ANISOTROPIA DAS ROCHAS E DOS MACIÇOS ROCHOSOS*
APLICAÇÃO DE QUÁRTICAS FECHADAS AO ESTUDO DA DEFORMABILIDADE E DA ROTURA

Anisotropy of Rocks and Rock Masses
Application of Closed Quartics to the Study of Deformability and Rupture

por
F. PERES RODRIGUES**

RESUMO- Este trabalho analisa, de uma maneira geral, o problema da anisotropia das rochas e dos maciços rochosos, tratando em particular, da aplicação de quárticas fechadas ao estudo da anisotropia espacial dos módulos de elasticidade e das tensões de rotura por compressão uniaxial. Enunciam-se as 4 hipóteses do método proposto, resultantes dos valores experimentais obtidos ao longo de 13 anos, e que conduzem à definição de uma lei espacial, tipo quártica fechada, para tradução da anisotropia dos módulos de elasticidade e das tensões de rotura. Definem-se 4 coeficientes de anisotropia: massa, superfície, total e máxima, que caracterizam os diversos tipos de anisotropia ligados às propriedades intrínsecas das rochas e dos maciços rochosos. Particulariza-se o método proposto a rochas e maciços rochosos sem, com uma e com duas orientações preferenciais, sendo apresentado para cada um

(*) - Extracto da II Parte do trabalho apresentado como tese ao concurso para obtenção do grau de Investigador no Laboratório Nacional de Engenharia Civil (LNEC), 1977.

(**) - Investigador do LNEC.

destes 3 casos, não só o tratamento estatístico necessário à obtenção das quárticas mais prováveis definidoras das anisotropias, como também um exemplo concreto.

SYNOPSIS - This work analyses the problem of the anisotropy of rocks and rock masses in general terms, and deals more particularly with the application of closed quartics to the study of the spatial anisotropy of the moduli of elasticity and of ultimate strengths under uniaxial compression. The four hypotheses on which the method is based are indicated, which resulted from experimental values obtained through 13 years and lead to the definition of a spatial law, of the closed quartics type, to reproduce the anisotropy of the moduli of elasticity and of the ultimate strengths. Four anisotropy coefficients are defined, namely, those concerning mass, surface, total or maximum anisotropies, which characterize the different types of anisotropy dependent on the intrinsic properties of rock masses. The method proposed is described in detail for the three following cases: rocks and rock masses, with one preferencial orientation, with two, and with none. For each case both the statistical processing required for obtaining the most probable quartics that define anisotropies, and a specific example are presented.

1 - INTRODUÇÃO

A Mecânica das Rochas, organizada como ciência há pouco mais de vinte anos, procura no momento actual concentrar os seus esforços em dois grandes temas necessários ao seu cabal desenvolvimento e ao seu interesse como ciência aplicada: o estudo da anisotropia das características consideradas principais das rochas e dos maciços rochosos e o estudo da influência do efeito de escala, quer o de natureza geométrica quer o de natureza temporal, nessas mesmas características, conhecimento este sem o qual qualquer tentativa de correlação entre as propriedades das rochas e dos maciços rochosos será sempre de resultados duvidosos.

Os objectivos finais de todo o esforço dispendido na melhor utilização da Mecânica das Rochas ao serviço da humanidade são, sem dúvi

da, um conhecimento mais correcto da segurança das grandes obras e um dispêndio mais racional da sua construção; contudo, estes dois objectivos não poderão ser atingidos sem que os dois temas enunciados sejam suficientemente compreendidos e dissecados, cada um por si e nas suas interligações.

O trabalho que se apresenta procura, de alguma forma, contribuir para um melhor conhecimento e divulgação do primeiro tema enunciado, sem contudo se deixar de considerar o segundo como matéria relevante e actual.

2 - MÉTODO PROPOSTO

No que se segue vão expôr-se os passos que levaram à concretização de um método, baseado em resultados experimentais, cuja finalidade é a obtenção de uma lei que caracterize as anisotropias espaciais dos módulos de elasticidade e das tensões de rotura, das rochas e dos maciços rochosos, por via estatística, e de forma a que a lei a que se chegue seja, para os casos mais correntes, o mais geral possível. O emprego de computador tornará rápidos e simples os diversos cálculos necessários à obtenção das leis procuradas.

2.1 Hipóteses experimentais do método

Os primeiros estudos foram realizados em rochas provenientes de maciços rochosos sem orientações preferenciais, de origem endógena, nomeadamente, granitos. Para estas rochas, as anisotropias em causa foram muito satisfatoriamente definidas por leis espaciais, traduzidas por expressões do 2º. grau, tipo elipsóide. Os coeficientes de variação encontrados em relação aos valores experimentais e teóricos correspondentes, raramente atingiam os 10 %, o que prova o bom ajuste entre os mesmos, em face da precisão conseguida com os métodos experimentais não ser, regra geral, inferior àquele coeficiente.

Dado o bom resultado conseguido com este tipo de rochas, procurou estender-se o método às rochas provenientes de maciços rochosos com orientações preferenciais, de origem sedimentar ou metamórfica, nomeadamente, a xistos e gnaisses. Para estas rochas, a experiência mostrou que a superfície tipo elipsóide não define bem as anisotropias em estudo, pelo que seria necessária a procura de uma lei mais geral que admitisse, como caso particular, a lei já encontrada para o primeiro tipo de rochas estudado. A procura dessa lei, pressupunha o enunciado de algumas hipóteses baseadas na experiência colhida e nos conhecimentos existentes, de forma a que a sua expressão definidora fosse o mais simples possível, sem prejuízo de uma boa concordância entre os resultados experimentais e teóricos.

Sabe-se que a anisotropia de deformabilidade dos cristais, na sua forma mais complexa, é definida por superfícies fechadas do 8º grau, e que as rochas e também os maciços rochosos, para além da sua compartimentação, são constituídos por cristais de diferentes espécies, em geral aleatoriamente orientados e cristalizando em sistemas cujas anisotropias de deformabilidade podem ser definidas por superfícies fechadas do 2º. e do 8º. graus; tem-se constatado que a orientação aleatória dos cristais tende a minimizar a influência da anisotropia, tudo fazendo prever que nas rochas e, por extrapolação, nos maciços rochosos, o grau da superfície fechada, definidora da anisotropia, seja inferior a oito. É de salientar que à medida que a orientação dos cristais vai perdendo a sua aleatoriedade, como sucede em muitas rochas sedimentares e metamórficas, as superfícies representativas das anisotropias em estudo se vão tornando mais complexas. Não sendo de considerar superfícies fechadas do 6º. grau, por questões de simetria que adiante se expõem, resta considerar superfícies fechadas do 4º. grau que na sua forma geral apresentam, no máximo, 35 termos de grau não superior a 4, incluindo o termo independente, cujos coeficientes podem ser positivos, negativos ou nulos, e sintetizados na

expressão:

$$\sum_{i,j,k=0}^{4} a_{ijk}\, x^i y^j z^k = 0 \qquad \text{com} \qquad i+j+k \leqslant 4 \qquad (1)$$

Será esta a 1ª. hipótese formulada, as superfícies de anisotropia serem definidas por expressões do 4º. grau.

No quadro I apresenta-se uma tábua dos coeficientes ou da multiplicação que permite, pelo cruzamento de linhas e colunas, saber o coeficiente que afecta o produto das incógnitas ligadas às linhas e colunas em causa; nesta tábua há repetição de coeficientes mas não omissão.

Admite-se, como segunda hipótese, que a superfície fechada representativa das anisotropias em causa, seja simétrica em relação aos eixos e aos planos coordenados de um sistema triortogonal de referência, o que implica que a sua equação da definição em relação a esse sistema apenas contenha termos pares em relação às três variáveis, ou, por outras palavras, que a equação seja uma função par; esta hipótese permite anular no quadro I os coeficientes assinalados com um ponto. Pode considerar-se válida esta hipótese desde que os volumes das amostras interessados nos ensaios sejam representativos da rocha ou do maciço rochoso, relegando para segundo plano quaisquer efeitos de escala devidos, nomeadamente, a famílias de fissuras ou diaclases insuficientemente representadas nas amostras, a zonas de amostras diferencia-

QUADRO I
tábua dos coeficientes
ou de multiplicação

	x^2	y^2	z^2	xy	xz	yz	x	y	z
x^2	+	x	e	•	•	•	•	•	•
y^2	x	+	f	•	•	•	•	•	•
z^2	e	f	+	•	•	•	•	•	•
xy	•	•	•	x	•	•	•	•	•
xz	•	•	•	•	e	•	•	•	•
yz	•	•	•	•	•	f	•	•	•
x	•	•	•	•	•	•	a	•	•
y	•	•	•	•	•	•	•	b	•
z	•	•	•	•	•	•	•	•	c

das do material e cujos volumes ou localização interfiram significativamente nos resultados, ou a falhas ou diaclases isoladas que tenham influência localizada.

A terceira hipótese considera que planos normais em relação a um dos eixos de simetria, por exemplo, o eixo OZ, cortem a superfície de anisotropia segundo elipses ou circunferências, o que leva à anulação do coeficiente do termo x^2y^2 assinalado com o sinal X. Esta hipótese tem sido verificada praticamente na totalidade dos ensaios realizados no LNEC, sendo as poucas excepções, muito provavelmente devidas a algumas das anomalias indicadas a quando da análise da hipótese anterior. Em relação a rochas sem orientações preferenciais e, presumivelmente, em relação a maciços rochosos da mesma natureza, a hipótese formulada tem-se mostrado muito satisfatória; no que se refere a rochas ou maciços rochosos com uma orientação preferencial, o eixo OZ deverá ser normal a essa orientação preferencial, segundo o qual existe normalmente a maior deformabilidade; assim, esta hipótese impõe que as anisotropias em estudo, a existirem, em planos coplanares com essa orientação, sejam do tipo elipse. Efectivamente, poder-se-ia ter considerado um tipo mais genérico de anisotropia que não obedecesse a esta hipótese, o que levaria a admitir que nos planos referidos existiria uma anisotropia regida por uma curva fechada do 4º. grau, tal como se referiu na comunicação apresentada ao 2º. Congresso da SIMR, realizado em Belgrado em 1970 [1]. A experiência colhida desde então, levou a que se pusesse de lado a consideração do seu estudo como relevante, visto a hipótese formulada se ajustar com uma satisfatória concordância.

Finalmente, a quarta e última hipótese impõe que a superfície fechada do 4º. grau, definidora das anisotropias, seja interior ao elipsóide com o qual tenha em comum os seis vértices; esta hipótese conduz à anulação dos coeficientes dos termos do 4º. grau em x, y e z, assinalados com o sinal +.

