

O MÉTODO DE PERMEABILIDADE VARIÁVEL NA ANÁLISE POR ELEMENTOS FINITOS DOS ESCOAMENTOS EM MEIOS POROSOS*

The variable permeability method in the finite element analysis of seepage

por
RUI CORREIA**

RESUMO – São descritos os fundamentos de um método recentemente proposto para a análise por elementos finitos, com malha constante, dos escoamentos não confinados em meios porosos. São apresentados resultados obtidos com a utilização do método, discutem-se procedimentos para melhorar a sua convergência numérica e referem-se alguns aspectos comparativos em relação à utilização de métodos de malha variável.

SYNOPSIS – The fundamentals of a recently proposed method for the finite element analysis, with constant mesh, of steady unconfined seepage are described. Some results obtained through the use of the method are presented and some procedures that can be used to improve his convergence characteristics are discussed. Reference is made to comparative aspects between the method described and variable mesh methods.

1 – INTRODUÇÃO

A técnica que primeiro surgiu para a análise pelo método dos elementos finitos dos escoamentos permanentes não confinados em meios porosos, e que ainda hoje é a mais correntemente utilizada, é a que se baseia num processo iterativo em que se alteram em cada passo as coordenadas dos pontos nodais da malha de elementos correspondente à subdivisão do domínio, de acordo com um

* Manuscrito recebido em Agosto 1979. A discussão do trabalho está aberta durante um período de três meses.

** Engenheiro Civil, Estagiário para Especialista do LNEC

critério respeitante à satisfação das condições de fronteira na superfície livre. A utilização desta técnica de malha variável, se por um lado permite obter soluções para a posição da superfície livre com elevado grau de precisão, especialmente quando associada ao uso de elementos finitos com funções interpoladoras não lineares, tem no entanto os seguintes inconvenientes:

i) Obriga à resolução de um sistema de equações numéricas diferente em cada passo do processo iterativo.

ii) Dificulta o estudo de problemas em que se pretende obter em separado, mas com a mesma malha, a distribuição de pressões neutras e tensões num dado domínio.

iii) Torna-se de difícil aplicação quando a superfície livre do escoamento em estudo apresenta grandes inclinações em relação à horizontal e quando essa superfície livre intersecta a superfície de contacto entre zonas com um grande contraste de permeabilidades; essas dificuldades surgem devido à possibilidade de introdução de grandes distorções e/ou interpenetrações dos elementos ao longo do processo iterativo e só podem ser resolvidas através do uso de uma malha inicial de elementos criteriosamente escolhida, de factores adequados de variação da posição dos nós na superfície livre e de um tratamento especial na zona de intersecção da superfície livre com a superfície de percolação. Mesmo respeitando estes condicionalismos é necessário nestes casos que a posição estimada inicial da superfície livre seja já suficientemente próxima da posição correcta (LNEC, 1977).

O reconhecimento destas dificuldades tem levado à introdução das técnicas de malha constante, sendo precisamente objectivo do presente trabalho a apresentação dos fundamentos teóricos, de aspectos relacionados com as características de convergência numérica e de aplicações de um método recentemente proposto por Bathe *et al* (1979) para a análise pelo método dos elementos finitos, com malha constante, dos escoamentos permanentes não confinados em meios porosos.

2 – FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DOS PROBLEMAS DE ESCOAMENTOS PERMANENTES EM MEIOS POROSOS

A equação diferencial que descreve o escoamento permanente da água através de um meio poroso totalmente saturado, admitindo a validade da lei de Darcy, e na ausência de fluxos impostos no interior do domínio, é (LNEC 1977):

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(K_{ij} \frac{\partial H}{\partial x_j} \right) = 0 \quad (1)$$

$$(i, j = 1, 2, 3)$$

onde se empregou a convenção da soma (o que sucederá sempre que não se indicar o contrário) e onde x_i são as coordenadas num referencial ortonormado, K_{ij} é o tensor de permeabilidade e H é a cota piezométrica.

$$H = \frac{p}{\gamma} + z \quad (2)$$

em que p é a pressão, γ o peso específico da água e z é a distância a um plano horizontal de referência.

