

# MECANISMO ELÁSTICO DE FRICÇÃO ENTRE PARTÍCULAS DE SOLOS GRANULARES\*

## Elastic Friction Mechanism Between Granular Soils Particles

por  
ÚLPIO NASCIMENTO\*\*

**RESUMO** - Resumem-se as leis e outras constatações experimentais relativas à fricção entre materiais geológicos.

Recordam-se alguns mecanismos que têm sido propostos para explicar essas leis e constatações.

Apresenta-se um mecanismo de fricção em que intervem a deformação elástica das saliências das superfícies em contacto, com base num modelo físico em que as saliências são formadas por arcos de fita de aço.

Apuram-se as seguintes conclusões principais: i) A deformação dum par de saliências em contacto passa por três fases: a primeira em que elas armazenam energia elástica, a segunda de instabilidade, em que sofrem grandes deslocamentos elásticos praticamente sem deslizamento aparente dos corpos em contacto, e a terceira em que elas restituem parte dessa energia elástica, forçando o deslizamento em vez de lhe oporem resistência; ii) A fricção estática é maior do que a cinemática porque, no início do deslizamento, quase todos os contactos das saliências se encontram na primeira fase da deformação, enquanto que, após esse início, passa a haver contactos na terceira fase em número bastante para reduzir a resistência total.

**SYNOPSIS** - The laws and other experimental facts regarding friction between geologic materials are summarized.

Some of the mechanisms proposed to explain these laws and facts are recalled.

A friction mechanism is presented, in which the elastic deformation of the asperities of contact surfaces intervenes, on basis of a physical model in which the asperities consist of steel-ribbon arches.

The following main conclusions were drawn: i) The deformation of a pair of asperities in contact undergoes three phases: the first in which it stores elastic energy, the second, of instability,

---

\* Trabalho apresentado ao 2.º Congresso Nacional de Mecânica Teórica e Aplicada, Lisboa, Outubro de 1979. Manuscrito recebido em Julho 1979. A discussão do trabalho está aberta durante um período de três meses.

\*\* Investigador do LNEC.

in which it undergoes wide elastic displacements with almost no apparent sliding of the bodies in contact, and the third in which it gives up part of this elastic energy, forcing the sliding instead of opposing it; ii) static friction is stronger than kinematic friction because, when sliding begins, almost all the contacts of the asperities are in the first deformation phase, whereas, after sliding has set in, the number of contacts in the third phase is sufficient to reduce total resistance.

## 1 – INTRODUÇÃO

Um dos principais parâmetros a considerar no estabelecimento de equações constitutivas de solos granulares é, sem dúvida, a resistência friccional entre as respectivas partículas. A quantificação dessa resistência apresenta porém algumas dificuldades que resultam quer da própria determinação experimental, que é afectada por numerosas condições de ensaio, quer da grande aleatoriedade dos resultados obtidos.

Noutro trabalho, em que se procurou apurar o estado dos conhecimentos sobre este assunto [3], evidenciam-se algumas dessas dificuldades e a forma como têm sido resolvidas por alguns investigadores.

Todos os resultados apurados nesses estudos evidenciam, porém, uma satisfatória confirmação das duas leis da fricção enunciadas por Amontons em 1699, segundo as quais:

- a) a resistência à fricção é proporcional à carga normal à superfície de contacto;
- b) e é independente da área dessa superfície;

É também evidente nalguns desses estudos, tal como afirmou Coulomb em 1781 [8],

- c) que deve distinguir-se fricção estática, a força requerida para iniciar o deslizamento, de fricção cinemática, a força, por vezes apreciavelmente menor, necessária para manter esse deslizamento. É esta diferença que está na origem do fenómeno do “stick-slip” que poderemos designar por deslizamento descontínuo, sacudido ou intermitente.

Apurou-se ainda que, dentro dos limites de velocidade de deslizamento utilizados nesses estudos [10]:

- d) a fricção cinemática é pouco ou mesmo nada afectada pela velocidade de deslizamento;
- e) o ângulo de fricção diminui quando aumenta a carga normal;

E constatou-se também que:

f) o coeficiente de fricção depende principalmente dos seguintes factores e condições:

- Irregularidade das superfícies (lisas, polidas, rugosas, dentadas, etc.).
- Natureza dos materiais em contacto (cristais de minerais, partículas de solo, partículas de rocha, etc.).
- Estado de humidade das superfícies (secas, húmidas, saturadas).
- Polaridade do líquido que banha as superfícies (polar, como a água, ou não polar, como o tetracloreto de carbono).

E à cerca da influência desses factores ou condições poderá dizer-se que:

g) entre superfícies polidas de minerais de estrutura maciça (quartzo, feldspato, calcite, etc.) a água, ou outro líquido polar, eleva apreciavelmente a fricção estática, actuando portanto como antilubrificante. Quando porém aumenta a rugosidade das superfícies desses minerais, aproximando-se da rugosidade que ocorre nas partículas de solos naturais, a acção antilubrificante da água diminui rapidamente e torna-se insignificante quando as superfícies atingem uma certa rugosidade crítica [10].

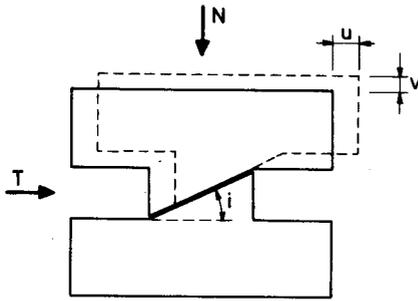
h) pelo contrário, nas superfícies lisas de minerais de estrutura lamelar (micas, clorite, serpentina, talco, etc.) os líquidos têm uma acção lubrificante, geralmente tanto maior quanto mais elevada for a respectiva polaridade [10].

Que teorias e mecanismos têm sido propostos para explicar algumas destas leis e outras constatações experimentais?

O primeiro mecanismo, atribuído a Coulomb e datado de 1781 [8] é o do travamento ou encaixe (“interlocking”) das saliências duma das superfícies nas reentrâncias da outra (Fig. 1), de tal forma que a resistência friccional representa principalmente o trabalho de elevação da carga sobre as cristas dessas saliências.