A sua aceitação traduz-se, assim, na possibilidade de considerar o elipsóide e, eventualmente, a esfera, caso da isotropia, como casos

particulares da quártica fechada a que se é conduzido.

Do que se acaba de expôr, apresenta-se a seguir em síntese as quatro hipóteses formuladas:

1 - As anisotropias em estudo são definidas por superfícies fechadas do 4º. grau, isto é, por quárticas fechadas;
2 - As quárticas fechadas são funções pares;
3 - As quárticas fechadas são cortadas segundo cónicas fechadas por planos normais a um dos seus eixos;
4 - As quárticas fechadas admitem quádricas fechadas circunscritas com as quais têm de comum os seis vértices.

A consideração simultânea destas quatro hipóteses que se acabam de enunciar, cuja aceitação foi baseada em resultados experimentais, permite, tendo em conta os coeficientes não nulos insertos no quadro I, escrever a quártica fechada representativa da superfície das anisotropias em estudo, relativamente aos seus eixos principais OXYZ, sob a forma matricial:

$$[X \quad Y] \cdot \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} + cZ^2 + [X \quad Y] \cdot \begin{bmatrix} e & 0 \\ 0 & f \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} \cdot Z^2 - 1 = 0 \qquad (2)$$

ou, sob a forma cartesiana:

$$aX^2 + bY^2 + cZ^2 + eX^2Z^2 + fY^2Z^2 - 1 = 0 \qquad (3)$$

As expressões (2) e (3) dá-se o nome de equações normais, por estarem referidas aos seus eixos principais de simetria.

2.2 Coeficientes de anisotropia

Baseado, fig. 1, nas características geométricas da quártica fechada $\{1\}$ (daqui em diante designada apenas por quártica) definidora das anisotropias em estudo, do elipsóide circunscrito $\{2\}$, e das esferas inscrita $\{3\}$ e circunscrita $\{4\}$, é possível definir quatro coefi

cientes que caracterizam bem os diversos tipos de anisotropia ligados às propriedades intrínsecas das rochas e dos maciços rochosos. Todos estes quatro coeficientes de anisotropia vão ser definidos por relações de raios das esferas $\{3\}$ e $\{4\}$ e de esferas $\{1'\}$ e $\{2'\}$ de volumes iguais, respectivamente, à quártica $\{1\}$ e ao elipsóide $\{2\}$. A razão da definição dos coeficientes de anisotropia por relação de raios e não de volumes, é a de permitir a sua aplicação ao caso do estudo de anisotropias planas. Daqui resulta a necessidade de calcular os volumes limitados pelas superfícies $\{1\}$ e $\{2\}$ da fig. 1.

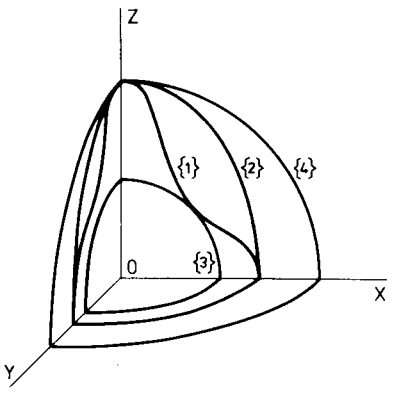

fig. 1 - superfícies que entram na definição dos coeficientes de anisotropia

A equação (3) da quártica $\{1\}$ pode ser apresentada, pondo em evidência o valor dos seus semi-eixos:

$$\frac{X^2}{\alpha^2}+\frac{Y^2}{\beta^2}+\frac{Z^2}{\gamma^2}+\frac{X^2Z^2}{\varepsilon^4}+\frac{Y^2Z^2}{\varphi^4}-1=0\ , \qquad (4)$$

semi-eixos estes que também o são do elipsóide $\{2\}$ circunscrito:

$$\frac{X^2}{\alpha^2}+\frac{Y^2}{\beta^2}+\frac{Z^2}{\gamma^2}-1=0 \qquad (5)$$

e estando os coeficientes das expressões (3) e (4) ligados pelas relações:

$$\alpha=\sqrt{\frac{1}{a}};\quad \beta=\sqrt{\frac{1}{b}};\quad \gamma=\sqrt{\frac{1}{c}};\quad \varepsilon=\sqrt[4]{\frac{1}{e}};\quad \varphi=\sqrt[4]{\frac{1}{f}} \qquad (6)$$

O volume, V_e, do elipsóide $\{2\}$ é fácil de obter, sendo dado pela expressão:

$$V_e = \frac{4}{3}\pi\alpha\beta\gamma \quad , \tag{7}$$

pelo que o raio, r_e, da esfera $\{2'\}$ de volume igual ao do elipsóide $\{2\}$ é;

$$r_e = \sqrt[3]{\alpha\beta\gamma} \quad . \tag{8}$$

Para o cálculo do volume, V_q, da quártica $\{1\}$ vai começar-se por determinar a área, $A(Z)$, da elipse genérica resultante da secção obtida por um plano horizontal de cota Z, dado que se tem:

$$V_q = 2\int_o^\gamma A(Z)dZ \quad , \tag{9}$$

da expressão (4) resulta:

$$A(Z) = \frac{\pi\alpha\beta\varepsilon^2\varphi^2}{\gamma^2} \cdot \frac{\gamma^2 - Z^2}{\sqrt{(\varepsilon^4+\alpha^2Z^2)(\varphi^4+\beta^2Z^2)}} \quad , \tag{10}$$

donde, por substituição em (II.41):

$$V_q = \frac{2\pi\alpha\beta\varepsilon^2\varphi^2}{\gamma^2} \int_o^\gamma \frac{(\gamma^2 - Z^2)dZ}{\sqrt{(\varepsilon^4+\alpha^2Z^2)(\varphi^4+\beta^2Z^2)}} \quad . \tag{11}$$

Tratando-se a fórmula (11) de um integral elíptico, de integração impossível ou muito difícil, conduzindo neste caso a expressões, em regra, complicadas e necessitando do emprego de tabelas de uso não corrente, preferiu substituir-se o integral elíptico por uma soma de n parcelas correspondentes à divisão do semi-eixo de valor γ em n intervalos iguais; para isso, fez-se:

$$\Delta Z = \frac{\gamma}{n} \; ; \quad Z = \frac{\gamma}{n}\left(\frac{1}{2} + i\right) \quad \text{com} \quad i = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1 \tag{12}$$

de forma a que as elipses genéricas existam em planos horizontais passando pelos pontos médios dos intervalos ΔZ.

A consideração de (12) em (11) permite depois das conve-

nientes operações, escrever:

$$V_q = \frac{2\pi\alpha\beta\gamma}{n^3}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{n^2-(\frac{1}{2}+i)^2}{\sqrt{\left[1+\frac{\alpha^2\gamma^2}{n^2\varepsilon^4}(\frac{1}{2}+i)^2\right]\cdot\left[1+\frac{\beta^2\gamma^2}{n^2\varphi^4}(\frac{1}{2}+i)^2\right]}} \quad , \tag{13}$$

sendo suficiente dar a n um valor compreendido entre 8 e 10 para que o valor aproximado de V_q daí resultante seja compatível com a precisão às décimas, desejada para os coeficientes de anisotropia.

Como se sabe, para que a quártica (4) degenere no elipsóide (5) deverão ser simultaneamente infinitos os coeficientes ε e φ ; assim, introduzindo essa condição em (11), ter-se-á:

$$\lim_{\varepsilon,\varphi\to\infty} V_q = \frac{2\pi\alpha\beta}{\gamma^2}\int_o^\gamma \lim_{\varepsilon,\varphi\to\infty}\frac{(\gamma^2-z^2)dz}{\sqrt{(1+\frac{\alpha^2}{\varepsilon^4}z^2)(1+\frac{\beta^2}{\varphi^4}z^2)}} =$$

$$= \frac{2\pi\alpha\beta}{\gamma^2}\int_o^\gamma(\gamma^2-z^2)dz = \frac{4}{3}\pi\alpha\beta\gamma \tag{14}$$

resultado que, como seria de esperar, é igual a (7).

A mesma condição introduzida em (13) conduz a:

$$V'_q = \lim_{\varepsilon,\varphi\to\infty} V_q = \frac{2\pi\alpha\beta\gamma}{n^3}\sum_{i=0}^{n-1}(n^2-\frac{1}{4}-i-i^2) \quad ; \tag{15}$$

dado que:

$$\sum_{i=0}^{n-1} i = \frac{(n-1)n}{2} \qquad \text{e} \qquad \sum_{i=0}^{n-1} i^2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} \tag{16}$$

vem, por substituição em (15):

$$V'_q = \frac{4}{3}\pi\alpha\beta\gamma\left[1+\frac{1}{8n^2}\right] \quad , \tag{17}$$

valor que considerando um número infinito n de intervalos, tende para:

$$\lim_{n\to\infty} V'_q = \frac{4}{3}\pi\alpha\beta\gamma$$

coincidente com o volume do elipsóide, dado por (7).

O factor de aproximação, K, devido a se tomar um número finito de intervalos, é dado por:

$$K = \frac{1}{8n^2}$$

que, como se pode ver no quadro II, tende rapidamente para zero quando n aumenta:

QUADRO II

n	2	4	6	8	10	12	∞
k	0,031250	0,007812	0,003472	0,001953	0,001250	0,000868	0

Em face do exposto, o raio, r_q, da esfera $\{1'\}$ de volume igual ao volume, V_q, da quártica $\{1\}$, é dado por:

$$r_q = \sqrt[3]{\frac{3V_q}{4\pi}} \,. \qquad (18)$$

O raio, R, da esfera circunscrita $\{4\}$ é igual ao maior dos semi-eixos da quártica $\{1\}$ e o raio, r, da esfera inscrita $\{3\}$ é, regra geral, inferior a qualquer dos eixos da quártica $\{1\}$ e obtém-se por processo gráfico ou analítico tendo em atenção que existe num dos dois planos principais de simetria passando pelo eixo OZ, por qualquer plano normal a este eixo cortar a quártica segundo elipses.

