

# MÉTODOS MODERNOS DE DIMENSIONAMENTO DE TÚNEIS – MODELOS MATEMÁTICOS

## Modern Methods of Tunnel Design-Mathematic Models

por

L. R. SOUSA\*

**RESUMO** – Referem-se neste artigo os modelos matemáticos baseados no método dos elementos finitos, modernamente seguidos no dimensionamento de túneis e de outras escavações subterrâneas.

Fazem-se algumas considerações sobre o método dos elementos finitos e sua aplicação ao cálculo estrutural, ao estudo das solicitações devidas à pressão da água e ao estudo de maciços. Finalmente, descrevem-se os modelos de cálculo utilizados e alguns exemplos de aplicação dos vários tipos de modelos.

**SYNOPSIS** – The article mentions the finite element method used nowadays in the design of tunnels and other underground excavations.

Some considerations are made on the finite element method and its application to structural analysis, to the study of stresses due to water flow, and to the analysis of the rock masses. Finally, the design models generally used in the study of tunnels are referred to, and some instances of application are given.

### 1 – INTRODUÇÃO

As duas grandes vias seguidas para o dimensionamento de túneis envolvem a utilização de modelos experimentais geomecânicos ou de modelos matemáticos. Os modelos experimentais têm permitido essencialmente realizar trabalhos de investigação que podem dar uma ideia completa dos tipos de comportamento dos maciços alterados pela abertura do túnel e do próprio revestimento de suporte. Os modelos matemáticos utilizam-se mais no cálculo e dimensionamento de túneis

---

\* Especialista da Divisão de Estudos Especiais, Serviço de Barragens do LNEC.

A utilização de modelos experimentais no dimensionamento de túneis é tratada no artigo deste volume “Métodos modernos de dimensionamento. Equacionamento geral. Modelos experimentais” de Esteves Ferreira, referindo-se neste artigo apenas os modelos matemáticos baseados no método dos elementos finitos, porque permitem considerar facilmente materiais heterogêneos e anisótropos, com comportamentos não lineares e para qualquer estado inicial de tensão. Além disso, permitem analisar meios descontínuos por técnicas adequadas, introduzir quaisquer condições de apoio e estudar as solicitações que actuam nestas estruturas, nomeadamente as devidas à acção da água nos maciços.

A maior limitação no uso do método dos elementos finitos no projecto geotécnico de túneis está no insuficiente conhecimento das verdadeiras leis constitutivas dos maciços e não na impossibilidade de as introduzir nos modelos de cálculo baseados neste método. Existem, também, limitações devidas ao equipamento computacional disponível e eventualmente ao custo de certas análises estruturais. Acontece sobretudo ao simular a sequência das operações de escavação, ao aproximar o comportamento não linear, ao analisar variações de tensões e deformações dependentes do tempo, em que são necessárias múltiplas soluções do problema. Além disso, a análise tridimensional de certos problemas é, ainda, difícil de efectuar dada a enorme quantidade de informação a tratar.

## 2 – O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

### 2.1 – *Generalidades*

O método dos elementos finitos é um processo de cálculo analítico para obtenção de soluções aproximadas de certos fenómenos físicos, cujas leis de comportamento são definidas por um sistema de equações diferenciais sujeitas a condições de fronteira no seu domínio de aplicação. Trata-se de uma técnica de interpolação, que permite aproximar qualquer função contínua por um modelo de cálculo discreto, que consiste na definição de um conjunto de valores da função num número finito de pontos do seu domínio (pontos nodais) e de um conjunto de subdomínios (elementos finitos) também em número finito, onde se aproxima localmente a função a estudar. Em cada elemento finito a aproximação da função é definida unicamente em relação aos valores da função (e em certos casos aos valores das suas derivadas até certa ordem) no número discreto de pontos nodais existentes nesse elemento (Oden, 1972).

Estabelecida a técnica numérica de interpolação da função em cada elemento

finito, o que permite definir, portanto, num ponto qualquer de um elemento, o valor da função a analisar por interpolação dos valores da função nos pontos nodais dos elementos, torna-se necessário estabelecer os vários métodos para definição dos modelos de cálculo baseados em elementos finitos que permitam a resolução de equações diferenciais que envolvam operadores lineares e não lineares.