A proporcionalidade entre T e N (1.<sup>a</sup> lei) resultaria assim, por um efeito de cunha ou de plano inclinado, da inclinação das saliências das superfícies em contacto.

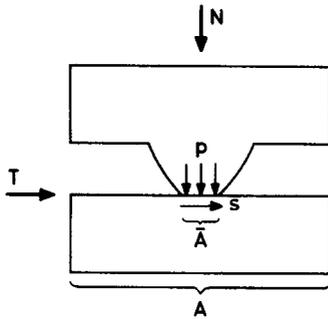
Terzaghi, em 1925, atribui a resistência friccional à adesão molecular que se estabelece, não entre toda a área A de contacto aparente entre as



COULOMB 1781

$$Tu = Nv$$

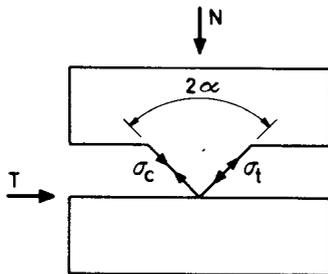
$$\mu = \frac{T}{N} = \frac{v}{u} = \text{tgi}$$



TERZAGHI 1925

$$\bar{A} = \frac{N}{p} \quad T = \bar{A}s$$

$$\mu = \frac{T}{N} = \frac{s}{p}$$



BYRLEE 1967

$$\mu = \frac{T}{N} = f\left(\alpha, \frac{\sigma_t}{\sigma_c}\right)$$

Fig. 1 – Alguns mecanismos de fricção anteriormente propostos

superfícies (Fig. 1), mas apenas entre a área  $\bar{A}$ , muito menor, de contacto efectivo dessas superfícies. Segundo esta teoria a área de contacto efectiva entre duas superfícies de materiais de durezas diferentes é determinada pela plastificação das saliências do material menos duro, como consequência de aí se atingir a respectiva resistência à compressão. A 1.<sup>a</sup> lei, da proporcionalidade, resultaria assim, não das características geométricas das superfícies em contacto, mas sim das características de resistência do material menos duro, características essas dadas pela relação s/p entre as respectivas resistências ao corte  $s$  e à compressão  $p$ .

Terzaghi chama porém a atenção para uma aparente contradição deste mecanismo: se a resistência ao corte é devida à adesão, então deveria também manifestar-se uma certa resistência à tracção quando se tenta separar os corpos, e não é isso que sucede. A explicação dada por Terzaghi é a de que, à medida que diminui a carga normal, dá-se uma certa recuperação elástica das saliências, o que faz reduzir a área de contacto efectivo de tal forma que praticamente se anula quando termina a descarga. Daí não ficarem os corpos colados um ao outro.

Mais recentemente Byerlee (1967), tendo em vista especialmente os materiais geológicos, propôs o mecanismo de rotura frágil esquematizado na mesma Fig. 1. Byerlee assimila as saliências das superfícies em contacto a diedros (ou cones) em cujas arestas (ou vértices) são aplicadas a carga normal  $N$  e a força tangencial  $T$ . A resistência friccional, dada pela relação  $T/N$  corresponde à rotura frágil desses diedros e é dada por uma expressão que depende apenas das tensões de rotura à tracção  $\sigma_t$  e à compressão  $\sigma_c$  do material, e do ângulo  $2\alpha$  do diedro (ou cone) formado pela saliência.

A segunda lei de fricção é também explicada por qualquer dos três mecanismos referidos, uma vez que todos eles (explicitamente no de Terzaghi e implicitamente no de Coulomb e Byerlee) se distingue área de contacto aparente e área de contacto efectiva. E é óbvio nesses mecanismos que a área de contacto aparente não tem qualquer influência na resistência friccional.

A diferença entre fricções estática e cinemática tem dado origem a várias teorias explicativas, dada a importância do fenómeno do deslizamento descontínuo ("stick-slip") a que dá origem; importância essa que resulta por exemplo da relação de tal fenómeno com os sismos de origem tectónica. Com efeito, o "stick-slip" é um fenómeno de instabilidade que ocorre sempre que a resistência friccional decresce com o deslizamento mais rapidamente do que o sistema

de carga pode acompanhar; e é isso que geralmente sucede quando a fricção cinemática é significativamente menor do que a estática.

Para explicar o “stick-slip” foram apresentadas várias teorias, das quais se destacam a da instabilidade devida à fluência, de Ishlinski e Kragelsk (1944), a da instabilidade devida à plasticidade, de Rabinowicz (1959) e a da instabilidade devida à rotura frágil de Byerlee (1967), conforme mecanismo já acima referido. O mecanismo básico de Ishlinski e Kragelsk consiste em admitir que o tamanho das junções de contacto entre as superfícies aumenta com o tempo devido à fluência do material. E como também admite que a resistência friccional resulta da resistência ao corte dessas junções, tem-se que a fricção estática é maior do que a fricção cinemática porque as junções correspondentes a esta última foram estabelecidas em menor tempo.

O mecanismo de Rabinowicz, que também se baseia na resistência ao corte das junções, faz intervir a variação do tamanho dessas junções à medida que se dá o deslizamento das superfícies. E são essas variações de tamanho que fazem variar consequentemente a resistência friccional.

Nota-se que as junções consideradas nestes mecanismos não diferem dos contactos efectivos propostos por Terzaghi, com o avanço de alguns decénios.

Uma das conclusões apuradas na referida recensão bibliográfica [3] é a de que nas teorizações da fricção entre materiais geológicos pouca importância tem sido dada às deformações elásticas das saliências das superfícies em contacto.

Parecendo no entanto que o papel dessas deformações poderá ter alguma importância nos fenómenos da fricção, apresenta-se seguidamente um modelo de mecanismo no qual as deformações elásticas das saliências contribuem preponderantemente para a resistência friccional. Ao apresentar este mecanismo elástico não se pretende, como é óbvio, pôr em causa a contribuição de outros mecanismos para a resistência friccional, como sejam, por exemplo, o mecanismo da adesão, de Terzaghi [5], ou o da rotura frágil, de Byerlee [6]. Pretende-se apenas evidenciar um mecanismo que também parece importante no quadro geral das teorizações dos fenómenos da fricção.