Para o processo analítico, considere-se o plano de simetria OXZ e neste a curva do 4º. grau de intersecção com a quártica (4) e a circunferência de raio r, centrada na origem, dadas pelas equações:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{\alpha^2} + \dfrac{z^2}{\gamma^2} + \dfrac{x^2 z^2}{\varepsilon^4} = 1 \\ x^2 + z^2 = r^2 \end{cases}$$

para que as duas curvas sejam tangentes entre si é necessário que o binómio discriminante da equação biquadrada, obtida pela eliminação de uma das variáveis, seja nulo. Assim, ter-se-á, eliminando a variável Z, a equação biquadrada:

$$X^4 - \varepsilon^4\left(\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\gamma^2} + \frac{r^2}{\varepsilon^4}\right)X^2 + \varepsilon^4\left(1 - \frac{r^2}{\gamma^2}\right) = 0 \ .$$

A anulação do seu binómio discriminante, Δ , conduz à equação:

$$\Delta = \varepsilon^8\left[\left(\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\gamma^2}\right) + \frac{r^2}{\varepsilon^4}\right]^2 - 4\varepsilon^4\left(1 - \frac{r^2}{\gamma^2}\right) = 0$$

que, resolvida em ordem a r, permite obter a única raiz r_1 positiva:

$$r_1 = \frac{\varepsilon^2}{\alpha\gamma}\sqrt{2\alpha\gamma\sqrt{1 + \frac{\alpha^2\gamma^2}{\varepsilon^4}} - (\alpha^2 + \gamma^2)} \qquad (19)$$

desde que seja:

$$2\alpha^2\gamma^2 > \varepsilon^2\left|\alpha^2 - \gamma^2\right| .$$

Em relação ao plano de simetria OYZ, ter-se-á, por analogia:

$$r_2 = \frac{\varphi^2}{\beta\gamma}\sqrt{2\beta\gamma\sqrt{1 + \frac{\beta^2\gamma^2}{\varphi^4}} - (\beta^2 + \gamma^2)} \qquad (20)$$

desde que seja:

$$2\beta^2\gamma^2 > \varphi^2\left|\beta^2 - \gamma^2\right| .$$

O valor de r procurado será o menor dos valores r_1 e r_2, quando existam; caso contrário, será o menor dos três semi-eixos da quártica.

Com base nos quatro raios das esferas indicadas, passam-se a definir os quatro coeficientes de anisotropia:

1 - coeficiente de anisotropia de massa, a_m:

$$a_m = \frac{R}{r_e} \qquad (21)$$

relação entre os raios da esfera $\{4\}$ circunscrita à quártica $\{1\}$, igual ao maior dos semi-eixos desta, e o raio de esfera $\{2'\}$ de volume igual ao do elipsóide $\{2\}$, dado por (8). Se se considerar, por exemplo, α, como o maior dos semi-eixos, a expressão (21), tendo em atenção (8), assumirá o aspecto:

$$a_m = \sqrt[3]{\frac{\alpha^2}{\beta\gamma}} \tag{22}$$

pelo que se pode afirmar que o coeficiente de anisotropia de massa é igual à raiz cúbica do cociente do quadrado do maior dos semi-eixos pelo produto dos outros dois. A designação deste coeficiente é devido ao facto de representar a diminuição média de uma dada propriedade relativamente ao material isotrópico de valor igual ao máximo apresentado por essa propriedade, semi-eixo maior do elipsóide.

2 - coeficiente de anisotropia de superfície, a_s:

$$a_s = \frac{r_e}{r_q} \tag{23}$$

relação entre os raios das esferas $\{2'\}$ e $\{1'\}$ de volumes iguais aos do elipsóide $\{2\}$ e quártica $\{1\}$, raios estes dados pelas expressões (8) e (18), respectivamente. Este coeficiente dá a influência, na anisotropia de uma certa propriedade, da existência de uma orientação preferencial, traduzida por um achatamento do elipsóide $\{2\}$ que se converte na quártica $\{1\}$.

É evidente que a não existência de um dado tipo de anisotropia, torna o coeficiente que lhe está associado igual à unidade.

3 - coeficiente de anisotropia total, a_t:

$$a_t = \frac{R}{r_q} \tag{24}$$

relação entre os raios da esfera $\{4\}$ circunscrita e da esfera $\{1'\}$ de volume igual ao da quártica $\{1\}$. Este coeficiente traduz a influência conjunta das anisotropias de massa e de superfície, pois atendendo às

expressões (21) e (23), a expressão (24) pode escrever-se:

$$a_t = a_m \cdot a_s . \tag{25}$$

4 - coeficiente de anisotropia máxima, a_M:

$$a_M = \frac{R}{r} \tag{26}$$

relação entre os raios das esferas circunscrita $\{4\}$ e inscrita $\{3\}$. Este coeficiente, como o nome indica, traduz a relação entre os valores máximos e mínimos de uma dada propriedade e dá uma ideia da diminuição máxima dessa mesma propriedade.

Pelo que se acaba de expôr se vê que num material isotrópico, relativamente a uma dada propriedade, as quatro superfícies da fig. 1 se reduzem a uma mesma esfera, pelo que os quatro coeficientes de anisotropia se tornam iguais à unidade.

Com a definição destes quatro coeficientes de anisotropia pretende-se não só explicar os diferentes tipos de anisotropia ligados às características específicas das rochas e dos maciços rochosos, mas também quantificá-los.

No que segue, todos os cálculos indicados são realizados utilizando o computador do LNEC mediante programas preparados para o efeito.

2.3 Aplicação a rochas e a maciços rochosos preferencialmente orientados

As rochas e os maciços rochosos preferencialmente orientados, possuem, na grande maioria dos casos, uma orientação relevante que lhes confere uma anisotropia de superfície de marcada importância. Se as orientações preferenciais forem duas, então, um dos eixos de simetria, o eixo OY por exemplo, será a direcção definida pela intersecção das duas orientações, admitindo-se que os planos onde se desenvolvem as anisotropias tipo elipse ou circunferência sejam planos que se aproximarão mais da orientação de maior influência na propriedade em em estudo, só sendo estes os planos bissectores quando a influência

das duas orientações for a mesma. Com mais de duas orientações preferenciais, em regra, estas tendem para o aparecimento duma certa ortogonalidade entre algumas, o que vem diminuir a complexidade da anisotropia, a qual passará a exibir mais acentuadamente uma anisotropia de massa, evanescendo-se rapidamente a anisotropia de superfície.

Serão, assim, considerados dois casos, o primeiro correspondente às rochas e maciços rochosos apresentando uma orientação preferencial e o segundo apresentando duas orientações preferenciais, situação esta já bastante rara em relação ao primeiro caso.

2.3.1 Com uma orientação preferencial

Este será o caso mais comum em rochas e maciços rochosos de origem sedimentar e metamórfica.

Considere-se a equação matricial (2) definidora da quártica de anisotropia e faça-se:

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} = [A], \qquad \begin{bmatrix} e & 0 \\ 0 & f \end{bmatrix} = [E], \qquad \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} = \{V\}, \tag{27}$$

donde resulta por substituição a forma abreviada:

$$\{V\}^T . [A] . \{V\} + cZ^2 + \{V\}^T . [E] . \{V\} Z^2 - 1 = 0 \tag{28}$$

sendo, como se sabe, $\{V\}^T$ a matriz-linha transposta da matriz-coluna $\{V\}$.

Dado que inicialmente apenas é conhecido o eixo OZ da quártica (28), convém conhecer a sua equação num referencial triortogonal Oxyz, cuja posição relativamente ao definido pelos eixos principais da quártica, OXYZ, é dada por uma das matrizes de rotação, [R] ou [R']

$$\begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} . \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 0 \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \tag{29}$$

sendo θ o ângulo de que rodou, em torno do eixo OZ, o referencial plano OXY em relação ao referencial Oxy, fig. 2. Em forma abreviada, a primeira das expressões (29), pode escrever-se:

$$\{V\} = [R] \cdot \{v\} \tag{30}$$

que substituída em (28), conduz à seguinte expressão:

$$\{v\}^T \cdot [A_1] \cdot \{v\} + cz^2 + \{v\}^T \cdot [E_1] \cdot \{v\} z^2 - 1 = 0 \tag{31}$$

sendo:

$$[A_1] = [R]^T \cdot [A] \cdot [R] \quad \text{e} \quad [E_1] = [R]^T \cdot [E] \cdot [R] \tag{32}$$

A substituição em (32) de (27) e da primeira expressão de (29) permite obter os elementos das duas matrizes simétricas:

$$\begin{aligned} [A_1] &= \begin{bmatrix} a\cos^2\theta + b\,\mathrm{sen}^2\theta & \frac{a-b}{2}\,\mathrm{sen}\,2\theta \\ \frac{a-b}{2}\,\mathrm{sen}\,2\theta & a\,\mathrm{sen}^2\theta + b\cos^2\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & D \\ D & B \end{bmatrix} \\ [E_1] &= \begin{bmatrix} e\cos^2\theta + f\,\mathrm{sen}^2\theta & \frac{e-f}{2}\,\mathrm{sen}\,2\theta \\ \frac{e-f}{2}\,\mathrm{sen}\,2\theta & e\,\mathrm{sen}^2\theta + f\cos^2\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & G \\ G & F \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{33}$$

Estas matrizes substituídas em (31), permitem escrever a equação da quártica no referencial Oxyz, sob a forma cartesiana:

$$Ax^2 + 2Dxy + By^2 + cz^2 + Ex^2z^2 + 2Gxyz^2 + Fy^2z^2 - 1 = 0 \tag{34}$$

ou, sob a forma matricial, parcialmente abreviada:

$$[x\ y] \cdot \begin{bmatrix} A & D \\ D & B \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} + cz^2 + [x\ y] \cdot \begin{bmatrix} E & G \\ G & F \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} \cdot z^2 - 1 = 0 \ . \tag{35}$$

Estas duas expressões contêm, após a rotação θ em torno do eixo OZ, mais dois termos, um em xy e outro em xyz^2, relativa

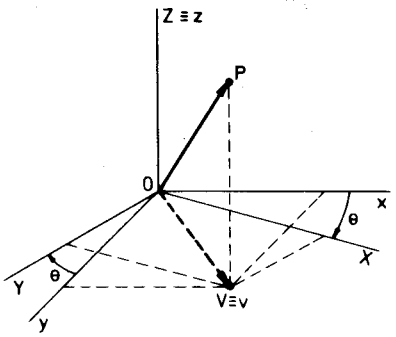

fig.2- posição relativa dos dois referenciais

mente às expressões iniciais (2) e (3) definidoras da superfície de anisotropia. Os coeficientes D e G destes dois termos não são independentes entre si, encontrando-se ligados por uma relação não linear entre os coeficientes das expressões a que pertencem, pois que da análise das expressões (33) se tira:

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2D}{A-B} = \frac{2G}{E-F} \quad , \qquad (36)$$

e portanto:

$$D(E-F) = G(A-B) \, . \qquad (37)$$

Verifica-se também existir um comportamento análogo entre os ternos de valores A, B e D e E, F e G. Ainda das expressões (33) resultam, entre outras, as relações:

$$A + B = a + b \quad , \quad E + F = e + f, \qquad (38)$$

o que mostra serem constantes as somas dos coeficientes dos termos em x^2 e y^2, por um lado, e em x^2z^2 e y^2z^2, por outro.