Um dos modelos mais utilizados é baseado no cálculo variacional, que consiste na minimização de um funcional sobre o domínio do problema e de um ou mais sobre a sua fronteira. No entanto, em certos problemas, o princípio variacional não existe, ou se existe, nem sempre é evidente, procurando-se, então, um modelo de cálculo que aproxime directamente as equações diferenciais do problema a analisar. Um dos processos mais simples de aproximação directa consiste numa formulação em resíduos pesados, que abre largas perspectivas em problemas que envolvam operadores não lineares ou para os quais não existe ou não se conhece um princípio variacional (Norrie e Vries, 1973). Existem vários métodos, correspondentes aos vários tipos de funções pesadas que se atribuem a cada elemento finito para minimizar o erro cometido na aproximação do problema a analisar, como sejam, o método de colocação, de Galerkin e dos mínimos quadrados.

## 2.2 – Aplicação ao cálculo estrutural

A aplicação do método dos elementos finitos ao cálculo de estruturas constitui um dos domínios mais importantes deste método, tendo mesmo de início sido confundido com um processo de análise estrutural.

Na análise por elementos finitos, introduzem-se aproximações ao dividir a estrutura num número finito de subdomínios e ao definir um conjunto de pontos nodais. Definem-se, então, convenientemente os campos de tensões ou de deslocamentos nos elementos, podendo assim satisfazer uma das condições, de equilíbrio ou de compatibilidade, sendo a outra verificada nos pontos nodais.

A formulação em deslocamentos que é a mais utilizada expõe-se, por isso, em seguida sucintamente.

As leis de variação dos deslocamentos  $u_m$  num elemento são fixadas em função dos valores dos deslocamentos nos pontos nodais,  $u_{im}^e$ :

$$\begin{aligned} u_m &= N_i u_{im}^e \\ (i &= 1, 2, \dots P) \\ (m &= 1, 2, \dots G) \end{aligned} \tag{1}$$

sendo  $N_i$  as funções de forma, que tomam o valor unitário no ponto nodal  $i$  e zero nos restantes,  $P$  o número de pontos nodais em cada elemento e  $G$  o número de graus de liberdade em cada ponto.

Conhecido o operador diferencial adequado, definido normalmente para deformações infinitesimais e lineares, as deformações vêm dadas nos elementos por:

$$\begin{aligned}\varepsilon_p &= H_{pm} u_m = A_{pim} u_{im}^e \\ (p &= 1, 2 \dots T) \\ (m &= 1, 2 \dots G) \\ (i &= 1, 2 \dots P)\end{aligned}\quad (2)$$

representando  $T$  o número de componentes de deformação ou de tensão.

As tensões, para uma relação linear entre tensões e deformações dada por:

$$\begin{aligned}\sigma_q &= D_{qp}(\varepsilon_p - \varepsilon_p^0) + \sigma_q^0 \\ (p &= 1, 2 \dots T) \\ (q &= 1, 2 \dots T)\end{aligned}$$

serão:

$$\begin{aligned}\sigma_q &= D_{qp} A_{pim} u_{im}^e - D_{qp} \varepsilon_p^0 + \sigma_q^0 \\ (p &= 1, 2 \dots T) \\ (q &= 1, 2 \dots T) \\ (i &= 1, 2 \dots P) \\ (m &= 1, 2 \dots G)\end{aligned}\quad (4)$$

em que  $\varepsilon_p^0$ ,  $\sigma_q^0$  e  $D_{qp}$  representam, respectivamente, os termos dos vectores de deformação e de tensão iniciais e da matriz de elasticidade.