Aliás, o prosseguimento da pesquisa bibliográfica, ulteriormente alargada a outros materiais, em especial a elastómeros [9], evidencia claramente a importância dos mecanismos elásticos nos fenómenos de fricção entre tais materiais. O estudo dos mecanismos elásticos da fricção tem pois um interesse que ultrapassa os materiais geológicos e vai sobretudo centrar-se no domínio

dos elastómeros, dentro do qual preponderam os fenómenos de resistência à derrapagem entre o pavimento das estradas e os pneus dos veículos rodoviários.

Há pois, quer do ponto de vista geotécnico quer do ponto de vista rodoviário, interesse que justifica o estudo dos mecanismos da fricção e, por consequência, do mecanismo elástico objecto deste trabalho.

## 2 - PRINCIPAIS HIPÓTESES DO MECANISMO ELÁSTICO DE FRICÇÃO

Veja-se então em que consiste o mecanismo proposto.

Parte-se do conceito de Terzaghi, perfeitamente aceite, de que as superfícies por intermédio das quais se estabelece o contacto de duas partículas que deslizam uma sobre a outra são constituídas por um conjunto de saliências e que são essas saliências que efectivamente contactam entre si. A superfície de contacto aparente entre duas partículas contém em si um conjunto de superfícies, muito mais pequenas, de contacto efectivo entre saliências das superfícies dessas partículas, cuja área total é inferior à da superfície de contacto aparente.

Assimila-se a uma faceta plana cada superfície de contacto efectivo, e define-se como ponto de contacto o ponto dessa faceta por onde passa a força de contacto (resultante das forças que se desenvolvem entre as duas partículas em contacto). Deste modo, teoricamente, cada superfície de contacto efectivo pode ser definida pelas coordenadas do ponto de contacto e pela atitude da respectiva faceta de contacto.

Admite-se também que nas superfícies de contacto efectivo entre as saliências, por mais lisas que sejam essas superfícies, se desenvolve sempre uma certa resistência friccional. Efectivamente, está experimentalmente bem verificado que existe sempre uma certa fricção entre quaisquer superfícies sólidas, por mais lisas que elas se apresentem, quer essa lisura seja obtida artificialmente por polimento, quer ela seja inerente à própria estrutura cristalina do material, como acontece nas superfícies de clivagem, na mica por exemplo.

Designar-se-á por fricção molecular a fricção desenvolvida entre tais superfícies, cuja lisura atingiu a dimensão molecular e não pode portanto ser ultrapassada.

Admitindo então que entre os contactos efectivos se desenvolve uma fricção molecular, neles haverá ou não deslizamento consoante a obliquidade

da respectiva força de contacto for, respectivamente, igual ou inferior ao ângulo  $\phi_m$  dessa fricção molecular.

Note-se que o mecanismo de adesão de Terzaghi, uma vez que tal adesão não cola os corpos entre si, acaba por ser equivalente a um mecanismo em que a resistência friccional é gerada, não por forças de atracção entre as moléculas, como na adesão, mas por forças de repulsão entre elas, geradas como reacção à carga que aperta entre si os corpos. O deslizamento das superfícies de contacto efectivo só será possível se as moléculas forem deslocadas das suas posições de equilíbrio de modo a que elas possam passar uma sobre as outras. E são esses deslocamentos que geram a resistência friccional. Se se aceitar que as componentes normal e tangencial das forças inerente a tais deslocamentos são proporcionais à resistência a compressão  $p$  e à resistência ao corte  $s$ , também assim se chegaria à relação de Terzaghi:  $\mu = s/p$ .

Admite-se ainda que ao longo duma superfície de deslizamento entre duas partículas, os contactos efectivos são em número suficientemente elevado para que cada força de contacto efectivo seja insignificante em face da carga total do contacto aparente entre essas partículas.

E supõe-se finalmente que as deformações que sofrem as saliências durante o deslizamento são perfeitamente elásticas\*.

Em resumo, aceitam-se as seguintes hipóteses:

- a) o contacto entre duas partículas faz-se discretamente por intermédio das saliências das respectivas superfícies, as quais entre elas estabelecem os contactos efectivos. Assimilam-se esses contactos efectivos a facetas planas e substituem-se as acções desenvolvidas nesse contacto pela respectiva resultante.
- b) as superfícies das saliências que estabelecem os contactos efectivos são tão lisas quanto permite a estrutura molecular do respectivo material mas apresentam sempre um certo ângulo de fricção que é característico dos materiais em contacto.
- c) quando duas partículas deslizam uma sobre a outra as consequentes deformações das saliências das respectivas superfícies de contacto

---

\* A elasticidade aqui atribuída ao material que constitui as partículas tem mais o sentido de reversibilidade de deformações com restituição da respectiva energia armazenada (material 100% resiliente) do que o sentido de proporcionalidade entre tensões e deformações.

mantêm-se dentro dos limites das deformações elásticas reversíveis, nunca se atingindo portanto as deformações irreversíveis devidas a fluências, plastificações ou roturas.

### 3 – MODELO DO MECANISMO ELÁSTICO

#### 3.1 – *Mecanismo do contacto efectivo*

Com base nas hipóteses anteriormente formuladas veja-se então em que consiste o mecanismo elástico de fricção, começando pelo contacto efectivo entre saliências.

Considere-se para isso um modelo muito simples constituído por um sistema em equilíbrio plano no qual as saliências têm superfície cilíndrica de geratriz normal à direcção do deslizamento. Nas Figs. 2 a 7 apresentam-se fotografias, dum modelo nestas condições realizado fisicamente por molas de relógio, de 7mm de largura, formando arcos fixados em duas tábuas de contraplacado, por meio de entalhes. Cada tábua tem duas saliências que se encontram dispostas de tal forma que as saliências da tábua superior contactam com as da tábua inferior formando dois pares, um esquerdo e outro direito, simétricos entre si.