Para a determinação dos valores mais prováveis dos coeficientes das expressões (34) e (35) a partir do conhecimento dos valores da propriedade em estudo em várias direcções, nunca inferiores a sete, poderia ser utilizado o método estatístico denominado método dos mínimos quadrados, que, dada a obrigatoriedade da relação (37), deveria ser condicionado. Este método dos mínimos quadrados condicionados, para optimização dos valores dos coeficientes, iria conduzir a um sistema de 6 equações a 6 incógnitas, tantas quantas as independentes, sistema este necessariamente não linear, em face da não linearidade de expressão (37). Este facto torna o método extraordinariamente complicado, se não mesmo impossível de resolver por processos analíticos.

Em sua substituição, preferiu-se decompor a determinação estatística dos coeficientes em duas fases.

Na primeira fase, e baseado na hipótese 3 (ver 2.2) de que a quártica é cortada por uma elipse segundo planos normais ao eixo OZ, comum aos dois referenciais, fig. 2, far-se-á, na expressão (34), $z = 0$, donde:

$$Ax^2 + 2Dxy + By^2 - 1 = 0 \qquad (39)$$

sendo apenas necessário para a determinação dos coeficientes A, D e B, pelo método dos mínimos quadrados, que existam determinações da propriedade em estudo, pelo menos, em quatro direcções num plano normal ao eixo OZ. Seja n, o número dessas determinações, com $n \geqslant 4$, o desvio, δ_i, entre o valor teórico (39) e o valor resultante da determinação da ordem i de coordenadas (x_i, y_i), será:

$$\delta_i = Ax_i^2 + 2Dx_iy_i + By_i^2 - 1 \quad ; \qquad (40)$$

o método dos mínimos quadrados impõe que sejam nulas as derivadas parciais da soma dos quadrados dos desvios, K, em relação a cada um dos coeficientes, pelo que, sendo:

$$K = \sum_{i=1}^{n} \delta_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (Ax_i^2 + 2Dx_iy_i + By_i^2 - 1)^2 , \qquad (41)$$

o sistema de equações lineares resultante da aplicação do método, é:

$$\begin{bmatrix} \sum x_i^4 & \sum x_i^3 y_i & \sum x_i^2 y_i^2 \\ \sum x_i^3 y_i & \sum x_i^2 y_i^2 & \sum x_i y_i^3 \\ \sum x_i^2 y_i^2 & \sum x_i y_i^3 & \sum y_i^4 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} A \\ 2D \\ B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum x_i^2 \\ \sum x_i y_i \\ \sum y_i^2 \end{Bmatrix} \qquad (42)$$

onde $\sum_{i=1}^{n}$ estão indicados abreviadamente por $\sum$.

Resolvido o sistema (42), determina-se o ângulo θ por meio da expressão (36) e os coeficientes a e b da equação normal (3),

por meio das expressões obtidas de (33):

$$\begin{cases} a = A\cos^2\theta + B\,\mathrm{sen}^2\theta + D\,\mathrm{sen}\,2\theta \\ b = A\,\mathrm{sen}^2\theta + B\cos^2\theta - D\,\mathrm{sen}\,2\theta \end{cases} . \qquad (43)$$

Para terminar esta primeira fase, passam-se todas as coordenadas cartesianas (x, y, z) dos n valores determinados para a propriedade em estudo, para as novas coordenadas cartesianas (X, Y, Z) relativas ao referencial principal, mediante a transformação linear, tipo rotação, dada por uma das expressões (29), por ser z = Z.

Na segunda fase, os coeficientes c, e e f da equação normal (2) vão ser determinados aplicando o método dos mínimos quadrados à equação:

$$cZ^2 + eX^2Z^2 + fY^2Z^2 + (aX^2 + bY^2 - 1) = 0 \qquad (44)$$

onde já são conhecidos os coeficientes a e b determinados na primeira fase. Assim, ter-se-á, para desvio δ_i:

$$\delta_i = cZ_i^2 + eX_i^2Z_i^2 + fY_i^2Z_i^2 + (aX_i^2 + bY_i^2 - 1) \qquad (45)$$

sendo K, dado por:

$$K = \sum_{i=1}^{n} \delta_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \left[cZ_i^2 + eX_i^2Z_i^2 + fY_i^2Z_i^2 + (aX_i^2 + bY_i^2 - 1) \right]^2 \qquad (46)$$

e o sistema de equações lineares resultante, é:

$$\begin{bmatrix} \Sigma Z_i^4 & \Sigma X_i^2 Z_i^4 & \Sigma Y_i^2 Z_i^4 \\ \Sigma X_i^2 Z_i^4 & \Sigma X_i^4 Z_i^4 & \Sigma X_i^2 Y_i^2 Z_i^4 \\ \Sigma Y_i^2 Z_i^4 & \Sigma X_i^2 Y_i^2 Z_i^4 & \Sigma Y_i^4 Z_i^4 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} c \\ e \\ f \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma Z_i^2 - a\Sigma X_i^2 Z_i^2 - b\Sigma Y_i^2 Z_i^2 \\ \Sigma X_i^2 Z_i^2 - a\Sigma X_i^4 Z_i^2 - b\Sigma X_i^2 Y_i^2 Z_i^2 \\ \Sigma Y_i^2 Z_i^2 - a\Sigma X_i^2 Y_i^2 Z_i^2 - b\Sigma Y_i^4 Z_i^2 \end{bmatrix} \qquad (47)$$

com o qual se obtêm, finalmente, os restantes coeficientes da equação normal (3) da quártica definidora da anisotropia da propriedade em

estudo, ou, tendo em atenção (6), na forma (4) com explicitação dos semi-eixos. A avaliação do ajustamento entre os valores experimentais, e_i, e os correspondentes valores teóricos, t_i, dados por (3) ou (4), faz-se determinando um coeficiente, dito de variação, dado pela expressão:

$$\delta = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{t_i - e_i}{t_i} \right)^2}{n-1}} \qquad (48)$$

e cujo valor se considera aceitável desde que não ultrapasse 15 %, em face da precisão dos aparelhos de medição e da heterogeneidade dos materiais.

Para a determinação dos valores teóricos, t, correspondentes às diversas direcções de ensaio, é conveniente utilizar coordenadas esféricas, por serem já conhecidas as duas coordenadas que definem essas direcções, fig. 3, estando estas ligadas com as coordenadas cartesianas (X, Y, Z) do referencial principal pelas expressões:

$$\begin{aligned} X &= t \cos\varphi \cos\psi \\ Y &= t \cos\varphi \operatorname{sen}\psi \\ Z &= t \operatorname{sen}\varphi \end{aligned} \qquad (49)$$

A substituição de (49) em (3) e consequentes operações e ordenamento, conduz à seguinte equação biquadrada:

$$\begin{aligned} & t^4 (e \cos^2\psi + f \operatorname{sen}^2\psi) \operatorname{sen}^2\varphi \cos^2\varphi + \\ & + t^2 [(a \cos^2\psi + b \operatorname{sen}^2\psi - c) \cos^2\varphi + c] - 1 = 0 \end{aligned} \qquad (50)$$

que, depois de resolvida, permite obter o valor teórico, t, da propriedade em estudo, para cada direcção ensaiada. Esta mesma equação define em coordenadas esféricas (t, φ, ψ), a quártica (3) representativa da anisotropia em estudo.

Deve salientar-se que, se os valores dos coeficientes e e f comparados com os valores dos coeficientes a, b e c, dados por (43)

e (47), forem significativamente pequenos, isso quer dizer que a quártica é formalmente equivalente ao seu elipsóide circunscrito, podendo este, com erro adicional desprezável, definir a anisotropia em estudo. Este facto pode dar-se em materiais rochosos com uma orientação preferencial em que a sua influência na anisotropia em estudo não seja relevante.

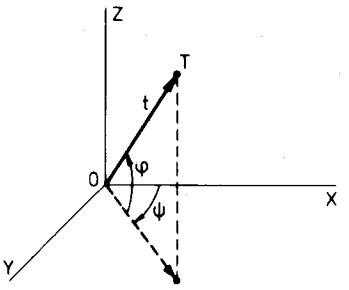

fig. 3 - coordenadas esféricas

Para melhor compreensão do que se acaba de expôr, vai apresentar-se um exemplo concreto do estudo da anisotropia das tensões de rotura, por compressão uniaxial, de um bloco de rocha xistosa, extraído da galeria 2 da margem direita da ribeira de Arade, no local da fundação da barragem do Funcho. Desse bloco de rocha foram extraídos doze provetes de forma prismática, geralmente com 4x4x12 cm^3, segundo as direcções indicadas na fig. 4, com os eixos existentes nos três planos de referência.

Os ensaios de compressão uniaxial até à rotura, realizados sobre os provetes referidos, conduziram às tensões indicadas na segunda coluna do quadro III, encontrando-se nas três colunas seguintes as coordenadas dessas tensões no referencial inicial Oxyz. Com base nas coordenadas referentes às direcções 5 a 9 inclusivé, existentes no plano Oxy, calcularam-se

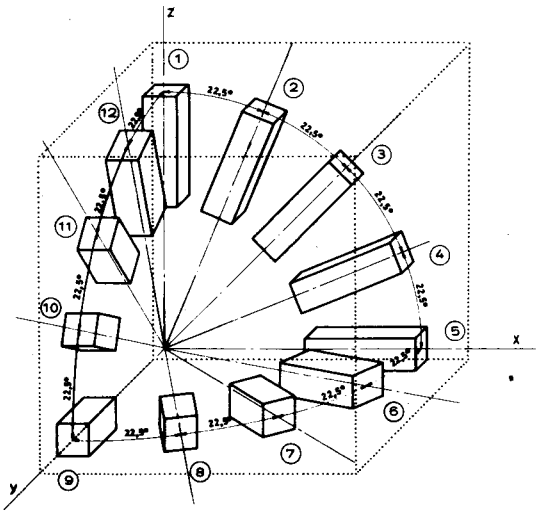

fig. 4 - esquema de extracção de provetes

os somatórios insertos no sistema de equações lineares (42), elementos da matriz dos coeficientes e da matriz-coluna dos termos independentes, e finalmente, pela resolução do sistema, os valores mais prováveis dos coeficientes A, B e D, por intermédio de programas adequados ao computador do LNEC.