Se o meio for homogêneo ($\frac{\partial K_{ij}}{\partial x_m} = 0$) e isótropo ($K_{ij} = K \delta_{ij}$)

a expressão (1) reduz-se a:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_j} \delta_{ij} = 0 \quad (3)$$

$$(i, j, m = 1, 2, 3)$$

ou seja, H é uma função harmónica.

A fronteira do domínio onde se processa o escoamento, no caso da existência de superfície livre, divide-se em três zonas no que diz respeito às condições aos limites impostas: i) zona com cota piezométrica fixada; ii) zona com fluxo fixado; iii) a superfície livre, de localização desconhecida, na qual se impõe simultaneamente uma condição de fluxo e uma condição de cota piezométrica.

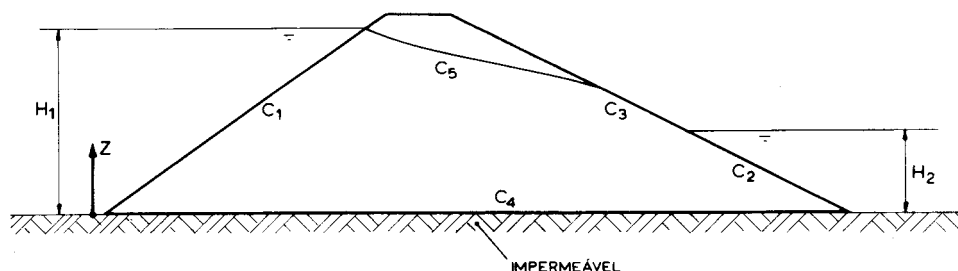


Fig. 1

Concretizando para o caso plano da Fig. 1, teremos:

$$H = H_1 \text{ em } C_1 \quad 4a)$$

$$H = H_2 \text{ em } C_2 \quad 4b)$$

$$H = z \text{ em } C_3 \quad 4c)$$

$$K_{ij} \frac{\partial H}{\partial x_j} n_i = 0 \text{ em } C_4 \quad 4d)$$

$$H = z \quad e$$

$$K_{ij} \frac{\partial H}{\partial x_j} n_i = 0 \text{ em } C_5 \quad 4e)$$

em que n_i são os cosenos directores da normal ao contorno.

3 - SOLUÇÃO NUMÉRICA PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

A utilização do método dos elementos finitos para a obtenção de uma solução numérica aproximada da equação diferencial (1) conduz, quer utilizando uma formulação de resíduos pesados, quer utilizando uma formulação variacional, a um sistema de equações numéricas (Zinckiewicz; 1977):

$$R_{ij} H_j = 0 \quad 5)$$

$$(i, j, = 1, \dots, N)$$

sendo N o número de pontos nodais da discretização espacial utilizada e H_j o valor da cota piezométrica no ponto nodal j .

Utilizando a formulação variacional ou a formulação de resíduos pesados correspondente ao método de Galerkin (funções de peso iguais às funções interpoladoras) será:

$$R_{ij} = K_{mn} \frac{\partial N_i}{\partial x_m} \frac{\partial N_j}{\partial x_n} dV \quad 6)$$

$$(i, j = 1, \dots, N)$$

$$(m, n = 1, 2, 3)$$

em que N_i e N_j são as funções interpoladoras correspondentes respectivamente

aos pontos nodais i e j e V é o volume do domínio onde se processa o escoamento.

A condição de fronteira de fluxo está automaticamente incorporada em (5) sendo usualmente designada por condição natural. A condição de fronteira do tipo cota piezométrica fixada ($H = \bar{H}$) é geralmente introduzida através da adição de valores muito altos, adequadamente relacionados, na diagonal principal de R_{ij} e no vector dos termos independentes, apenas para as linhas correspondentes aos pontos nodais com cota piezométrica fixada. O sistema de equações (6) transforma-se assim em:

$$\begin{aligned} \bar{R}_{ij} \quad H_j &= \bar{Q}_i \\ (i, j = 1, \dots, N) \end{aligned} \tag{7}$$

A resolução de (7) permite obter uma solução numérica se for conhecido o domínio onde se processa o escoamento. Como já se referiu, no caso dos escoamentos não confinados esse domínio não é inicialmente conhecido, já que constitui também incógnita do problema a localização da superfície livre. Para a resolução destes escoamentos pelo método dos elementos finitos existem fundamentalmente dois tipos de procedimentos: os de malha variável e os de malha constante.