O ângulo de fricção entre as molas, determinado por meio dum goniómetro de fricção, é de  $8^\circ$ . Pretende-se com este ângulo representar o ângulo de fricção molecular  $\phi_m$ .

Durante a carga normal, a Fig. 2 representa o exacto momento em que as saliências estabelecem o contacto, sendo nula ainda a respectiva força. As inclinações das facetas de contacto são de  $+28^\circ$  no par da esquerda e de  $-28^\circ$  no par da direita. A aplicação duma carga normal que force as tábuas a aproximarem-se obriga a que a deformação elástica das saliências seja acompanhada de deslizamento entre elas visto que o respectivo ângulo de fricção é apenas de  $8^\circ$ . Para que não houvesse deslizamento teria esse ângulo de fricção que ser superior a  $28^\circ$ , que é, como se disse, a inclinação do contacto.

Quando o deslocamento normal, da tábua móvel em relação à tábua fixa, atinge  $\Delta v = 5 \text{ mm}$  (Fig. 3) a posição do ponto de contacto entre as saliências desloca-se de metade ( $\Delta v/2 = 2,5 \text{ mm}$ ) e também na direcção normal, porque as saliências são iguais.

Mas como houve deslizamento o ponto de contacto final não corresponde em cada uma das molas ao ponto de contacto inicial.

Quer dizer, o deslocamento normal  $\Delta v/2$  desse ponto de contacto da saliência inferior pode considerar-se a soma vectorial de um deslocamento elástico  $\Delta e$ , devido à deformação elástica da mola, com um deslocamento  $\Delta \delta$  devido ao deslizamento do ponto de contacto sobre a mola. Pode portanto escrever-se

$$\frac{\Delta v}{2} = \Delta e + \Delta \delta \quad 1)$$

Na Fig. 8 esquematiza-se a mola inferior ampliada. Na configuração inicial correspondente à Fig. 2 o ponto de contacto está representado na Fig. 8 pelo ponto 1. Esse ponto de contacto, após a carga normal (Fig. 3), passa para a posição 2.

O deslocamento  $1-2 = \Delta v/2 = 2,5$  mm, pode porém considerar-se resultante dum deslocamento elástico  $1-1' = \Delta e = 3,0$  mm e dum deslizamento ao longo da superfície da mola  $1'-2 = \Delta \delta = 3,5$  mm.

Impondo à tábua móvel um deslizamento  $\Delta u = 7$  mm da esquerda para a direita, mas mantendo constante o afastamento entre as tábuas, o ponto de contacto entre as molas desloca-se na direcção do deslizamento de metade daquele valor ( $\Delta u/2 = 3,5$  mm) e atinge-se a configuração da Fig. 4. Na Fig. 8 esse deslocamento do ponto de contacto, é representado por  $2-3 = \Delta u/2 = 3,5$  mm; e pode considerar-se a soma vectorial do deslocamento elástico  $2-2' = \Delta e = 2,5$  mm e do deslizamento  $2'-3 = \Delta \delta = 1,8$  mm.

Analogamente a (1), pode pois escrever-se

$$\frac{\Delta u}{2} = \Delta e + \Delta \delta \quad 2)$$

A inclinação das facetas de contacto desceu de  $+36^\circ$  para  $+30^\circ$  e a obliquidade da força de contacto inverteu-se passando de  $-8^\circ$  para  $+8^\circ$ . No par direito atinge-se a posição em que se rompe o contacto passando a inclinação de  $-36^\circ$  para  $-40^\circ$ .

Prosseguindo o deslizamento com mais  $\Delta u = 32 - 7 = 25$  mm atinge-se a configuração da Fig. 5 em que a inclinação do contacto é reduzida a  $+11^\circ$ . Na Fig. 8 o deslocamento do ponto de contacto  $3-4 = \Delta u/2 = 12,5$  mm é a soma vectorial do deslocamento elástico  $3-3' = \Delta e = 5$  mm com o deslizamento  $3'-4 = \Delta \delta = 9$  mm.

Um ligeiro avanço do deslizamento de  $\Delta u = 3 \text{ mm}$  modifica completamente a configuração do par da esquerda, como se vê na Fig. 6. Com efeito, a mola superior ultrapassou a mola inferior invertendo-se portanto a inclinação do respectivo contacto, que passou de  $+11^\circ$  para  $-30^\circ$ . Na Fig. 8, o pequeno deslocamento do ponto de contacto  $4-5 = \Delta u/2 = 1,5 \text{ mm}$  é a soma vectorial dum deslocamento elástico  $4-4' = \Delta e = 14 \text{ mm}$  com um deslizamento  $4'-5 = \Delta \delta = 15,5 \text{ mm}$ .

Avançando ainda o deslizamento de mais  $\Delta u = 50-35 = 15 \text{ mm}$ , atinge-se a configuração da Fig. 7 em que finalmente se rompe o contacto também no par da esquerda, com a inclinação  $-40^\circ$ , tal como sucedera ao par da direita (Fig. 3). Na Fig. 8 o correspondente deslocamento do ponto de contacto  $5-6 = \Delta u/2 = 7,5 \text{ mm}$  é a soma vectorial do deslocamento elástico  $5-5' = \Delta e = 5 \text{ mm}$  com o deslizamento  $5'-6 = \Delta \delta = 3,5 \text{ mm}$ . Como as deformações da mola são perfeitamente elásticas, as configurações inicial 1 e final 6 são iguais.

As forças desenvolvidas em cada contacto foram determinadas numa balança no prato da qual se colocou a tábua inferior com uma inclinação igual à desse contacto, e carregando-a com a tábua superior até se atingir para esta as componentes  $u$  e  $v$  do deslocamento. As forças assim determinadas, que são as componentes normais ao contacto,  $N'$ , indicam-se na Fig. 9. A partir delas, e consoante o deslizamento se faz num ou noutro sentido, determinam-se as respectivas componentes tangenciais  $T'$  bem como as resultantes  $F$ . E a partir destas, determinaram-se as componentes normal  $N$  e tangencial  $T$  segundo a direcção do deslizamento aparente. Na Fig. 9 esquematiza-se a evolução de  $N$  e  $T$  ao longo do deslizamento, onde se evidencia o facto de  $T$  ser negativo na parte final desse deslizamento.