Pelo princípio da energia potencial total, a solução corresponde a tornar mínima a energia potencial total obtendo-se, então, as equações de equilíbrio num elemento:

$$\begin{aligned}K_{ijmn}^e u_{jn}^e + M_{ijmn}^e \ddot{u}_{jn}^e &= X_{im}^e + P_{im}^e + T_{im}^e + S_{im}^e \\ (i &= 1, 2 \dots P) \\ (j &= 1, 2 \dots P) \\ (m &= 1, 2 \dots G) \\ (n &= 1, 2 \dots G)\end{aligned}\quad (5)$$

considerando que actuam forças de volume, forças de superfície e forças de inércia (Pedro, 1973a).

Obtidas as equações de equilíbrio para cada um dos elementos, introduzem-se as equações de compatibilidade nos pontos nodais da estrutura:

$$\begin{aligned} u_{im}^e &= B_{ir}^e U_{rm} \\ (i &= 1,2 \dots P) \\ (m &= 1,2 \dots G) \\ (r &= 1,2 \dots N) \end{aligned} \quad (6)$$

sendo  $N$  o número total de pontos nodais da estrutura.

Estas operações de transformação (6) executam-se, normalmente, ordenando os pontos nodais da estrutura e procedendo ao espalhamento das várias matrizes e vectores, isto é, considerando matrizes e vectores de ordem igual ao número total de graus de liberdade da estrutura nos pontos nodais e somando directamente as contribuições de cada elemento na posição correspondente aos respectivos pontos nodais.

Finalmente, somando a contribuição de cada elemento, obtém-se a equação geral:

$$\begin{aligned} K_{rsmn} U_{sn} + M_{rsmn} \ddot{U}_{sn} &= X_{rm} + P_{rm} + T_{rm} + S_{rm} \\ (r &= 1,2 \dots N) \\ (s &= 1,2 \dots N) \\ (m &= 1,2 \dots G) \\ (n &= 1,2 \dots G) \end{aligned} \quad (7)$$

É importante verificar que esta formulação (formulação indicial) reúne vantagens consideráveis em relação à formulação matricial, tradicional, pois permite determinar imediatamente os termos gerais das várias matrizes dos elementos e da estrutura, facilitando imenso a programação e o número de operações a efectuar pelo programador (Pedro, 1973b).

A introdução das ligações exteriores no cálculo de estruturas pelo método dos elementos finitos é fácil de considerar, podendo ver-se na publicação de Pedro *et al.* (1972) os principais métodos utilizados e a teoria habitualmente seguida.

Admitiu-se nesta formulação hipóteses de comportamento elástico linear, no entanto, nem sempre acontece ser aconselhável seguir estas hipóteses, exigindo-se

assim análises estruturais que permitam ter em consideração as verdadeiras leis de comportamento não lineares dos materiais.

As não linearidades que ocorrem são fundamentalmente de dois tipos: (i) não linearidades físicas que resultam de deixar de ser válida a lei de Hooke constitutiva dos materiais elásticos lineares; (ii) não linearidades geométricas que resultam de existirem relações não lineares entre deformações e deslocamentos e de se verificarem variações finitas de geometria da estrutura.

As técnicas de análise são basicamente as mesmas para estas duas categorias de não linearidades: incrementais, iterativas e mistas. Nas técnicas incrementais, as solicitações são divididas em incrementos, normalmente de igual grandeza, admitindo-se em cada um comportamentos elásticos lineares dos materiais; a matriz de rigidez é mantida constante em cada fase de carga, mas poderá variar de um incremento para o seguinte. Nas técnicas iterativas, a estrutura é carregada no início do processo de cálculo, procurando-se depois determinar a correcção a introduzir à solução calculada em cada iteração ajustando os parâmetros que caracterizam as leis elásticas tomadas no cálculo, isto por exemplo, na hipótese de não linearidades físicas. Nas técnicas mistas, procura-se uma utilização simultânea das duas outras técnicas descritas, incrementais e iterativas.

Para as obras subterrâneas como os túneis que se inserem nos maciços, só tem, no entanto, interesse considerar pela sua importância, não linearidades físicas. Neste caso, os vários métodos de análise baseiam-se na resolução de sucessivos cálculos elásticos lineares por via incremental e (ou) iterativa de tal modo que, por ajustamento dos parâmetros da equação de Hooke, matriz de elasticidade (método de elasticidade variável), tensões iniciais (método das tensões iniciais) e deformações iniciais (método das deformações iniciais), isoladamente ou em diferentes combinações, se obtenha uma solução que conduza a tensões e deformações coerentes com o comportamento adoptado para os materiais (Zienkiewicz, 1971).