QUADRO III

valores experimentais (kg/cm^2)

direcção	tensão de rotura σ_r	coordenadas					
		referencial Oxyz			referencial OXYZ		
		x	y	z	X	Y	Z
1=Oz	605	0	0	605	0	0	605
2	225	86	0	208	85	12	208
3	150	106	0	106	105	15	106
4	190	176	0	73	174	24	73
5=Ox	265	265	0	0	262	37	0
6	315	291	120	0	271	160	0
7	365	258	258	0	220	292	0
8	440	168	406	0	110	426	0
9=Oy	475	0	475	0	66	470	0
10	250	0	231	96	32	229	96
11	190	0	124	124	19	146	134
12	270	0	103	249	14	102	249

Os valores mais prováveis obtidos, expressos em cm^4/kg^2, foram os seguintes:

$$A = 130,1612 \times 10^{-7}$$
$$B = 45,5749 \times 10^{-7} \qquad (51)$$
$$D = -12,2551 \times 10^{-7}.$$

Tendo em atenção estes valores e a expressão (36), calculou-se o ângulo θ de rotação indicado na fig. 2, donde:

$$\theta = -8^{\circ} \qquad (52)$$

Este ângulo e a matriz [R] da primeira expressão de (29) permitiram obter as coordenadas cartesianas das tensões de rotura, referentes às doze direcções ensaiadas, no referencial principal OXYZ, as quais se encontram inscritas nas três últimas colunas do quadro III.

Os valores mais prováveis, indicados em (51) e (52), substituídos nas fórmulas (43) conduzem à determinação dos coeficientes mais prováveis a e b da elipse, definidora da anisotropia das tensões

de rotura por compressão uniaxial, existente num plano coplanar com a orientação preferencial, no caso em estudo a xistosidade, tendo-se:

$$\begin{aligned} a &= 131,9008 \times 10^{-7}\ cm^4/kg^2 \\ b &= 43,8353 \times 10^{-7}\ cm^4/kg^2\ , \end{aligned} \tag{53}$$

e com o auxílio das duas primeiras fórmulas de (6), os correspondentes valores mais prováveis dos semi-eixos:

$$\begin{aligned} \alpha &= 275\ kg/cm^2; \\ \beta &= 478\ kg/cm^2. \end{aligned} \tag{54}$$

Em seguida, com os valores das coordenadas no referencial OXYZ, inscritos no quadro III, calculam-se os somatórios correspondentes aos elementos da matriz dos coeficientes e da matriz-coluna dos termos independentes do sistema de equações lineares, expressão (47), o qual resolvido dá os valores mais prováveis dos coeficientes c, e e f, que são:

$$\begin{aligned} c &= 26,5965 \times 10^{-7}\ cm^4/kg^2 \\ e &= 31,536980 \times 10^{-10}\ cm^8/kg^4 \\ f &= 14,178173 \times 10^{-10}\ cm^8/kg^4\ , \end{aligned} \tag{55}$$

os quais, substituídos nas três últimas expressões de (6) dão os valores mais prováveis do semi-eixo γ e dos coeficientes ε e φ, em kg/cm^2:

$$\gamma = 613 \quad ; \quad \varepsilon = 133 \quad ; \quad \varphi = 163 \tag{56}$$

o que, conjuntamente com (54), permite escrever a equação normal da quártica mais provável, com as coordenadas expressas em kg/cm^2:

$$\frac{X^2}{275^2} + \frac{Y^2}{478^2} + \frac{Z^2}{613^2} + \frac{X^2Z^2}{133^4} + \frac{Y^2Z^2}{163^4} = 1. \tag{57}$$

Com base nos coeficientes dados por (53) e (55) e a partir

da expressão (50) determinam-se os valores teóricos das tensões de rotura correspondentes às direcções do ensaio ψ e φ no referencial principal OXYZ, e que se apresentam na segunda coluna do quadro IV. A partir destes valores, e tendo em consideração os ângulos insertos na fig. 4, calculam-se as suas coordenadas cartesianas no referencial inicial Oxyz, e também as suas coordenadas cartesianas no referencial principal OXYZ, baseado em (49) e tendo em atenção, o ângulo θ dado por (52). Todas estas coordenadas se encontram inscritas no quadro IV, e permitem traçar as curvas de intersecção da quártica (57) com os planos coordenados do referencial inicial Oxyz.

QUADRO IV
valores teóricos (kg/cm^2)

direcção	tensão de rotura σ_r	coordenadas					
		referencial O xyz			referencial OXYZ		
		x	y	z	X	Y	Z
1≡Oz	613	0	0	613	0	0	613
2	216	83	0	200	82	12	200
3	178	126	0	126	125	18	126
4	197	182	0	75	180	25	75
5≡Ox	277	277	0	0	274	39	0
6	303	280	116	0	261	154	0
7	364	257	257	0	219	291	0
8	451	173	417	0	113	437	0
9≡Oy	469	0	469	0	65	464	0
10	252	0	233	96	32	231	96
11	218	0	154	154	21	153	154
12	258	0	99	238	14	98	238

Para determinar as curvas, intersecções da quártica (57) com os planos coordenados do referencial principal OXYZ, calculam-se as coordenadas de diversos pontos dessas curvas, a partir das expressões (49) e (50) para diversas combinações adequadas de valores dos ângulos φ e ψ. Estas coordenadas encontram-se inscritas no quadro V calculadas nos dois referenciais, para os planos coordenados principais XOZ e YOZ; indicam-se, também, os valores dos ângulos φ e ψ utilizados. Em relação ao plano coordenado principal XOY não é necessário efectuar este cálculo, por coincidir com o plano coordenado xOy, do referencial inicial, e já estar definido no quadro IV a sua intersecção elíptica com a quártica.

QUADRO V

valores teóricos nos planos principais (kg/cm^2)

φ (°)	plano XOZ $\psi=0°$ Y=0					plano YOZ $\psi=90°$ X=0				
	σ_r	coordenadas				σ_r	coordenadas			
		X	Z≡z	x	y		Y	Z≡z	x	y
0	275	275	0	272	-38	478	478	0	66	473
10	237	233	41	231	-32	334	329	58	46	326
20	202	190	69	188	-26	263	247	90	34	244
30	184	159	92	157	-22	233	202	116	28	200
40	178	136	114	135	-19	221	169	142	24	167
50	181	116	139	115	-16	222	143	170	20	142
60	194	97	168	96	-13	236	118	204	16	117
70	226	77	212	76	-11	271	93	255	13	92
80	302	52	297	51	-7	354	61	349	8	60
90	613	0	613	0	0	613	0	613	0	0

Tendo em consideração as coordenadas inseridas nos quadros III, IV e V, é possível representar a quártica mais provável (57), em perspectiva cavaleira, por meio das suas intersecções com os planos coordenados, dos dois referenciais utilizados, e também os valores experimentais, para uma visualização de conjunto, fig. 5.

As curvas de intersecção da quártica com os planos coordenados verticais do referencial principal estão representados a ponteado, com os planos coordenados do referencial inicial a tracejado, estando a cheio a parte correspondente ao 1º. octante; os valores experimentais encontram-se identificados pelo seu número de ordem e representados por um círculo preto. Nesta mesma figura encontram-se indicadas as escalas dos três eixos utilizados na perspectiva cavaleira, referencial inicial, em que se admitiu uma escala para o eixo Oy igual a metade das dos eixos Ox e Oz.

Para determinar os coeficientes de anisotropia é necessário, primeiro, calcular o volume da quártica (57) dado pela fórmula aproximada (13), cujo erro diminuirá com o aumento do parâmetro n. Assim,

tendo em atenção os valores dados por (54) e (56) calcularam-se, para diversos valores do parâmetro n, os correspondentes valores do volume aproximado, V_q, da quártica (57), os quais se encontram inscritos no quadro VI. Neste mesmo quadro indicam-se na última linha os desvios relativos, em percentagem, em relação ao volume V_q, para n igual a 12, suposto exacto. Vê-se, assim, que os valores de n propostos em 2.2, compreendidos entre 8 e 10, acarretam já erros desprezáveis no exemplo apresentado, em face da precisão às décimas com que os coeficientes de anisotropia se desejam calculados.

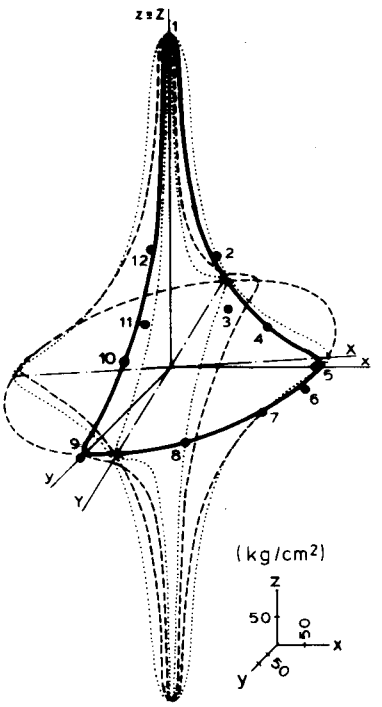

fig 5- quártica mais provável e valores experimentais das tensões de rotura

Com base no valor de $V_q = 68,4 \times 10^6$ kg^3/cm^6, nos valores dos semi-eixos α, β e γ indicados em (54) e (56), nas expressões (8), (18), (21), (23), (25), e (26), e na fig. 5 ou nas expressões (19) e (20) para a obtenção do valor de r, calculam-se os quatro valores dos coeficientes de anisotropia:

QUADRO VI

n	2	4	6	8	10	12
V_q (10^6 kg^3/cm^6)	33,2	56,1	64,6	67,5	68,2	68,4
Δ (%)	51,5	18,0	5,6	1,3	0,3	0

$$a_m = 1,4; \qquad a_s = 1,7;$$
$$a_t = 2,4; \qquad a_M = 3,4. \tag{58}$$

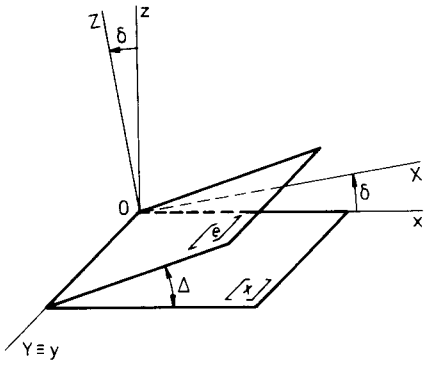

fig.6-posição relativa dos dois referenciais

O coeficiente de variação, δ, definido pela expressão (48), tendo em atenção os valores experimentais e teóricos insertos nos quadros III e IV, correspondentes às doze direcções ensaiadas, tem o valor de:

$$\delta = 6,8\ \% \tag{59}$$

inferior, portanto, ao valor de 15 % considerado como limite superior.