### 3.2 – *Mecanismo do contacto aparente*

Analisada a cinemática das deformações dum par de saliências em contacto efectivo, bem como a estática das forças que se desenvolvem nesse contacto, veja-se agora o que se passa quando dois corpos deslizam um sobre o outro mobilizando assim, simultaneamente, no seu contacto aparente, um número elevado de contactos efectivos.

Após a carga normal e antes de se iniciar o deslizamento, os numerosos contactos efectivos têm inclinações muito variáveis a que corresponde uma determinada distribuição estatística.

Quando se inicia o deslizamento as saliências deformam-se, variando portanto as inclinações dos respectivos contactos e a correspondente distribuição estatística. Nesta nova distribuição deixam praticamente de existir as inclinações negativas visto que o deslizamento já anulou os contactos em que elas existiam mas ainda não criou, por ultrapassagem de saliências, novos contactos negativos em número significativo. Em contrapartida estabeleceram-se novos contactos com inclinação positiva.

Quando porém o deslizamento atinge o ponto em que algumas saliências, reagindo elasticamente, invertem a inclinação dos respectivos contactos, conforme se mostra nas Figs. 5 e 6, inverte-se também o sentido das componentes tangenciais dessas forças e dá-se por consequência uma diminuição brusca da resistência friccional total e entra-se na fase de deslizamento cinemático.

#### 4 – RESUMO E CONCLUSÕES

O mecanismo elástico de fricção proposto apoia-se em três hipóteses principais.

A primeira, de que o contacto entre os dois corpos se faz discretamente por intermédio das saliências das respectivas superfícies, é de aceitação geral nas diversas teorizações.

Na segunda admite-se que no contacto entre essas saliências, cuja lisura é a máxima compatível com a estrutura molecular do material respectivo, se gera uma resistência friccional traduzida por um ângulo de fricção molecular, característico dos materiais em contacto. A plastificação do material nos contactos das saliências não é considerada condição necessária, como acontece noutras teorizações em que se admite que, por efeito dessa plastificação, nesses contactos se desenvolve uma resistência por adesão.

Na terceira admite-se que as saliências das superfícies em contacto sofrem, por efeito do deslizamento, deformações que se mantêm dentro do limite de elasticidade, sendo portanto reversíveis.

Com base num modelo físico demonstra-se a cinemática e a estática do mecanismo elástico de contacto entre duas saliências e conclui-se que:

- a) o deslizamento do ponto de contacto entre as saliências pode considerar-se a soma vectorial de duas parcelas: o deslocamento elástico das saliências e o deslizamento destas uma sobre a outra.

- b) a deformação dum par de saliências em contacto passa por três fases: na primeira elas armazenam energia elástica e opõem resistência ao deslizamento; na segunda, de instabilidade, em que sofrem grandes deslocamentos elásticos, praticamente sem deslizamento aparente dos corpos, e na terceira elas restituem essa energia elástica ajudando o deslizamento.

O deslizamento entre dois corpos mobiliza simultaneamente um número elevado de contactos entre saliências das respectivas superfícies, contactos esses com inclinações muito diferentes consoante a posição relativa do par de saliências a que respeitam. Assim, o ângulo de fricção entre os corpos depende:

- a) da distribuição estatística dessas inclinações, distribuição essa que depende por sua vez da forma e disposição das saliências ao longo das superfícies de contacto aparente.
- b) da força de contacto correspondente a cada uma dessas inclinações, força essa que, além da forma das saliências, depende também das características elásticas do material.

A diferença entre os ângulos de fricção estática e cinemática é motivada pela diferença das distribuições estatísticas das inclinações dos contactos. no início do deslizamento, quando praticamente todos os contactos correspondem a saliências que se encontram ainda na primeira fase de deformação, atinge-se o máximo da resistência friccional, ou seja o ângulo de fricção estática. A fase de instabilidade elástica que se segue faz passar as saliências para a terceira fase, introduzindo no conjunto das inclinações um certo número de inclinações negativas que, reduzindo a resistência friccional total, determina a entrada no regime de deslizamento cinemático. Nesse novo regime o deslizamento vai renovando e mantendo um certo quantilho de inclinações negativas na distribuição dos contactos, daí resultando que a resistência friccional e o correspondente ângulo de fricção cinemática são menores do que os estáticos.

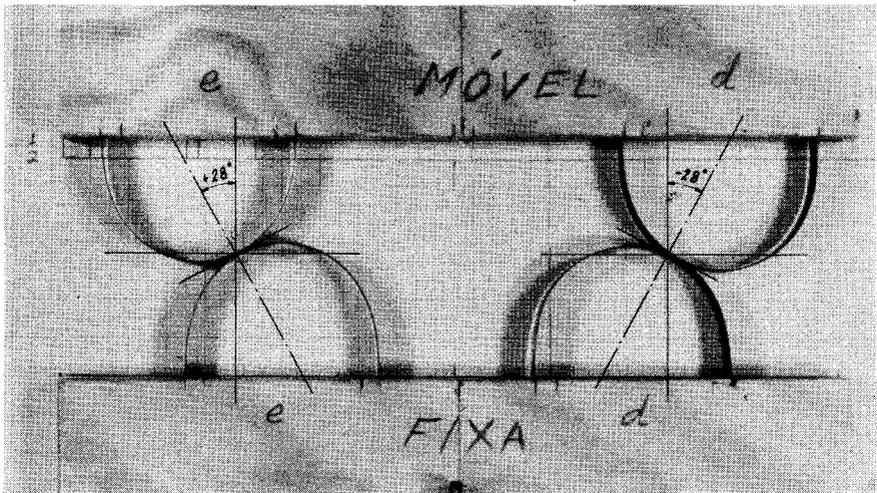


Fig. 2 – Configuração no momento em que se estabelece o contacto entre as saliências, sendo nula a respectiva força.