### *2.3 – Aplicação ao estudo das solicitações devidas à pressão da água*

As solicitações mecânicas devidas à variação de pressão da água, que se traduzem por forças de impulsão e por forças devidas ao escoamento, constituem uma das solicitações mais importantes e de mais difícil análise em maciços. O estudo destas solicitações implica a necessidade de se determinar a distribuição do potencial hidráulico no meio a analisar, definido pela função  $h(x_i)$ , de tal modo

que seja satisfeita a lei de escoamento, a equação de continuidade e as condições de fronteira do problema (Louis, 1974).

A análise destas solicitações pelo método dos elementos finitos é feita, normalmente, na hipótese de escoamento permanente, por aplicação de um método variacional e, na hipótese de escoamento não estacionário, por aplicação do método de Galerkin (Witherspoon e Neuman, 1972).

Tal como na aplicação ao cálculo estrutural, subdivide-se a região a analisar num conjunto de elementos finitos e define-se em cada um deles a lei de discretização para o potencial hidráulico em função dos valores do potencial nos pontos nodais do elemento. Assim, obtém-se como em (1) a expressão:

$$h = N_i h_i^e \quad (8)$$

$$(i = 1, 2, \dots, P)$$

Na hipótese de se aplicarem métodos variacionais, obtém-se a expressão de um funcional que, por imposição das condições de estacionaridade, permite obter em cada elemento as seguintes igualdades:

$$A_{mn}^e h_n^e = F_m^e \quad (9)$$

$$(m = 1, 2, \dots, P)$$

$$(n = 1, 2, \dots, P)$$

em que

$$A_{mn}^e = \int_A K_{ij} \frac{\delta N_m}{\delta K_i} \frac{\delta N_n}{\delta K_j} dA - \int_S \alpha N_m N_n dS \quad (10)$$

$$F_m^e = \int_A Q N_m dA - \int_S q N_m dS \quad (11)$$

Nestas expressões,  $K_{ij}$  representa o tensor simétrico anisótropo de permeabilidade,  $Q$  o caudal fornecido ou cedido por unidade de volume e foram admitidas condições de fronteira em caudais do tipo:

$$K_{ij} \frac{\delta h}{\delta x_j} n_i = q + \alpha h \quad (12)$$

$$(i = 1, 2, \dots, G)$$

$$(j = 1, 2, \dots, G)$$

em que  $n_i$  representa os cossenos directores da normal à superfície de fronteira e  $\alpha$  e  $q$  são funções conhecidas (Zienkiewicz, 1971).

As outras condições de fronteira, que implicam a imposição de cargas hidráulicas, são introduzidas directamente nas equações de equilíbrio (9) pelo método de colocação.

Seguindo o processo referido anteriormente na aplicação do método dos elementos finitos à teoria das Estruturas, obtém-se, finalmente, a igualdade para todo o domínio

$$\begin{aligned} A_{nm} h_n &= F_m \\ (n &= 1, 2, \dots, N) \\ (m &= 1, 2, \dots, N) \end{aligned} \quad (13)$$

sendo  $A_{mn}$  uma matriz semelhante à matriz de rigidez de uma estrutura,  $h_n$  o vector das cargas hidráulicas nos pontos nodais e  $F_m$  o vector dos termos conhecidos, afim do vector das forças nodais equivalentes às solicitações.

A determinação das superfícies livres que ocorrem nos escoamentos constitui, nestes modelos matemáticos, um problema delicado pela indeterminação que elas originam na definição das condições de fronteira de um dado domínio a analisar. Procura-se, então, seguir um processo iterativo que permita determinar as próprias condições de fronteira do problema e, evidentemente, a distribuição do potencial hidráulico (Witherspoon e Neuman, 1972).