Os procedimentos de malha variável baseiam-se sempre em arbitrar uma posição inicial para a superfície livre e impor aí ou a condição de cota piezométrica fixada ou a condição de fluxo nulo. Utilizando uma malha inicial para o domínio definido por essa posição arbitrada da superfície livre obtém-se uma solução que permite verificar se a condição de fronteira não imposta é ou não também satisfeita nos pontos nodais sobre a superfície livre ajustando-se então as coordenadas desses pontos nodais em função do erro correspondente à condição não imposta.

A alteração das coordenadas dos pontos nodais sobre a superfície livre (e geralmente também as de outros pontos, por forma a permitir uma deformação global do conjunto dos elementos) dá lugar a uma malha com a qual se obtém uma nova solução, prosseguindo o processo iterativo até que os erros correspondentes à condição de fronteira não imposta sejam considerados suficientemente pequenos (Finn; 1967) (Neuman et al; 1970) (France et al; 1971).

Como é óbvio a utilização desta técnica de malha variável conduz a uma alteração da matriz $\bar{R}_{ij}$ em cada iteração, obrigando pois à resolução de um sistema de equações diferente em cada passo.

Por outro lado, nos procedimentos de malha constante, todo o domínio susceptível de estar interessado no escoamento é subdividido em elementos com uma malha que permanece invariável ao longo de um processo iterativo em que se procura garantir que a superfície $H=z$ encontrada para a solução correspondente a um determinado passo obedeça à condição de fronteira natural.

O procedimento de malha constante que primeiro surgiu foi proposto por Desai (1976) e consiste sumariamente em: i) efectuar um primeiro cálculo e obter a superfície $H=z$ correspondente à solução obtida; ii) calcular os fluxos que atravessam essa superfície de pressão nula e discretizá-los nos pontos nodais dos elementos intersectados; iii) obter uma nova solução, mais aproximada, através da introdução dos fluxos discretizados, com o sinal contrário, como fluxos internos impostos; iv) prosseguir iterativamente até que a diferença entre duas soluções consecutivas seja considerada suficientemente pequena.

Uma vez que não há alteração nem na geometria da malha nem nas características dos elementos a matriz $\bar{R}_{ij}$ (7) permanece sempre a mesma ao longo do processo iterativo, o que permite uma acentuada economia nos tempos de computação requeridos.

4 – O MÉTODO DE PERMEABILIDADE VARIÁVEL

Recentemente foi proposto por Bathe *et al* (1979) um novo procedimento para a análise por elementos finitos com malha constante dos escoamentos não confinados. Este procedimento baseia-se na introdução, em todo o domínio susceptível de estar interessado no escoamento, de uma relação de dependência entre as características de permeabilidade do meio e a cota piezométrica, relação essa que se define do seguinte modo: se a pressão na água for negativa ($H < z$) a permeabilidade do meio é considerada nula ($K_{ij} = 0$), e se a pressão for positiva ou nula ($H \geq z$) a permeabilidade do meio assume o valor real.

É possível assim satisfazer (em termos médios) a condição de fronteira natural na superfície $H=z$ uma vez que esta passa a constituir contorno de uma zona impermeável. Uma vez que o tensor de permeabilidade é dependente da cota piezométrica também o será, como se deduz de (6), a matriz $\bar{R}_{ij}$ correspon-

dente à malha de elementos para a resolução de um determinado problema. É-se assim conduzido a um problema não linear do tipo:

$$\bar{R}_{ij} (H_k) H_j = \bar{Q}_i \quad (8)$$

(i, j, k = 1, ... , N)

Para esta classe de problemas não lineares é possível implementar um esquema resolutivo por iteração directa (Zinckiewicz; 1977) para o qual a solução correspondente a um passo genérico de ordem m, $H_j^{(m)}$, é obtida através de:

$$\bar{R}_{ij}^{(m-1)} H_j^{(m)} = \bar{Q}_i \quad (9)$$

(i, j = 1, ... , N)

em que $\bar{R}_{ij}^{(m-1)}$ é a matriz global correspondente à solução $H_j^{(m-1)}$.