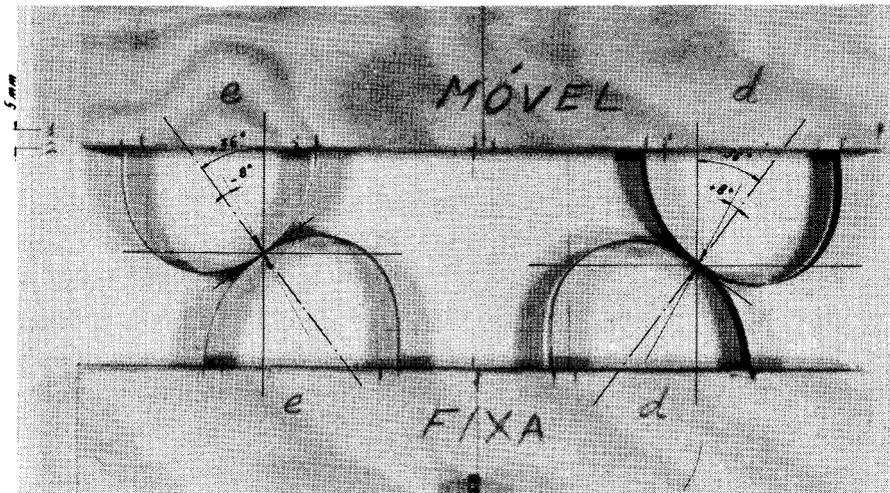


Fig. 3 – Configuração após carga normal e consequente deslocamento de 5 mm.

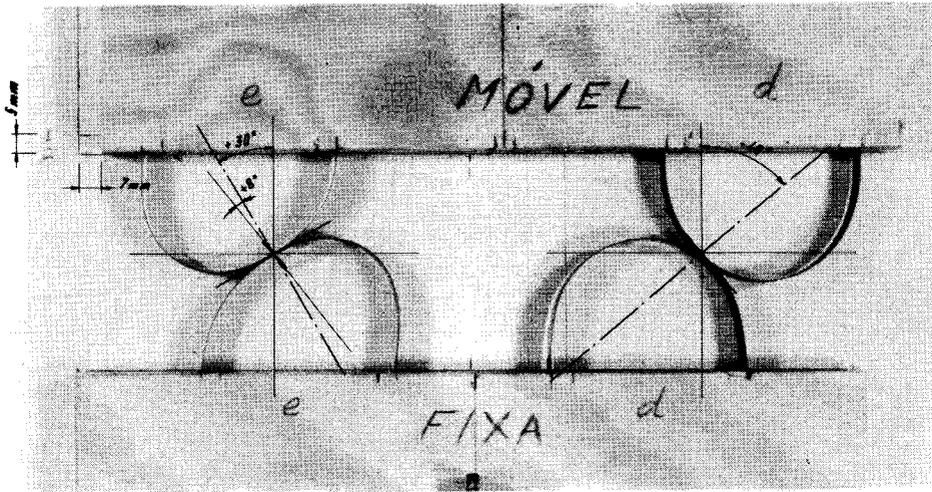


Fig. 4 – Configuração, após um deslizamento de 7 mm, sem deslocamento normal, em que se rompe o contacto no par de saliências da direita.

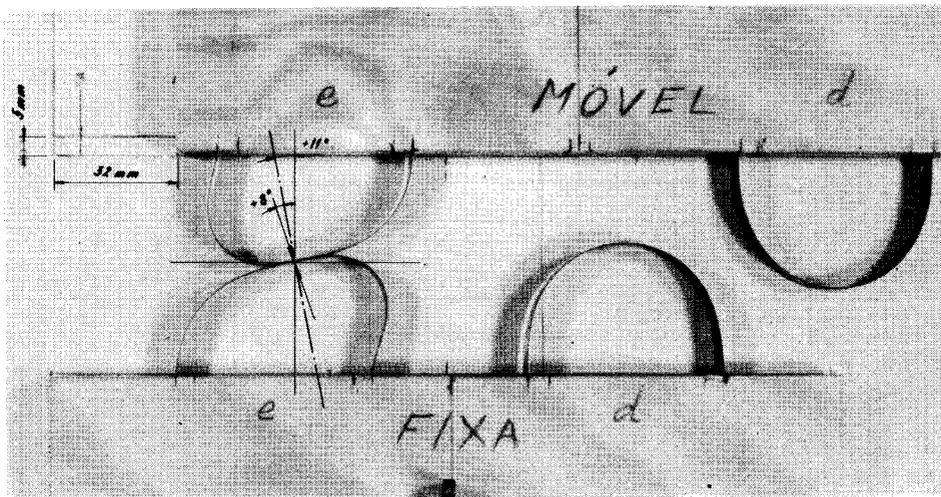


Fig. 5 – Limite, após um deslizamento de 32 mm, entre a primeira fase da deformação, de armazenamento de energia elástica, e a segunda fase, de instabilidade.

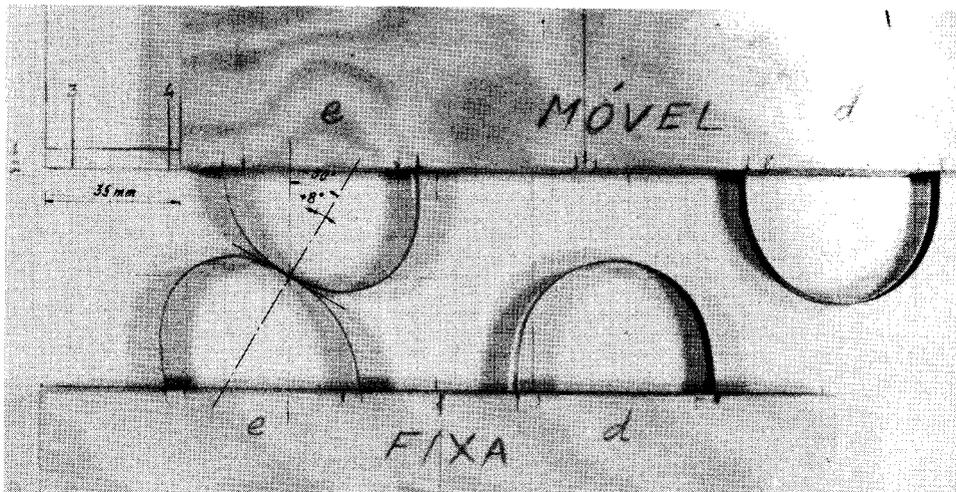


Fig. 6 – Limite, após um deslizamento de 35 mm, entre a fase de instabilidade e a terceira fase, de restituição de energia.