#### 2.4 – Aplicação ao estudo dos maciços

O dimensionamento dos túneis está intimamente ligado ao tipo de maciço em que a obra se realiza. Nos maciços terrosos, admite-se, normalmente, que o material constitutivo pode ser tratado por um meio contínuo de comportamento não linear, enquanto que, nos maciços rochosos, surgem superfícies de descontinuidade (juntas\*), mais ou menos regularmente espaçadas, que são, em grande parte, responsáveis pela deformabilidade destes maciços. Daí que para análise dos maciços pelo método dos elementos finitos dois tipos de análise sejam possíveis:

- (i) O maciço é suposto contínuo, considerando no caso dos maciços rochosos

---

\* Para referir neste trabalho todas as descontinuidades que ocorrem nos maciços, isto é, todas as entidades geológicas que interrompem a continuidade física de uma dada formação, diaclases, falhas, superfícies de xistosidade, etc., adopta-se a designação de *junta* utilizada em análise estrutural (Goodman *et al.*, 1968).



as propriedades de um meio contínuo e anisótropo que simule adequadamente a compressibilidade do maciço caracterizado pelos sistemas de juntas e pela matriz rochosa.

(ii) O maciço é suposto descontínuo, considerando-se a existência de juntas. Neste caso, surgem situações em que as dimensões dos blocos e, portanto, o espaçamento das juntas é desprezável em face das escavações, podendo considerar-se em certas zonas o meio como contínuo por dedução das características mecânicas que conduzem a uma deformabilidade equivalente à do meio descontínuo. Para as zonas onde se prevêem concentrações de tensões ou existem juntas isoladas (falhas) ou com uma resistência ao corte muito baixa é necessário introduzir no modelo de cálculo elementos finitos que simulem as juntas.

Sendo assim, um modelo de elementos finitos deverá considerar dois tipos fundamentais de elementos:

- elementos planos ou tridimensionais que caracterizem os blocos de rocha ou o meio contínuo equivalente ao maciço.
- elementos de junta que caracterizem adequadamente as descontinuidades do maciço.

O elemento de junta foi inicialmente formulado por Goodman *et al.* (1968) para equilíbrios planos (elementos lineares) e depois generalizado por Mahtab e Goodman (1970) para equilíbrios tridimensionais (elementos superficiais). Na Fig. 1 apresentam-se os elementos lineares e superficiais de lados rectos ou curvos que são normalmente utilizados.

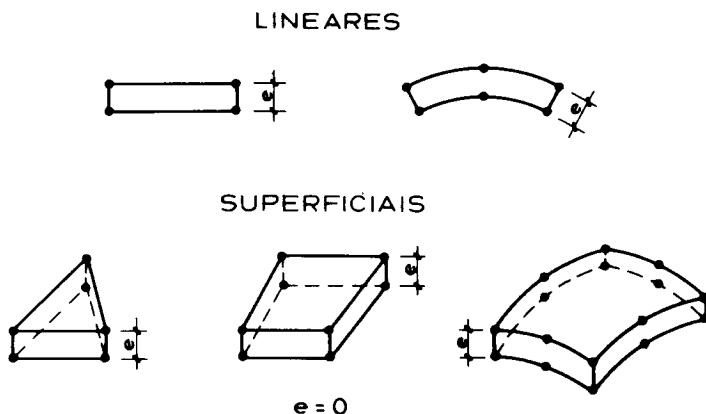


Fig. 1 – Elementos finitos de junta

Para a sua formulação definem-se duas superfícies a distância nula, discretizadas por dois conjuntos de igual número de pontos nodais com idênticas coordenadas, dependendo a sua forma do equilíbrio considerado e do número de pontos nodais adoptados. Fixam-se, então, para ambas as superfícies, leis idênticas de variação de deslocamentos em função dos deslocamentos tangenciais e normais dos pontos nodais de cada face, determinando-se, em seguida, as deformações nestes elementos pelo deslocamento relativo entre pontos das duas faces de iguais coordenadas (Sousa, 1974). Finalmente, é necessário, determinar uma série de parâmetros relacionados com as características geométricas e mecânicas das juntas (Goodman, 1974). Definem-se, assim, os parâmetros  $k_t$ , rigidez transversal da junta;  $k_n$ , rigidez normal da junta;  $S$ , resistência ao corte e ao deslizamento;  $i$ , ângulo de dilatação;  $R$ , resistência à tracção, geralmente nula; e  $f$ , fecho máximo admissível. Uma vez conhecidos os parâmetros das juntas determinados "in situ" ou em amostras no laboratório, é possível definir uma relação entre tensões e deformações e, portanto, uma matriz de elasticidade,  $D_{mn}$ .