Neste tipo de processo iterativo torna-se necessário resolver um novo sistema de equações em cada passo, pelo que se torna geralmente mais eficiente a utilização de um esquema resolutivo baseado no algoritmo de Newton-Raphson modificado (Zinckiewicz; 1977) fazendo com que as incógnitas num passo genérico (m) do processo iterativo sejam as variações de cota piezométrica.

$$\Delta H_j^{(m)} = H_j^{(m)} - H_j^{(m-1)} \quad (10)$$

calculadas a partir de:

$$\bar{R}_{ij}^{(0)} \Delta H_j^{(m)} = \bar{Q}_i - (\bar{R}_{ik}^{(m-1)} H_k^{(m-1)}) \quad (11)$$

(i, j, k = 1, ... , N)

e prosseguindo iterativamente até que os valores de ΔH_j sejam suficientemente pequenos de acordo com algum critério.

Na Fig. 2 representa-se esquematicamente o funcionamento deste esquema resolutivo, podendo-se verificar que a matriz actualizada $\bar{R}_{ij}^{(m-1)}$ é utilizada apenas para calcular os fluxos não equilibrados correspondentes à solução $H_j^{(m-1)}$, e que se recorre sempre à matriz $\bar{R}_{ij}^{(0)}$ correspondente à solução inicial $H_j^{(0)}$ para calcular os acréscimos da cota piezométrica em cada passo.

A determinação da matriz $\bar{R}_{ij}$ correspondente a uma certa solução H_j pode ser facilmente conseguida se for utilizado, como é usual, um esquema de integração numérica por pontos (quadratura de Gauss) no cálculo dos integrais envolvidos na expressão (6). Bastará com efeito determinar os valores dos

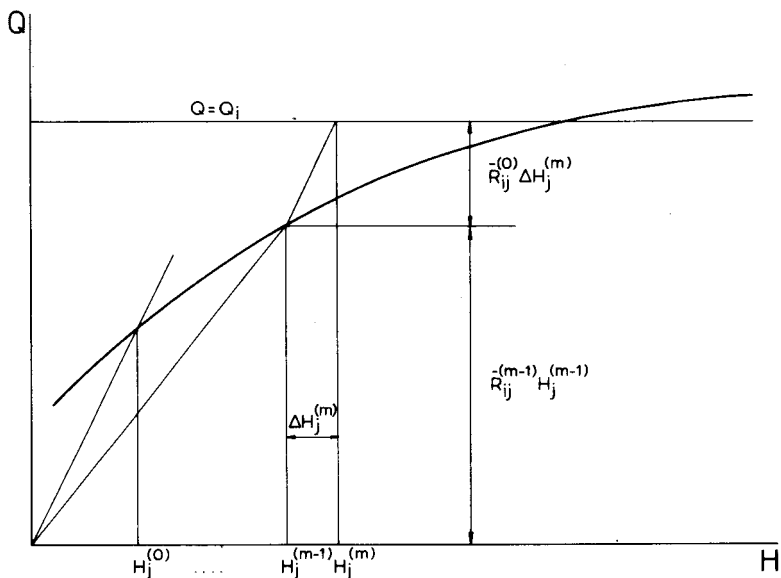


Fig. 2

coeficientes de permeabilidade K_{mn} nos pontos de integração numérica de cada elemento de acordo com os valores da cota piezométrica nesses pontos e atendendo à dependência $K_{mn}(H)$ atrás definida. Utilizando esta técnica resulta necessariamente que quanto maior for o número de pontos de integração numérica nos elementos atravessados pela superfície $H = z$ maior será a precisão obtida, embora aumente o tempo de computação requerido.

Em certos casos é conveniente utilizar uma forma modificada da expressão (10) com vista a acelerar e/ou garantir a convergência do processo iterativo. Uma das formas possíveis consiste em fazer:

$$H_j^{(m)} = H_j^{(m-1)} + \alpha \Delta H_j^{(m)} \quad (12)$$

$$(j = 1, \dots, N)$$

em que α é um factor de aceleração de convergência e os valores $\Delta H_j^{(m)}$ continuam a ser calculados através de (11).