2.3.2 Com duas orientações preferenciais

Este caso, não muito comum, pode aparecer quando em rochas metamórficas a xistosidade e a estratificação não coincidam e ambas apresentem uma acentuada relevância. Certos autores sugerem que os planos bissectores dos planos da xistosidade e da estratificação sejam tomados como planos de simetria; tal facto só será de aceitar desde que a influência das duas orientações em causa seja a mesma, o que, em regra, não será verdade. O que será de admitir é que a intersecção dos planos das duas orientações seja um eixo de simetria, por exemplo, o eixo OY, fig. 6; nesta figura encontram-se indicados os dois referenciais, o de referência (Oxyz) conhecido e o principal (OXYZ) que se pretende determinar, sabendo-se que se passa de um para o outro por uma rotação de valor em torno do eixo Oy, dada pela matriz rotação:

$$\begin{Bmatrix} X \\ Z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\delta & \operatorname{sen}\delta \\ -\operatorname{sen}\delta & \cos\delta \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x \\ z \end{Bmatrix} \tag{60}$$

fazendo o plano da xistosidade [x] com o plano da estratificação [e] o ângulo Δ.

A anisotropia no plano OXZ será obtida anulando Y na expressão (3), donde:

$$aX^2 + cZ^2 + eX^2Z^2 - 1 = 0 . \qquad (61)$$

Esta expressão no referencial (Oxyz), tendo em atenção a matriz rotação (60), toma a forma:

$$Lx^2 + Mz^2 + Nxz + P(x^4 + z^4) + Q(xz^3 - x^3z) + Rx^2z^2 - 1 = 0 , \qquad (62)$$

sendo:

$$\begin{aligned} L &= a\cos^2\delta + c\,\mathrm{sen}^2\delta & P &= e\,\mathrm{sen}^2\delta\cos^2\delta \\ M &= a\,\mathrm{sen}^2\delta + c\cos^2\delta & Q &= e\,\mathrm{sen}\,2\delta\cos 2\delta \\ N &= (a-c)\,\mathrm{sen}\,2\delta & R &= e(\mathrm{sen}^4\delta + \cos^4\delta - \mathrm{sen}^2 2\delta) . \end{aligned} \qquad (63)$$

Destes seis coeficientes, apenas quatro são independentes, havendo, por isso, duas relações não lineares entre eles, dadas pelas equações:

$$\begin{aligned} Q^2 &= 4P(2P + R) \\ \frac{Q}{R + 2P} &= \frac{N}{L-M} = \mathrm{tg}\,2\delta . \end{aligned} \qquad (64)$$

A não linearidade das expressões (64) torna, como já se disse em 2.3.1, praticamente impossível a aplicação do método dos mínimos quadrados condicionados, pelo que se deverá seguir outra via para a obtenção da quártica mais provável de anisotropia.

A hipótese 4 formulada em 2.1 permite afirmar que o plano Oxz é um plano de simetria, fig. 6, e os eixos da curva do 4º. grau dada pela expressão (62) e os eixos da elipse mais provável determinada a partir de pontos dessa curva, são os mesmos, dado que esta elipse e a elipse circunscrita à curva em questão são coaxiais. Assim, para a determinação do ângulo δ, basta apenas que no plano Oxz te-

nham sido obtidos, pelo menos, três valores da propriedade em estudo; na prática convém, pelo menos cinco, com igual afastamento angular.

No referencial Oxz, a equação da elipse procurada é:

$$L'x^2 + M'z^2 + N'xz - 1 = 0 \qquad (65)$$

sendo os desvios, δ_i, entre os valores teóricos (65) e os medidos, dados por:

$$\delta_i = L'x_i^2 + M'z_i^2 + N'x_iz_i - 1 \qquad (66)$$

A aplicação do método dos mínimos quadrados, conduz ao sistema de equações lineares:

$$\begin{bmatrix} \sum x_i^4 & \sum x_i^2 z_i^2 & \sum x_i^3 z_i \\ \sum x_i^2 z_i^2 & \sum z_i^4 & \sum x_i z_i^3 \\ \sum x_i^3 z_i & \sum x_i z_i^3 & \sum x_i^2 z_i^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} L \\ M \\ N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum x_i^2 \\ \sum z_i^2 \\ \sum x_i z_i \end{Bmatrix} \qquad (67)$$

que, depois de resolvido, permite calcular o ângulo δ, pela expressão conhecida:

$$\operatorname{tg} 2\delta = \frac{N'}{L'-M'}, \qquad (68)$$

e já referida em (64).

A partir de δ e da matriz rotação (60), passam-se para o referencial principal as coordenadas (x, y, z) de todos os valores medidos da propriedade em estudo, obtendo-se as novas coordenadas (X, Y, Z), que deverão obedecer, àparte os desvios δ_i, à equação da quártica dada pela expressão (3).

A aplicação do método dos mínimos quadrados aos desvios δ_i, dados por:

$$\delta_i = aX_i^2 + bY_i^2 + cZ_i^2 + eX_i^2Z_i^2 + f_i^2Y_i^2Z_i^2 - 1 \qquad (69)$$

conduz ao sistema de equações lineares:

$$\begin{bmatrix} \Sigma x_i^4 & \Sigma x_i^2 y_i^2 & \Sigma x_i^2 z_i^2 & \Sigma x_i^4 z_i^2 & \Sigma x_i^2 y_i^2 z_i^2 \\ \Sigma x_i^2 y_i^2 & \Sigma y_i^4 & \Sigma y_i^2 z_i^2 & \Sigma x_i^2 y_i^2 z_i^2 & \Sigma y_i^4 z_i^2 \\ \Sigma x_i^2 z_i^2 & \Sigma y_i^2 z_i^2 & \Sigma z_i^4 & \Sigma x_i^2 z_i^4 & \Sigma y_i^2 z_i^4 \\ \Sigma x_i^4 z_i^2 & \Sigma x_i^2 y_i^2 z_i^2 & \Sigma x_i^2 z_i^4 & \Sigma x_i^4 z_i^4 & \Sigma x_i^2 y_i^2 z_i^4 \\ \Sigma x_i^2 y_i^2 z_i^2 & \Sigma y_i^4 z_i^2 & \Sigma y_i^2 z_i^4 & \Sigma x_i^2 y_i^2 z_i^4 & \Sigma y_i^4 z_i^4 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \\ e \\ f \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Sigma x_i^2 \\ \Sigma y_i^2 \\ \Sigma z_i^2 \\ \Sigma x_i^2 z_i^2 \\ \Sigma y_i^2 z_i^2 \end{Bmatrix} \qquad (70)$$

que, depois de resolvido, permite escrever a equação da quártica mais provável definidora da anisotropia em estudo.

Em resumo, podem sintetizar-se os passos necessários à obtenção da equação da superfície de anisotropia de um material rochoso com duas orientações preferenciais:

1 - Determinação de valores da propriedade em estudo em, pelo menos, cinco direcções existentes no plano normal ao das duas orientações preferenciais, e, pelo menos, em mais sete direcções não coplanares quatro a quatro;

2 - Determinação, pelo método dos mínimos quadrados, dos eixos da elipse existente no plano normal já referido, suposta coaxial com a curva do 4º. grau definidora da anisotropia nesse plano, os quais permitem obter o referencial principal OXYZ;

3 - Passagem das coordenadas (x, y, z) dos valores da propriedade para as novas coordenadas (X, Y, Z);

4 - Aplicação do método dos mínimos quadrados à determinação dos valores mais prováveis dos cinco coeficientes da quártica definidora da anisotropia.

2.4 - Aplicação a rochas e a maciços rochosos sem orientações preferenciais

As rochas e os maciços rochosos sem orientações preferenciais possuem, na totalidade dos casos estudados, uma anisotropia espacial bem definida por uma lei tipo elipsóide, que, como se sabe, se pode

considerar como caso particular ou de degenerescência da lei tipo quártica fechada.

A equação do elipsóide em relação ao referencial principal (OXYZ) obtém-se, anulando os coeficientes e e f em (3), donde:

$$aX^2 + bY^2 + cZ^2 - 1 = 0$$

ou, na forma matricial, desenvolvida:

$$\begin{bmatrix} X & Y & Z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} - 1 = 0 \qquad (71)$$

e abreviada:

$$\{V\}^T \cdot [A] \cdot \{V\} - 1 = 0 \ . \qquad (72)$$

Dado o desconhecimento do referencial principal (OXYZ), os valores experimentais são inicialmente determinados em relação a um outro referencial (Oxyz), relacionado com o principal por meio duma transformação linear tipo rotação, dada pela matriz [S]:

$$\begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_{11} & \cos\theta_{12} & \cos\theta_{13} \\ \cos\theta_{21} & \cos\theta_{22} & \cos\theta_{23} \\ \cos\theta_{31} & \cos\theta_{32} & \cos\theta_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \qquad (73)$$

ou, em forma abreviada:

$$\{V\} = [S] \cdot \{v\} \ , \qquad (74)$$

sendo $\cos\theta_{ij}$ os co-senos directores dos novos eixos em relação aos iniciais, e que, como se sabe, gozam das duas propriedades: a soma

dos quadrados dos elementos de uma fila (linha ou coluna) é igual à unidade e a soma dos produtos dos elementos homólogos de duas filas (linhas ou colunas) paralelas é nula. Estas duas propriedades permitem afirmar que a matriz [S] é ortogonal, sendo portanto a sua inversa igual à transposta, isto é:

$$[S]^{-1} = [S]^{T} . \tag{75}$$

Atendendo às propriedades das matrizes transpostas, de (74) vem:

$$\{v\}^{T} = \{v\}^{T} . [S]^{T} , \tag{76}$$

a consideração de (74) e (76) em (72) conduz a:

$$\{v\}^{T} . [S]^{T} . [A] . [S] . \{v\} - 1 = 0 ,$$

ou:

$$\{v\}^{T} . [A_1] . \{v\} - = 0 , \tag{77}$$

fazendo:

$$[A_1] = [S]^{T} . [A] . [S] = \begin{bmatrix} A & D & E \\ D & B & F \\ E & F & C \end{bmatrix} \tag{78}$$

sendo $[A_1]$ uma matriz real simétrica, cujos elementos se poderiam obter em função dos co-senos directores e dos parâmetros a, b e c.

