$\epsilon_z = -\frac{2P}{\pi de} [a_{33}(2\cos 2\gamma + 1) - a_{13}(2\cos 2\gamma - 1)]$$

10

$$\gamma_{xz} = -\frac{2P}{\pi de} [a_{25}(2\cos 2\gamma + 1) + 2a_{44}\sin 2\gamma]$$

Plano yz

$$\epsilon_y = \frac{2P}{\pi de} [a_{11}(2\cos 2\beta + 1) - a_{13}(2\cos 2\beta - 1) - 2a_{14}\sin 2\beta]$$

$$\epsilon_z = \frac{2P}{\pi de} [a_{13}(2\cos 2\beta + 1) - a_{33}(2\cos 2\beta - 1)]$$

$$\gamma_{yz} = -\frac{2P}{\pi de} [-a_{14}(2\cos 2\beta + 1) + 2a_{44}\sin 2\beta]$$

- No sistema tetragonal, classes com operadores de simetria não co-axiais

Plano xy

$$\epsilon_x = -\frac{2P}{\pi de} [a_{11}(2\cos 2\alpha + 1) - a_{12}(2\cos 2\alpha - 1)]$$

$$\epsilon_y = -\frac{2P}{\pi de} [a_{12}(2\cos 2\alpha + 1) - a_{11}(2\cos 2\alpha - 1)]$$

$$\gamma_{xy} = -\frac{4P}{\pi de} a_{66} \sin 2\alpha$$

Plano xz

$$\epsilon_x = -\frac{2P}{\pi de} [a_{13}(2\cos 2\gamma + 1) - a_{11}(2\cos 2\gamma - 1)]$$

$$\epsilon_z = -\frac{2P}{\pi de} [a_{33}(2\cos 2\gamma + 1) - a_{13}(2\cos 2\gamma - 1)]$$

(11)

$$\gamma_{xz} = -\frac{4P}{\pi de} a_{44} \sin 2\gamma$$

Plano yz

$$\epsilon_y = -\frac{2P}{\pi de} [a_{11}(2\cos 2\beta + 1) - a_{13}(2\cos 2\beta - 1)]$$

$$\epsilon_z = -\frac{2P}{\pi de} [a_{13}(2\cos 2\beta + 1) - a_{33}(2\cos 2\beta - 1)]$$

$$\gamma_{yz} = -\frac{4P}{\pi de} a_{44} \sin 2\beta$$

- No sistema tetragonal, classes com todos os operadores de simetria co-axiais

Plano xy

$$\epsilon_x = -\frac{2P}{\pi de} [a_{11}(2\cos 2\alpha + 1) - a_{12}(2\cos 2\alpha - 1) + 2a_{16}\sin 2\alpha]$$

$$\epsilon_y = -\frac{2P}{\pi de} [a_{12}(2\cos 2\alpha + 1) - a_{11}(2\cos 2\alpha - 1) - 2a_{16}\sin 2\alpha]$$

$$\gamma_{xy} = -\frac{2P}{\pi de} (4a_{16}\cos 2\alpha + 2a_{66}\sin 2\alpha)$$

Plano xz

$$\epsilon_x = -\frac{2P}{\pi de} [a_{13}(2\cos 2\gamma + 1) - a_{11}(2\cos 2\gamma - 1)]$$

$$\epsilon_z = -\frac{2P}{\pi de} [a_{33}(2\cos 2\gamma + 1) - a_{13}(2\cos 2\gamma - 1)] \quad (12)$$

$$\gamma_{xz} = -\frac{4P}{\pi de} a_{44} \sin 2\gamma$$

Plano yz

$$\epsilon_y = -\frac{2P}{\pi de} [a_{11}(2\cos 2\beta + 1) - a_{13}(2\cos 2\beta - 1)]$$

$$\epsilon_z = -\frac{2P}{\pi de} [a_{13}(2\cos 2\beta + 1) - a_{33}(2\cos 2\beta - 1)]$$

$$\gamma_{yz} = -\frac{4P}{\pi de} a_{44} \sin 2\beta$$

– No sistema hexagonal (corpo transversalmente isotrópico)