5 – EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

Apresentam-se seguidamente dois exemplos de aplicação a casos planos do método de permeabilidade variável, cujas principais características acabam de ser apresentadas.

Para a obtenção das soluções numéricas respectivas elaborou-se um programa de cálculo automático cujas principais características são:

- i) Utiliza elementos planos isoparamétricos quadrangulares de oito nós.
- ii) Recorre-se à técnica iterativa definida pelas expressões (11) e (12).
- iii) O critério de convergência adoptado consiste em verificar:

$$\Delta H_j^{(m)} \leq \epsilon$$

$$(j = 1, \dots, N)$$

iv) É possível distinguir entre elementos “lineares” e “não lineares”, ou seja, entre os elementos para os quais as contribuições para a formação da matriz R_{ij} se mantêm constantes ao longo do processo iterativo, e os elementos susceptíveis de ser intersectados pela superfície $H=z$ e para os quais portanto há possibilidades de alteração dessas contribuições.

O primeiro exemplo diz respeito ao escoamento através de uma barragem homogénea e isotrópica de paramentos verticais representada na Fig. 3, tendo sido utilizada a malha fixa de elementos finitos representada na Fig. 4.

A resolução deste exemplo foi aproveitada para verificar a influência na solução obtida e no número de iterações necessário para a obter dos dois seguintes factores: i) número de pontos de integração numérica (NG) utilizados nos elementos “não lineares”; ii) utilização de aceleradores de convergência. No que diz respeito ao primeiro efectuaram-se cálculos para $NG=9$ e $NG=25$ e no que diz respeito ao segundo efectuaram-se cálculos para $\alpha=1,0$ e $\alpha=1,5$.

Realizaram-se então 4 cálculos distintos com as seguintes características:

- Cálculo I – $NG=9$, $\alpha=1,0$
- Cálculo II – $NG=25$, $\alpha=1,0$
- Cálculo III – $NG=9$, $\alpha=1,5$
- Cálculo IV – $NG=25$, $\alpha=1,5$

sendo em todos eles $\epsilon=0,01$ m.