O desenvolvimento de (77) tendo em atenção (78), permite escrever a equação do elipsóide no referencial Oxyz:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz - 1 = 0 , \tag{79}$$

em que os seis coeficientes são independentes, pelo que se pode apli-

car o método dos mínimos quadrados, o qual conduz ao sistema de equações lineares:

$$\begin{bmatrix} \Sigma x_i^4 & \Sigma x_i^2 y_i^2 & \Sigma x_i^2 z_i^2 & \Sigma x_i^3 y_i & \Sigma x_i^3 z_i & \Sigma x_i^2 y_i z_i \\ \Sigma x_i^2 y_i^2 & \Sigma y_i^4 & \Sigma y_i^2 z_i^2 & \Sigma x_i y_i^3 & \Sigma x_i y_i^2 z_i & \Sigma y_i^3 z_i \\ \Sigma x_i^2 z_i^2 & \Sigma y_i^2 z_i^2 & \Sigma z_i^4 & \Sigma x_i y_i z_i^2 & \Sigma x_i z_i^3 & \Sigma y_i z_i^3 \\ \Sigma x_i^3 y_i & \Sigma x_i y_i^3 & \Sigma x_i y_i z_i^2 & \Sigma x_i^2 y_i^2 & \Sigma x_i^2 y_i z_i & \Sigma x_i y_i^2 z_i \\ \Sigma x_i^3 z_i & \Sigma x_i y_i^2 z_i & \Sigma x_i z_i^3 & \Sigma x_i^2 y_i z_i & \Sigma x_i^2 z_i^2 & \Sigma x_i y_i z_i^2 \\ \Sigma x_i^2 y_i z_i & \Sigma y_i^3 z_i & \Sigma y_i z_i^3 & \Sigma x_i y_i^2 z & \Sigma x_i y_i z_i^2 & \Sigma y_i^2 z_i^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \\ 2D \\ 2E \\ 2F \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Sigma x_i^2 \\ \Sigma y_i^2 \\ \Sigma z_i^2 \\ \Sigma x_i y_i \\ \Sigma x_i z_i \\ \Sigma y_i z_i \end{Bmatrix} \qquad (80)$$

que, depois de resolvido, permite escrever a equação (79) da quártica no referencial inicial.

Com base na equação (79) obtêm-se as equações das elipses existentes nos planos coordenados do referencial inicial, anulando sucessivamente z, y e x, donde:

$$\begin{aligned} &\text{no plano } xOy \qquad Ax^2 + By^2 + 2Dxy - 1 = 0 \\ &\text{no plano } xOz \qquad Ax^2 + Cz^2 + 2Exz - 1 = 0 \\ &\text{no plano } yOz \qquad By^2 + Cz^2 + 2Fyz - 1 = 0 \,. \end{aligned} \qquad (81)$$

Passando estas expressões (81) para coordenadas polares, segundo as transformações:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \rho \begin{Bmatrix} \cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} x \\ z \end{Bmatrix} = \rho \begin{Bmatrix} \cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} y \\ z \end{Bmatrix} = \rho \begin{Bmatrix} \cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta \end{Bmatrix}, \qquad (82)$$

obtém-se:

$$\begin{aligned} \rho &= 1/(A\cos^2\theta + B\operatorname{sen}^2\theta + D\operatorname{sen}2\theta) \\ \rho &= 1/(A\cos^2\theta + C\operatorname{sen}^2\theta + E\operatorname{sen}2\theta) \\ \rho &= 1/(B\cos^2\theta + C\operatorname{sen}^2\theta + F\operatorname{sen}2\theta) \,, \end{aligned} \qquad (83)$$

sendo ρ o módulo do valor teórico da característica em estudo e θ o ângulo formado pelo módulo com o eixo correspondente à primeira incógnita referida em cada uma das equações (81).

Tendo em consideração as direcções dos provetes, segundo o esquema adoptado para a sua extracção, as equações (83) possibilitam a obtenção dos valores teóricos da característica em estudo, segundo essas mesmas direcções e, finalmente, as expressões (82), as coordenadas dos vários valores teóricos.

Para a determinação da matriz rotação [S] da expressão (73), vão ser determinadas as direcções dos vectores próprios da matriz $[A_1]$, dada pela expressão (78), visto que, como se sabe do estudo geral das quádricas, estas direcções são colineares com os eixos do elipsóide (79).

Sendo a matriz $[A_1]$, uma matriz real simétrica de 3ª. ordem, admitirá sempre três direcções reais de vectores próprios ortogonais entre si.

A equação característica ou secular da matriz $[A_1]$ é uma equação algébrica do 3º. grau em λ:

$$\left|A_1 - \lambda I\right| = \begin{vmatrix} A-\lambda & D & E \\ D & B-\lambda & F \\ E & F & C-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (84)$$

sendo I a matriz identidade de 3ª. ordem e as três raízes λ_1, λ_2 e λ_3 da equação (84) os valores próprios da matriz $[A_1]$.

A resolução das três equações matriciais homogéneas:

$$[A_1 - \lambda_1 I].\{X_1\} = 0; \quad [A_1 - \lambda_2 I].\{X_2\} = 0; \quad [A_1 - \lambda_3 I].\{X_3\} = 0 \qquad (85)$$

permite calcular os vectores próprios $\{X_1\}$, $\{X_2\}$ e $\{X_3\}$, que são matrizes-colunas do tipo (3x1), e finalmente os seus co-senos directores que constituem os elementos da matriz rotação [S] procurada, expressão (73).

Os semi-eixos α, β e γ do elipsóide escrito no referencial prin

cipal, expressão (5), estão relacionados com os valores próprios da matriz $[A_1]$, pelas expressões:

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{\lambda_x}}\ ; \qquad \beta = \sqrt{\frac{1}{\lambda_y}}\ ; \qquad \gamma = \sqrt{\frac{1}{\lambda_z}} \tag{86}$$

sendo λ_x, λ_y e λ_z os valores próprios, designados atrás por λ_1, λ_2 e λ_3, cujas direcções próprias que lhes estão associadas mais se aproximam, respectivamente, dos eixos coordenados OX, OY e OZ.

Está-se em condições de traçar o elipsóide (5), definidor da anisotropia da propriedade em estudo, com base nas secções nele feitas pelos planos principais e pelos planos de referência.

Para melhor compreensão do que se acaba de expôr, vai apresentar-se um exemplo concreto relativo à determinação da anisotropia do módulo de elasticidade de uma rocha endógena, do tipo granito gnaissóide de duas micas de grão grosseiro, existente na galeria 12 da margem direita do rio Homem, no local da barragem de Vilarinho das Furnas. Do bloco de rocha daí extraído, de forma aproximadamente cúbica e de aresta cerca de 40 cm, foram preparados nove provetes prismáticos com 5x5x15 cm^3, correspondente a cada uma das direcções indicadas na fig. 7 e marcadas no referencial Oxyz considerado como inicial. Os topos dos provetes são rectificados por meio de uma pequena camada de pasta de cimento de presa rápida ou de uma cola plástica. As medições das extensões são efectuadas, regra geral, com extensómetros eléctricos de base de medida adequada.

Os ensaios de compressão uniaxial são conduzidos sujeitando os provetes a três ciclos de carga e descarga até uma tensão máxima, compatível com a tensão de rotura do material, e fazendo-se leituras das extensões para valores intervalados das tensões. Se os provetes se destinam a ser ensaiados, também, à rotura por compressão, deixam-se repousar durante 15 minutos, tempo suficiente para se atingir a estabilização aparente das deformações, seguindo-se novo ciclo de carga até à rotura franca do prisma. Determinam-se, em seguida,

o módulo de elasticidade secante para uma dada tensão e a tensão de rotura por compressão uniaxial, quando realizado o ensaio correspondente.

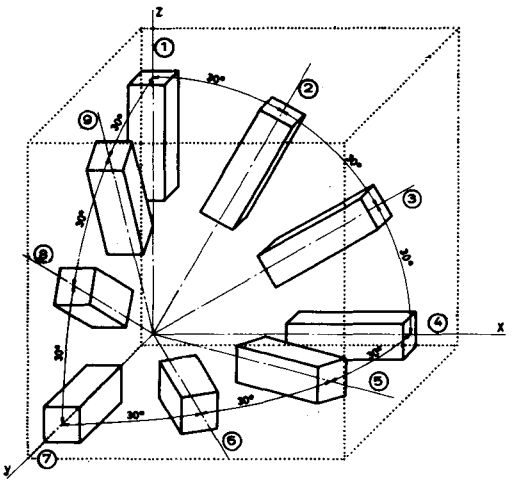

fig.7 - esquema de extracção de provetes

No quadro VII encontram-se inscritos, na segunda coluna, os valores experimentais dos módulos de elasticidade secantes obtidos para a tensão de 200 kg/cm^2 segundo as nove direcções ensaiadas, e nas três colunas seguintes as coordenadas cartesianas desses mesmos valores no referencial inicial Oxyz.

Com base nestas coordenadas, calcularam-se os somatórios insertos no sistema de equações lineares (80), elementos da matriz dos coeficientes e da matriz-coluna dos termos independentes, o qual, depois de resolvido, permite obter os valores mais prováveis dos coeficientes da equação do elipsóide no referencial inicial Oxyz, e escrever a sua expressão como se indica:

$$479,43x^2+484,18y^2+634,84z^2+126,12xy-101,00xz+25,62yz = 1 \qquad (87)$$

estando os seus coeficientes expressos em 10^{-14} cm^4/kg^2.

Com base nestes coeficientes, determinaram-se as equações (83), as quais possibilitaram a obtenção dos valores teóricos e das suas coordenadas no referencial inicial, expressões (82), tendo em consideração o esquema de extracção dos provetes da fig. 7, os quais se encontram inscritos no quadro VIII.