Plano xy

$$\epsilon_x = -\frac{2P}{\pi de} [a_{11}(2\cos 2\alpha + 1) - a_{12}(2\cos 2\alpha - 1)]$$

$$\epsilon_y = -\frac{2P}{\pi de} [a_{12}(2\cos 2\alpha + 1) - a_{11}(2\cos 2\alpha - 1)]$$

$$\gamma_{xy} = -\frac{8P}{\pi de} (a_{11} - a_{12}) \sin 2\alpha$$

Plano xz

$$\epsilon_x = -\frac{2P}{\pi de} [a_{13}(2\cos 2\gamma + 1) - a_{11}(2\cos 2\gamma - 1)]$$

$$\epsilon_z = -\frac{2P}{\pi de} [a_{33}(2\cos 2\gamma + 1) - a_{13}(2\cos 2\gamma - 1)] \quad (13)$$

$$\gamma_{xz} = -\frac{4P}{\pi de} a_{44} \sin 2\gamma$$

Plano yz

$$\epsilon_y = -\frac{2P}{\pi de} [a_{11}(2\cos 2\beta + 1) - a_{13}(2\cos 2\beta - 1)]$$

$$\epsilon_z = -\frac{2P}{\pi de} [a_{13}(2\cos 2\beta + 1) - a_{33}(2\cos 2\beta - 1)]$$

$$\gamma_{yz} = -\frac{4P}{\pi de} a_{44} \sin 2\beta$$

– No sistema cúbico

Plano xy

$$\epsilon_x = -\frac{2P}{\pi de} [a_{11}(2\cos 2\alpha + 1) - a_{12}(2\cos 2\alpha - 1)]$$

$$\epsilon_y = -\frac{2P}{\pi de} [a_{12}(2\cos 2\alpha + 1) - a_{11}(2\cos 2\alpha - 1)]$$

$$\gamma_{xy} = -\frac{4P}{\pi de} a_{44} \sin 2\alpha$$

Plano xz

$$\begin{aligned}\epsilon_x &= -\frac{2P}{\pi de} \left[a_{12}(2\cos 2\gamma + 1) - a_{11}(2\cos 2\gamma - 1) \right] \\ \epsilon_z &= -\frac{2P}{\pi de} \left[a_{11}(2\cos 2\gamma + 1) - a_{12}(2\cos 2\gamma - 1) \right] \\ \gamma_{xz} &= -\frac{4P}{\pi de} a_{44} \sin 2\gamma\end{aligned}\quad (14)$$

Plano yz

$$\begin{aligned}\epsilon_y &= -\frac{2P}{\pi de} \left[a_{11}(2\cos 2\beta + 1) - a_{12}(2\cos 2\beta - 1) \right] \\ \epsilon_z &= -\frac{2P}{\pi de} \left[a_{12}(2\cos 2\beta + 1) - a_{11}(2\cos 2\beta - 1) \right] \\ \gamma_{yz} &= -\frac{4P}{\pi de} a_{44} \sin 2\beta\end{aligned}$$

3 - DETERMINAÇÃO DAS CONSTANTES ELÁSTICAS PELO MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS

Se para um determinado corpo se fizerem em cada um dos planos principais ensaios de compressão diametral segundo diferentes direcções com leitura das extensões ϵ_1 , ϵ_2 e ϵ_3 , as constantes elásticas poderão determinar-se tornando mínimo o valor de:

$$\Delta = \sum \left[\epsilon_i - \sum a_{ik} \sigma_k \right]^2 \quad (15)$$

Nesta expressão ϵ_i representa uma extensão quando $i = 1, 2, 3$ e uma distorção quando $i = 4, 5, 6$. Do mesmo modo σ_k será uma tensão normal para $k = 1, 2, 3$ e uma tensão tangencial quando $k = 4, 5, 6$. Portanto ter-se-á:

$$\begin{aligned}\epsilon_1 &= \epsilon_x ; \quad \epsilon_2 = \epsilon_y ; \quad \epsilon_3 = \epsilon_z ; \quad \epsilon_4 = \gamma_{yz} ; \quad \epsilon_5 = \gamma_{zx} ; \quad \epsilon_6 = \gamma_{xy} . \\ \sigma_1 &= \sigma_x ; \quad \sigma_2 = \sigma_y ; \quad \sigma_3 = \sigma_z ; \quad \sigma_4 = \tau_{yz} ; \quad \sigma_5 = \tau_{zx} ; \quad \sigma_6 = \tau_{xy} .\end{aligned}\quad (16)$$

O valor mínimo de Δ obtém-se anulando as derivadas $\frac{\delta \Delta}{\delta a_{ik}}$, que por resolução do sistema de n equações a n incógnitas assim obtidas, fornece os valores mais prováveis das constantes elásticas a_{ik} .

4 - APLICAÇÃO DO MÉTODO PROPOSTO

A fim de se avaliar o método indicado efectuaram-se ensaios de compressão diametral de provetes de quatro tipos diferentes de xisto, cortados de modo a ser ensaiado o plano xz. Considerando estes xistos como corpos transversalmente isotrópicos, as equações a utilizar são as (13) relativas ao plano xz.

$$\begin{aligned}\epsilon_x &= -\frac{2P}{\pi d e} \left[a_{13}(2\cos 2\gamma + 1) - a_{11}(2\cos 2\gamma - 1) \right] \\ \epsilon_z &= -\frac{2P}{\pi d e} \left[a_{33}(2\cos 2\gamma + 1) - a_{13}(2\cos 2\gamma - 1) \right] \\ \gamma_{zx} &= -\frac{4P}{\pi d e} a_{44} \sin 2\gamma\end{aligned}\quad (17)$$

Obter-se-á portanto:

$$\begin{aligned}\Delta = \sum \left\{ \left[\epsilon_{xi} + \frac{2P}{\pi d e} \left[a_{13}(2\cos 2\gamma_i + 1) - a_{11}(2\cos 2\gamma_i - 1) \right] \right]^2 + \right. \\ \left. + \left[\epsilon_{zi} + \frac{2P}{\pi d e} \left[a_{33}(2\cos 2\gamma_i + 1) - a_{13}(2\cos 2\gamma_i - 1) \right] \right]^2 + \right. \\ \left. + \left[\gamma_{xzi} + \frac{4P}{\pi d e} a_{44} \sin 2\gamma_i \right]^2 \right\}\end{aligned}\quad (18)$$

Derivando Δ em relação às constantes elásticas a_{11} , a_{13} , a_{33} , e a_{44} , e anulando essas derivadas, atendendo a que neste caso:

$$\epsilon_x = \epsilon_3 ; \quad \epsilon_z = \epsilon_1 ; \quad \gamma_{xz} = 2\epsilon_2 - \epsilon_1 - \epsilon_3 , \quad (19)$$

obtém-se o sistema de equações:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11} \sum_i (2 \cos^2 \gamma_i - 1)^2 - a_{13} \sum_i (4 \cos^2 2 \gamma_i + 1) - \frac{\pi d e}{2P} \sum_i \epsilon_{3i} (2 \cos^2 \gamma_i - 1) = 0 \\ a_{11} \sum_i (4 \cos^2 2 \gamma_i - 1) - 2 a_{13} \sum_i (2 \cos^2 2 \gamma_i + 1) + a_{33} \sum_i (4 \cos^2 2 \gamma_i - 1) - \\ - \frac{\pi d e}{2P} \left[\sum_i \epsilon_{3i} (2 \cos^2 \gamma_i + 1) - \sum_i \epsilon_{1i} (2 \cos^2 \gamma_i - 1) \right] = 0 \quad (20) \\ a_{13} \sum_i (4 \cos^2 2 \gamma_i - 1) - a_{33} \sum_i (2 \cos^2 2 \gamma_i + 1)^2 - \frac{\pi d e}{2P} \sum_i \epsilon_{1i} (2 \cos^2 \gamma_i + 1) = 0 \\ a_{44} \sum_i \sin^2 2 \gamma_i + \frac{\pi d e}{4P} \sum_i (2 \epsilon_{2i} - \epsilon_{1i} - \epsilon_{3i}) \sin 2 \gamma_i = 0 \end{array} \right.$$