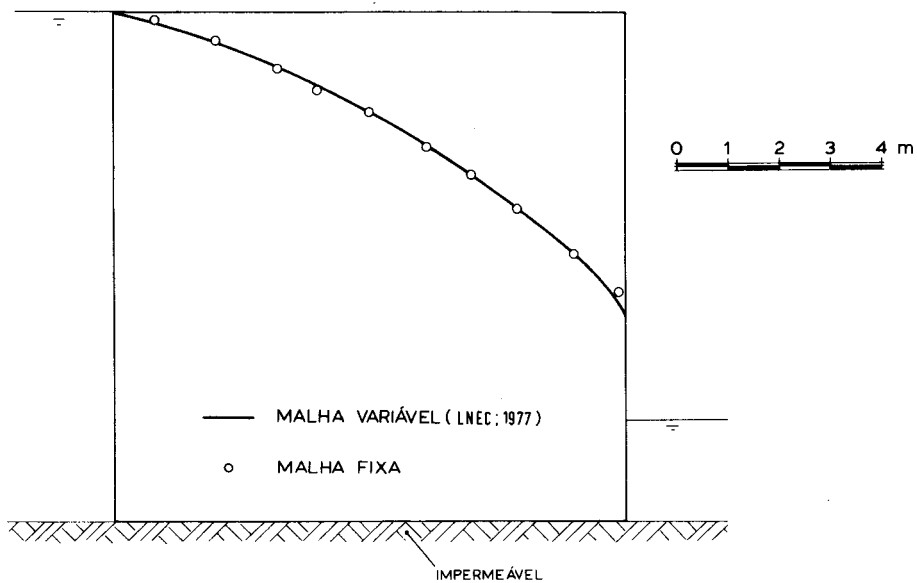


Fig. 3

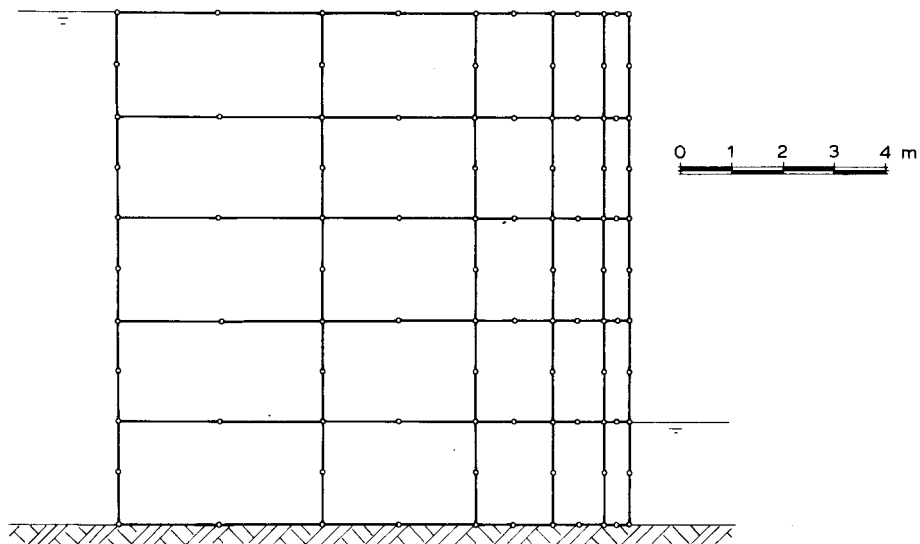


Fig. 4

Os resultados obtidos em termos de posição da superfície livre são praticamente coincidentes para os 4 cálculos, e apresentam-se sob forma gráfica na Fig. 3, onde também se representam os resultados para o mesmo exemplo obtidos através de um procedimento de malha variável (LNEC; 1977), constata-se uma excelente concordância. O número de iterações necessário para satisfazer o critério de convergência adoptado foi 10 para o cálculo I, 8 para o cálculo II, 7 para o cálculo III e 6 para o cálculo IV.

Verifica-se pois que o uso de um número mais elevado de pontos de integração numérica nos elementos “não lineares” e o recurso a factores de aceleração de convergência convenientemente escolhidos se traduzem numa efectiva diminuição do número de iterações necessário para se obter uma dada precisão.

O segundo exemplo diz respeito ao escoamento através de uma barragem de perfil homogéneo e isotrópico com paramento de montante parabólico e filtro horizontal a jusante, representada na Fig. 5, tendo sido utilizada a malha fixa de elementos representada na Fig. 6.

Para a obtenção da solução numérica correspondente a este exemplo considerou-se $NG = 25$, $\alpha = 1,0$ e $\epsilon = 0,10$.

Os resultados obtidos, em termos de localização da superfície livre, e conseguidos após 7 iterações, são apresentados sob forma gráfica na Fig. 5, onde igualmente se representa uma solução obtida para o mesmo problema por um método da malha variável (LNEC; 1977) e que coincide praticamente com a solução teórica.