Tendo em atenção os valores dos coeficientes da equação (87), indica-se a equação característica (84), da matriz $[A_1]$

QUADRO VII

valores experimentais (10^3 kg/cm^2)

direcção	módulo de elastic. E	coordenadas referencial O xyz			referencial OXYZ		
		x	y	z	X	Y	Z
1≡Oz	416	0	0	416	84	92	397
2	409	205	0	354	221	204	277
3	472	409	0	236	347	304	104
4≡Ox	435	435	0	0	318	267	-129
5	455	394	227	0	141	414	-126
6	400	200	346	0	- 79	385	- 73
7≡Oy	455	0	455	0	-296	345	- 18
8	455	0	394	227	-211	349	201
9	373	0	186	323	- 56	213	301

QUADRO VIII

valores teóricos (10^3 kg/cm^2)

direcção	módulo de elastic. E	coordenadas no referencial Oxyz		
		x	y	z
1≡Oz	397	0	0	3
2	426	213	0	369
3	459	398	0	230
4≡Ox	456	456	0	0
5	433	375	216	0
6	431	216	373	0
7≡Oy	452	0	452	0
8	433	0	375	216
9	406	0	203	352

dada pela expressão (78):

$$\begin{vmatrix} 479,43-\lambda & 63,06 & -50,50 \\ 63,06 & 484,18-\lambda & 12,81 \\ -50,50 & 12,81 & 634,84-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (88)$$

equação do 3º. grau que, resolvida, dá os três valores próprios da matriz $[A_1]$, expressos em 10^{-14} cm^4/kg^2:

$$\lambda_1 = 539,01 \qquad \lambda_2 = 409,41 \qquad \lambda_3 = 650,03 \ . \qquad (89)$$

A consideração dos valores próprios nas três equações (85) permite calcular as direcções dos vectores próprios e finalmente os seus co-senos directores, elementos da matriz rotação [S] da expressão (73), que traduz a relação entre as coordenadas dos dois referenciais, o inicial Oxyz e o principal OXYZ:

$$[S] = \begin{bmatrix} +0,732 & -0,651 & +0,201 \\ +0,614 & +0,758 & +0,222 \\ -0,297 & -0,039 & +0,954 \end{bmatrix} . \qquad (90)$$

A ordenação dos co-senos directores na matriz rotação (II.122) é feita de forma a tornar o mais próximo possível os eixos homólogos dos dois referenciais. Dentro deste princípio e atendendo aos valores próprios (89), as expressões (86) permitem calcular os semi-eixos α, β e γ do elipsóide, expressos em 10^3 kg/cm^2:

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{\lambda_2}} = 494 \qquad \beta = \sqrt{\frac{1}{\lambda_1}} = 431 \qquad \gamma = \sqrt{\frac{1}{\lambda_3}} = 392 \tag{91}$$

e, finalmente, a equação normal do elipsóide mais provável da anisotropia dos módulos de elasticidade em estudo:

$$\frac{X^2}{494^2} + \frac{Y^2}{431^2} + \frac{Z^2}{392^2} = 1. \tag{92}$$

Para o traçado das elipses resultantes da intersecção do elipsóide (92) com os planos coordenados do referencial principal, determinam-se vários pontos dessas intersecções , mediante o cálculo do valor teórico do módulo de elasticidade, E, e das suas coordenadas, primeiro no referencial principal, e depois no referencial inicial, mediante a transformação linear:

$$\{v\} = [S]^T \cdot \{V\} \tag{93}$$

resultante de (74) tendo em atenção (75).

Os valores teóricos E, obtêm-se facilmente a partir da fórmula:

$$E = \frac{p \cdot q}{\sqrt{q^2 \cos^2\varphi + p^2 \operatorname{sen}^2\varphi}} \ , \tag{94}$$

sendo p e q os semi-eixos da elipse, e havendo a relação:

$$\begin{Bmatrix} P \\ Q \end{Bmatrix} = E \begin{Bmatrix} \cos\varphi \\ \operatorname{sen}\varphi \end{Bmatrix} \tag{95}$$

entre as coordenadas cartesianas P e Q e as coordenadas polares E e φ.

Nos quadros IX, X e XI encontram-se inscritos os valores teóricos e as correspondentes coordenadas, relativamente aos três planos coordenados XOY, XOZ e YOZ, respectivamente.

Na Divisão de Fundações Rochosas, DFR, utiliza-se normalmente um método gráfico para o traçado destas elipses em perspectiva cavaleira, a partir da determinação de dois diâmetros conjugados e das escalas dos eixos do referencial principal, Reis e Sousa [11].

Com base nos quadros VII a XI inclusivé, traça-se, finalmente, o elipsóide mais provável da anisotropia dos módulos de elasticidade da rocha em estudo, fig. 8, onde estão representadas a ponteado as elipses principais, a tracejado as elipses nos planos coordenados do referencial inicial, a cheio a parte correspondente ao 1º. octante, e a traço ponto a elipse representativa do contorno aparente obtida graficamente; os valores experimentais encontram-se identificados pelo seu número de ordem e representados por um círculo preto.

QUADRO IX

valores teóricos no plano XOY (10^3 kg/cm^2)

φ (°)	módulo de elastic. E	coordenadas em Z=0		coordenadas no referencial Oxyz		
		X	Y	x	y	z
0	494	494	0	362	-322	99
10	492	484	85	406	-251	116
20	485	456	166	436	-171	128
30	476	412	238	448	- 88	136
40	465	356	299	444	- 5	138
50	454	292	348	427	74	136
60	444	222	384	398	147	130
70	437	149	411	361	215	121
80	432	75	425	316	273	109
90	431	0	431	265	327	96

QUADRO X

valores teóricos no plano XOZ (10^3kg/cm^2)

φ (°)	módulo de elastic. E	coordenadas em Y=0		coordenadas no referencial Oxyz		
		X	Y	x	y	z
0	494	494	0	362	-322	96
10	490	482	85	328	-317	178
20	478	449	163	280	-299	246
30	461	399	230	224	-269	300
40	443	339	285	164	-232	340
50	426	274	326	104	-191	366
60	412	206	357	45	-148	382
70	401	137	377	- 12	-104	387
80	394	68	388	- 65	- 59	384
90	392	0	392	-116	- 15	374

Nesta mesma figura encontram-se indicadas as escalas dos três eixos do referencial inicial utilizadas na perspectiva cavaleira.

A partir dos valores dos semi-eixos do elipsóide (92) determinam-se, facilmente, os coeficientes de anisotropia, definidos pelas fórmulas (21) e (26), donde:

$$a_m = 1,1 \qquad a_M = 1,3$$

pois, como se sabe, por as anisotropias tipo elipsóide não exibirem anisotropia de superfície,

QUADRO XI
valores teóricos no plano YOZ (10^3kg/cm^2)

φ (°)	módulo de elastic. E	coordenadas em X=0 Y	Z	no referencial Oxyz x	y	z
0	431	431	0	265	327	96
10	430	423	75	237	318	165
20	426	400	146	202	298	228
30	420	364	210	161	268	281
40	414	317	266	116	230	324
50	407	262	312	68	186	356
60	401	200	347	20	138	375
70	396	135	372	- 28	88	385
80	393	68	387	- 73	36	384
90	392	0	392	-116	- 15	374

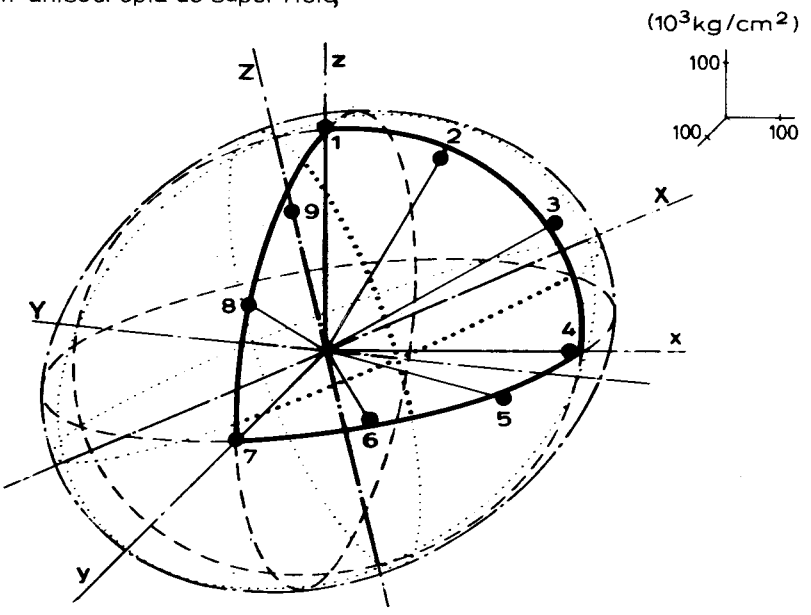

fig. 8 - elipsóide mais provável e valores experimentais dos módulos de elasticidade

o coeficiente correspondente, a_s, é igual à unidade, o que torna a anisotropia total igual à de massa, e portanto, iguais os coeficientes de anisotropia correspondentes.

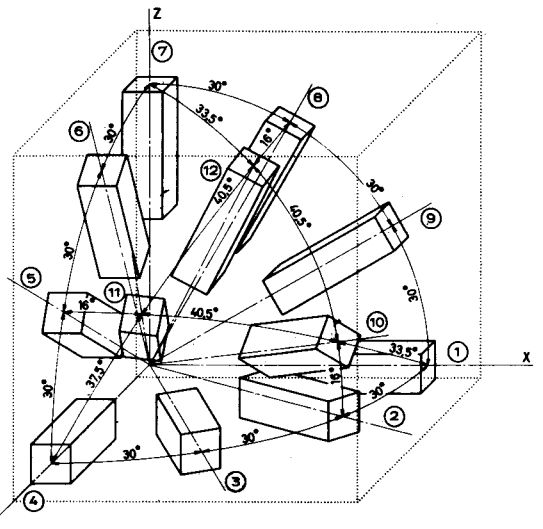

fig. 9 - esquema de extracção de provetes

O coeficiente de variação, dado pela expressão (48), aferidor dos desvios relativos entre os valores experimentais e teóricos dos módulos de elasticidade correspondentes às nove direcções estudadas assume, no caso presente, o valor de:

$$\delta = 5{,}5\ \% . \qquad (96)$$

Em alguns locais de ensaios, tem-se utilizado o esquema de extracção de provetes indicado na fig. 9, o qual cobre melhor a superfície do 1º. octante, daí uma melhor amostragem, tornando mais significativa e real a superfície da anisotropia procurada, embora à custa de cálculos um pouco mais laboriosos, que o emprego de computador torna irrelevante.

BIBLIOGRAFIA

I PERES RODRIGUES, F. - Anisotropy of rocks. Most probable surface of the ultimate stresses and of the moduli of elasticity. Proc. 2nd Cong. I.S.R.M., Vol. I, 1-20, Beograd, 1970.

II REIS E SOUSA, M. - Indicações para a realização de ensaios de caracterização de rochas e maciços rochosos. Relint., LNEC, SB-DFR, Cap. II-6, Fev. 1968.