Nos quadros I a IV apresentam-se os valores das extensões medidas e calculadas a partir dos valores das constantes elásticas determinadas pelas expressões (20).

QUADRO I

Amostra 1

| Ân- gulo ° | Extensões (10 ⁻⁶) | | | | | |
|----------------------|-------------------------------|------|--------------|------|--------------|------|
| | ϵ_1 | | ϵ_2 | | ϵ_3 | |
| | Exp. | Ana. | Exp. | Ana. | Exp. | Ana. |
| 0 | -83 | -105 | -31 | -19 | +64 | +70 |
| 22.5 | -68 | -83 | -82 | -85 | +35 | +42 |
| 45 | -22 | -22 | -101 | -116 | -24 | -27 |
| 67.5 | +33 | +39 | -80 | -93 | -96 | -96 |
| 90 | +52 | +65 | -35 | -30 | -142 | -125 |
| 112.5 | +28 | +39 | +58 | +36 | -104 | -96 |
| 135 | -26 | -22 | +82 | +67 | -16 | -27 |
| 157.5 | -82 | -83 | +38 | +28 | +70 | +42 |

$$a_{11} = 1.2698 \times 10^{-6} \text{ cm}^2/\text{kg}$$

$$a_{11} = -0.3553 \times 10^{-6} \text{ cm}^2/\text{kg}$$

$$a_{33} = 1.0856 \times 10^{-6} \text{ cm}^2/\text{kg}$$

$$a_{44} = 3.0454 \times 10^{-6} \text{ cm}^2/\text{kg}$$

QUADRO II

Amostra 2

| An- gulo o | Extensões (10 ⁻⁶) | | | | | |
|----------------------|-------------------------------|------|--------------|------|--------------|------|
| | ϵ_1 | | ϵ_2 | | ϵ_3 | |
| | Exp. | Ana. | Exp. | Ana. | Exp. | Ana. |
| 0 | -97 | - 94 | + 21 | - 26 | + 42 | + 43 |
| 22,5 | -75 | - 74 | - 68 | - 71 | + 27 | + 23 |
| 45 | -26 | - 26 | - 86 | - 90 | - 22 | - 27 |
| 67.5 | +17 | + 23 | - 70 | - 72 | - 71 | - 76 |
| 90 | +37 | + 43 | - 22 | - 27 | - 99 | - 97 |
| 112.5 | +24 | + 23 | + 20 | + 18 | - 80 | - 76 |
| 135 | -24 | - 26 | + 39 | + 37 | - 34 | - 27 |
| 157.5 | -76 | - 74 | + 24 | + 19 | + 18 | + 23 |