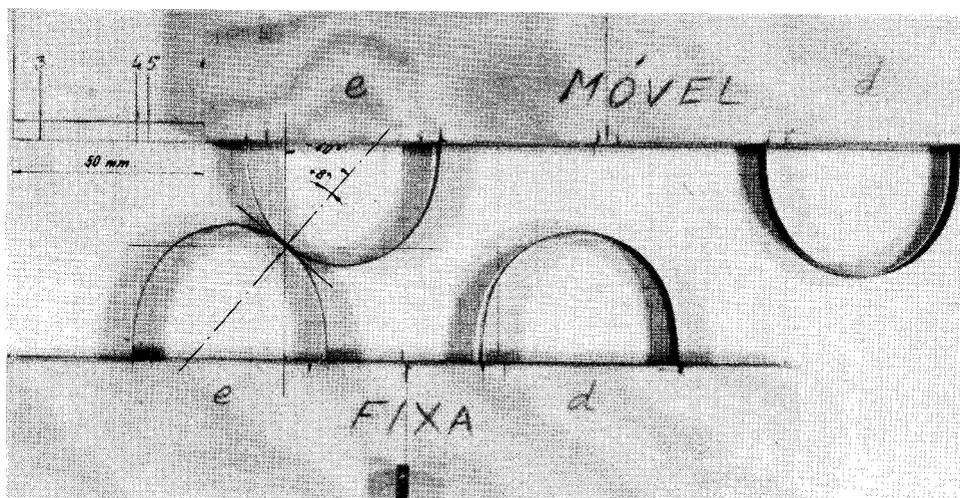


Fig. 7 – Configuração, após um deslizamento de 50 mm, em que rompe o contacto do par de saliências da esquerda.

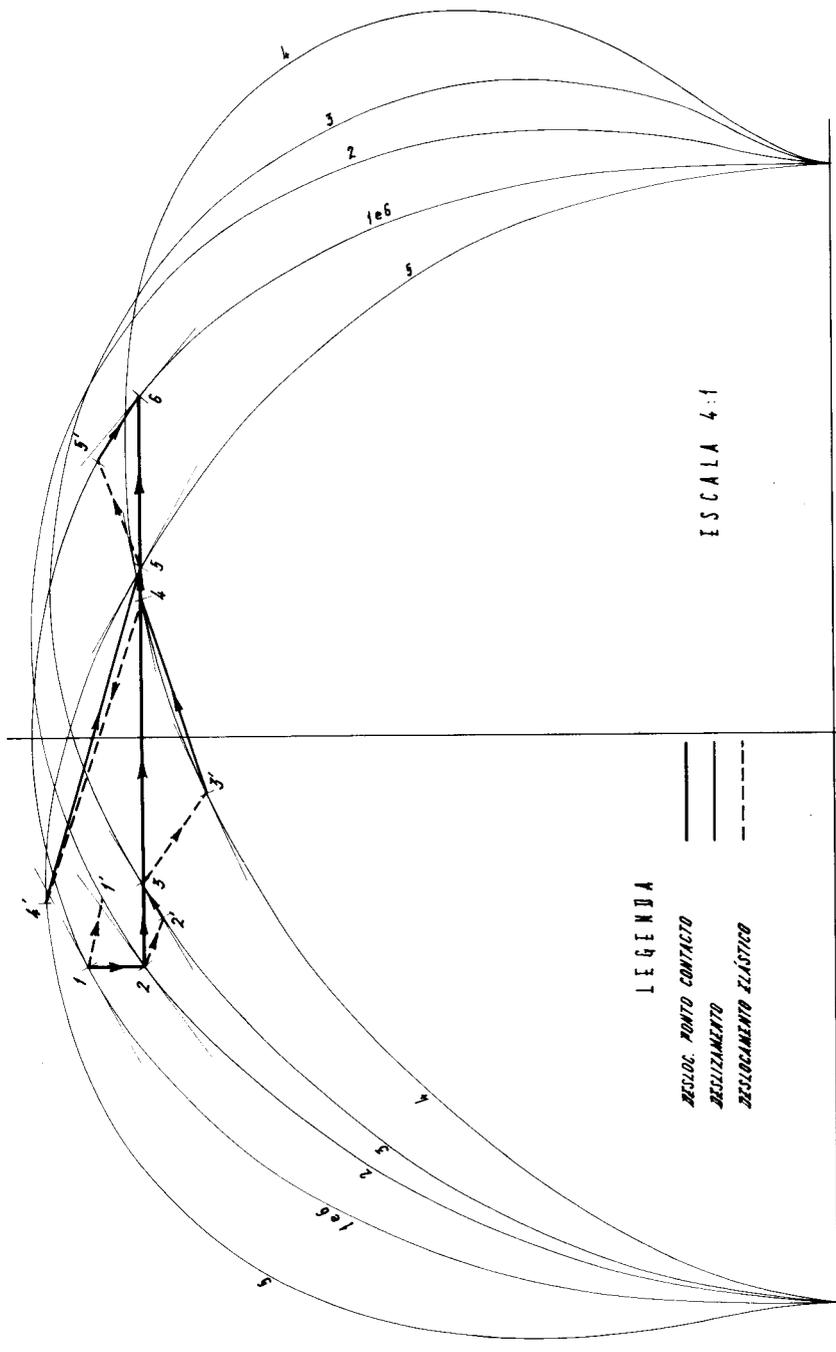


Fig. 8 — Esquema da cinemática de deformação duma saliência, com indicação dos deslocamentos do ponto de contacto, a traço cheio, e das respectivas componentes elásticas, a tracejado, e de deslizamento, a traço cheio fino.