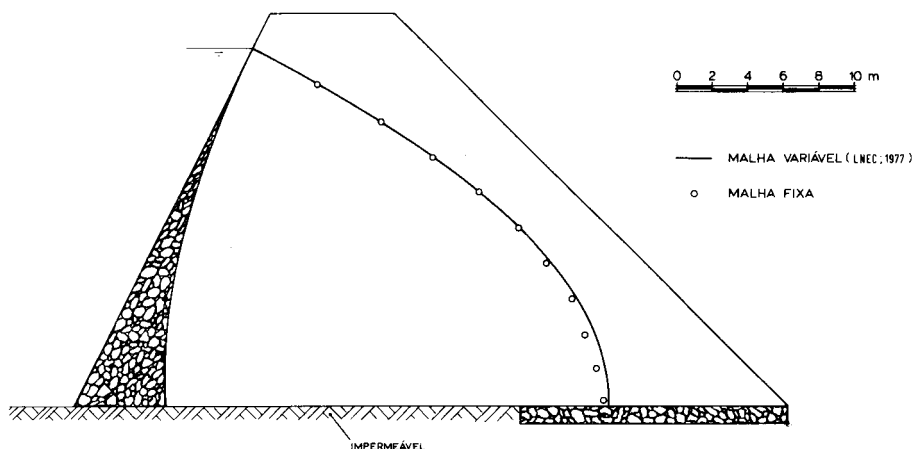


Fig. 5

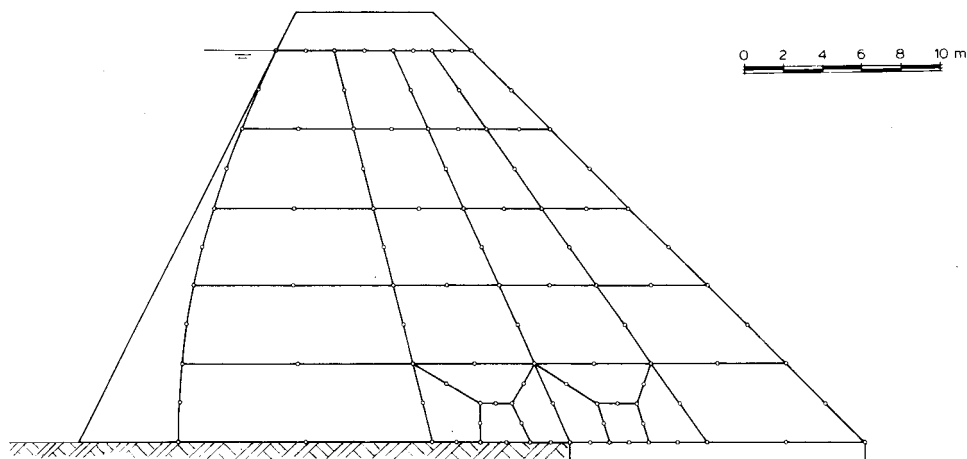


Fig. 6

A análise destes resultados evidencia que mesmo em problemas como o deste exemplo, em que existe uma larga zona de superfície livre com inclinações muito grandes em relação à horizontal, é possível obterem-se soluções com razoável precisão (e através de um número reduzido de iterações) ainda que a malha utilizada seja relativamente grosseira. A resolução deste tipo de problemas é possível através de métodos de malha variável, mas, como já se referiu, torna-se necessário obedecer a um certo número de condicionalismos na escolha da malha inicial, o que se traduz numa redução da flexibilidade da utilização. É particularmente desvantajosa a circunstância de geralmente ser necessário recorrer a malhas iniciais diferentes quando num problema como o deste exemplo se pretendem as soluções correspondentes a várias relações entre os valores da permeabilidade horizontal e vertical.

6 – CONCLUSÕES

Do que atrás ficou exposto, e dos resultados dos dois exemplos, é possível concluir-se que o método de permeabilidade variável para o estudo dos escoamentos permanentes em meios porosos por elementos finitos com malha constante, especialmente quando associado a técnicas iterativas baseadas no

algoritmo de Newton-Raphson modificado, constitui uma alternativa vantajosa (tanto em versatilidade como em economia) relativamente aos métodos de malha variável.

Foi também possível evidenciar que as características de convergência do método podem ser melhoradas através do uso de valores adequados quer para o número de pontos de integração numérica nos elementos quer para os factores de aceleração de convergência.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BATHE, K. J.; KHOSHGOFTAAR, M. R. - "Finite element free surface analysis without mesh iteration" - Int. Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics - Col. 3. n.º 1, 1979.
- FINN, W.L. - "Finite element analysis of seepage through dams", Journal of Soil Mechanics and Foundation Division, ASCE, n.º SM 6, 1967.
- FRANCE, P.W.; PAREKH, C.J.; PETERS, J.C.; TAYLOR, C. - "Numerical analysis of free surface problems", Journal of the Irrigation and Drainage Division, ASCE, n.º IR1, 1971.
- LABORATÓRIO NACIONAL DE ENGENHARIA CIVIL - "Estudo dos escoamentos permanentes em meios porosos pelo método dos elementos finitos", Relatório Proc. 55/16/5023, Lisboa, 1977.
- NEUMAN, S.P.; WITHERSPOON, P.A. - "Finite element method of analysing steady seepage with a free surface", Water Resources Research, vol. 6, n.º 3, 1970.
- DESAI, C.S. - "Finite element residual schemes for unconfined flow", Int. Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 10, 1976.
- ZINCKIEWICZ, O.C. - "The finite element method in engineering science", Mc Graw-Hill, 1977.