$$a_{11} = 1.2361 \times 10^{-6} \text{ cm}^2/\text{kg}$$

$$a_{13} = -0.1667 \times 10^{-6} \text{ cm}^2/\text{kg}$$

$$a_{33} = 1.2039 \times 10^{-6} \text{ cm}^2/\text{kg}$$

$$a_{44} = 2.5395 \times 10^{-6} \text{ cm}^2/\text{kg}$$

QUADRO III

Amostra 3

| Ân- gulo o | Extensões (10 ⁻⁶) | | | | | |
|----------------------|-------------------------------|------|--------------|------|--------------|------|
| | ϵ_1 | | ϵ_2 | | ϵ_3 | |
| | Exp. | Ana. | Exp. | Ana. | Exp. | Ana. |
| 0 | -155 | -147 | - 40 | - 56 | + 42 | + 37 |
| 22.5 | -110 | -119 | - 99 | -117 | + 27 | + 18 |
| 45 | - 46 | - 46 | -122 | -130 | - 11 | - 27 |
| 67.5 | + 19 | + 26 | - 96 | - 89 | - 64 | - 71 |
| 90 | + 40 | + 56 | - 28 | - 16 | - 88 | - 90 |
| 112.5 | + 14 | + 26 | + 48 | + 45 | - 72 | - 71 |
| 135 | - 66 | - 46 | + 62 | + 58 | - 26 | - 27 |
| 157.5 | -132 | -119 | + 30 | + 17 | + 22 | + 18 |

$$a_{11} = 1.1658 \times 10^{-6} \text{ cm}^2/\text{kg}$$

$$a_{13} = -0.0098 \times 10^{-6} \text{ cm}^2/\text{kg}$$

$$a_{33} = 1.9537 \times 10^{-6} \text{ cm}^2/\text{kg}$$

$$a_{44} = 3.7666 \times 10^{-6} \text{ cm}^2/\text{kg}$$

QUADRO IV

Amostra 4

| Ân- gulo ° | Extensões (10 ⁻⁶) | | | | | |
|------------------|-------------------------------|------|--------------|------|--------------|------|
| | ϵ_1 | | ϵ_2 | | ϵ_3 | |
| | Exp. | Ana. | Exp. | Ana. | Exp. | Ana. |
| 0 | -122 | -103 | - 34 | - 33 | + 34 | + 37 |
| 22.5 | - 76 | - 82 | - 75 | - 75 | + 19 | + 20 |
| 45 | - 30 | - 29 | - 86 | - 87 | - 20 | - 21 |
| 67.5 | + 20 | + 24 | - 58 | - 63 | - 58 | - 62 |
| 90 | + 40 | + 45 | - 20 | - 17 | - 80 | - 78 |
| 112.5 | + 22 | + 24 | + 25 | + 25 | - 60 | - 62 |
| 135 | - 30 | - 29 | + 41 | + 37 | - 18 | - 21 |
| 157.5 | - 72 | - 82 | + 14 | + 13 | + 22 | + 20 |

$$a_{11} = 0.9901 \times 10^{-6} \text{ cm}^2/\text{kg}$$

$$a_{13} = -0.1642 \times 10^{-6} \text{ cm}^2/\text{kg}$$

$$a_{33} = 1.3221 \times 10^{-6} \text{ cm}^2/\text{kg}$$

$$a_{44} = 2.4837 \times 10^{-6} \text{ cm}^2/\text{kg}$$

As diferenças entre os valores teóricos e os experimentais podem explicar-se por um comportamento diferente do considerado, isto é transversalmente isotrópico, por em face das dimensões do provete ter sido necessária a colagem e o ensaio de cada extensómetro por sua vez e não da roseta de extensómetros de dimensões incompatíveis com a sua localização correcta no ponto central do provete.

5 – CONCLUSÕES

Do exposto pode concluir-se que este método permite a determinação das constantes elásticas dos corpos anisotrópicos com um número de provetes muito pequeno, com as limitações já indicadas no caso de se utilizarem apenas três provetes segundo os planos principais, podendo na maioria dos casos utilizar-se directamente os testemunhos de sondagem.

A teoria que foi exposta considerou o conhecimento prévio das direcções principais, mas pode ser aplicada mesmo que estas sejam desconhecidas, sendo

apenas necessário que os três planos analisados sejam normais entre si, utilizando-se então as expressões gerais (3), (5) e (6), não ficando contudo neste caso as constantes elásticas determinadas na sua totalidade.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- LOVE, A. E. H. - The mathematical theory of elasticity (Fourth edition, New York, Dover publications, 1944).
- LEKHNITSKII, S. G. - Theory of elasticity of an anisotropic elastic body (Holden-Day, San Francisco, 1963).