- $N_1' = 0 \text{ gf}$
- $N_2' = 250 \text{ gf}$
- $N_3' = 400 \text{ gf}$
- $N_4' = 850 \text{ gf}$
- $N_5' = 400 \text{ gf}$
- $N_6' = 0 \text{ gf}$

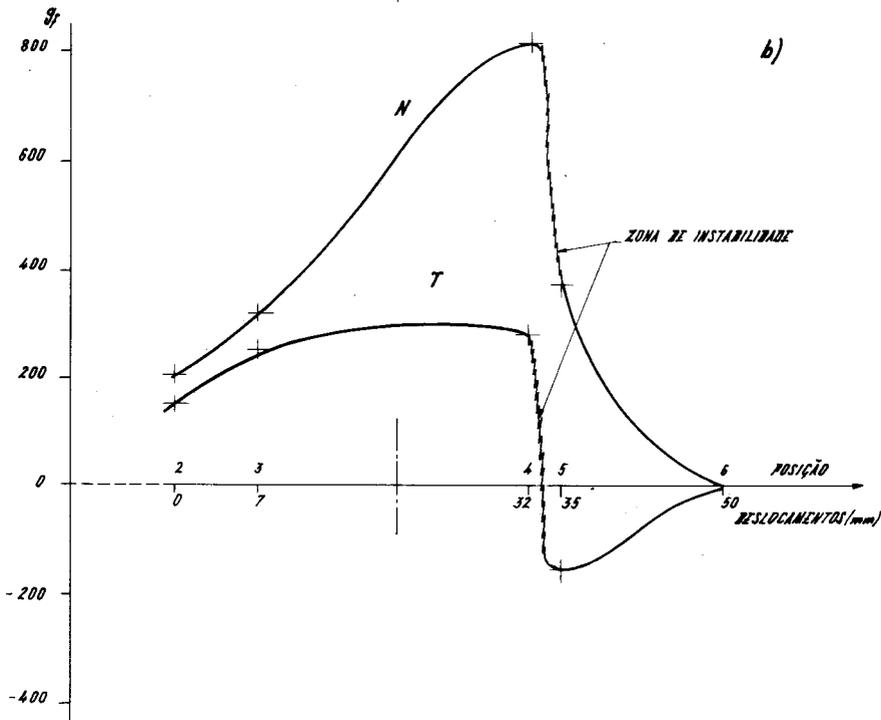
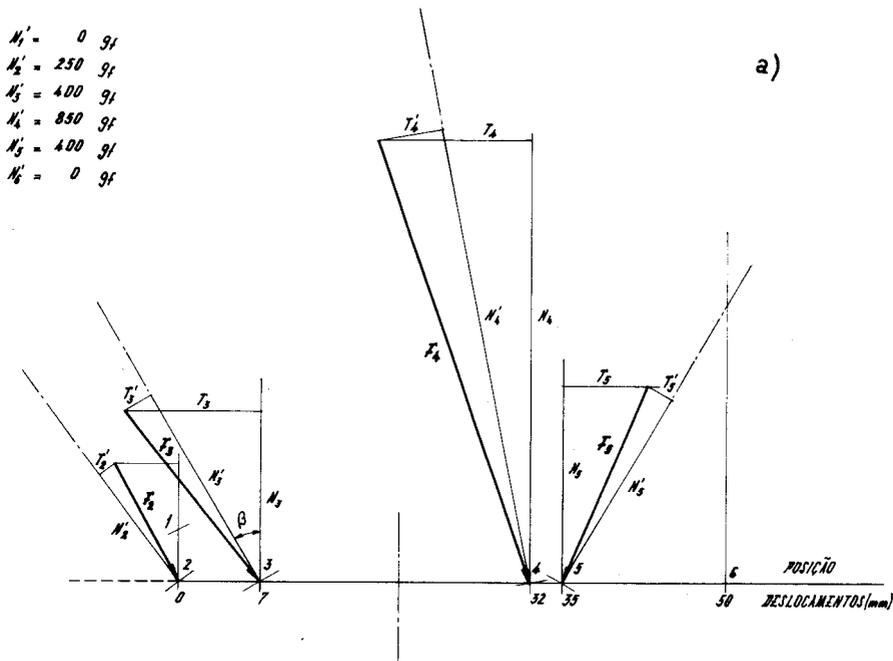


Fig. 9 - Forças de contacto correspondentes às várias configurações.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- 1 - NASCIMENTO, Ú. - Mecanismo elástico de fricção entre partículas. Relatório proc. 55/13/3451, LNEC, Lisboa, Março de 1977.
- 2 - NASCIMENTO, Ú. - Goniometer for determining the interparticles friction, Ninth Int. Conf. Soil Mech. Found. Eng., Tokyo, 1977.
- 3 - NASCIMENTO, Ú. - Notas sobre a resistência friccional entre partículas de materiais granulares, GEOTECNIA, N.º 22, Lisboa, Março de 1978.
- 4 - NASCIMENTO, Ú. - Multidirectional goniometer for determining interparticle friction, Congresso da RILEM sobre materiais granulares. Budapeste, Outubro de 1978.
- 5 - TERZACHI, K - Erdbaumechanik, Vienna 1925, p. 50-25. Translated by Casagrande A. "The Physical Causes of Proportionality Between Pressure and Frictional Resistance". In "From Theory to Practice in Soil Mechanics", New York, John Wiley & Sons, 1960.
- 6 - BYERLEE, J.D. - Theory Friction Based on Brittle Fracture, Journal of Applied Physics, Vol. 38. no. 7, June 1967, p. 2928-2934.
- 7 - GILS, C.G.; SABEY, B.E.; CARDEW, K.H. - Development and Performance of The Portable Skid-Resistance Tester, Road Research Laboratory (Technical Paper No. 66). London, 1964.
- 8 - Bowden and Tabor - The Friction and Lubrification of Solids, Oxford at the Clarendon Press, 1971.
- 9 - MOORE, D.F. - The Friction and Lubrification of Elastomers, Pergamon Press, Oxford, 1972.
- 10 - HORN, H.M. and DEER, D.U. - Frictional Characteristics of Minerals. Geotechnique, Vol. XII, N.º 4, Dec. 1962, p. 313-334.