A matriz  $D_{mn}$ , na hipótese mais simples de equilíbrio plano, apresenta-se sob a forma:

$$D_{mn} = \begin{bmatrix} K_t & K_{tn} \\ K_{nt} & K_n \end{bmatrix} \quad (14)$$

Se as juntas forem não dilatantes, os termos  $k_{nt}$  e  $k_{tn}$  são nulos, sendo apenas necessário determinar a rigidez normal e tangencial, que expressam, respectivamente, a relação entre a variação da tensão tangencial e a deformação tangencial e a relação entre a variação da tensão normal com a deformação normal. No entanto, se as juntas forem dilatantes,  $k_n$  e  $k_t$  são definidos tal como anteriormente, considerando constantes, respectivamente, as deformações normais e tangenciais à junta;  $k_{tn}$  define-se pela relação das tensões tangenciais com as deformações normais, para deformações tangenciais constantes e  $k_{nt}$  pela relação das tensões normais com as deformações tangenciais para deformações normais constantes (Goodman e Dubois, 1972).

Na aplicação ao estudo da percolação da água no maciço há que considerar, também, o meio como constituído por uma matriz rochosa e por juntas (fissuras). Na maior parte dos casos, o maciço pode assimilar-se, sob o ponto de vista hidráulico, a um meio contínuo e anisótropo, mas casos haverá em que a escala do problema a resolver, a distância e a frequência das juntas em relação às escavações a efectuar, não permitem a utilização de um meio contínuo como

representativo do maciço. Neste caso torna-se necessário ter em conta o carácter descontínuo dos maciços, provocado pelas juntas que os dividem e os fragmentam. O maciço deve, então, ser considerado, sob o ponto de vista hidráulico, como uma combinação de juntas elementares.

Tal como na análise estrutural de maciços, consoante a idealização adoptada, deverão considerar-se dois tipos fundamentais de elementos finitos: elementos planos ou tridimensionais (modelos contínuos) ou elementos de junta (modelos descontínuos). No entanto, os elementos de junta, neste caso, são definidos apenas por uma superfície, ao contrário do que acontece em análise estrutural, podendo ser superficiais ou lineares se o meio a analisar for, respectivamente, considerado tridimensional ou plano. Sob o ponto de vista hidráulico são caracterizados pela condutividade hidráulica da fissura em regime laminar ou turbulento (Louis, 1974).

### 3 – MODELOS DE CÁLCULO POR ELEMENTOS FINITOS EM TÚNEIS

#### 3.1 – *Introdução*

No desenvolvimento de um modelo de cálculo por elementos finitos, procura-se substituir a situação observada no local da obra por um modelo adequado equivalente. As características do modelo adoptado, devem estar ligadas, sobretudo, às disponibilidades, de programas de cálculo automático e de equipamentos computacionais e, evidentemente, ao custo das análises numéricas a efectuar que dependem dos tempos de computação a utilizar.

Além disso, a quantificação das características mecânicas e geométricas, que permitem definir as leis constitutivas, deve ser feita, tendo em vista o modelo de cálculo idealizado. Assim, por exemplo, nos casos em que se aceita a hipótese de elasticidade linear, devem desenvolver-se técnicas que permitam caracterizar as diversas constantes elásticas do maciço, suposto como meio contínuo, heterogéneo e anisótropo e, nos casos de não linearidades físicas, devem desenvolver-se técnicas que permitam caracterizar não só a deformabilidade, variável com o estado de tensão, mas também a resistência. É necessário, portanto, rever em face do modelo de cálculo a seguir, a filosofia habitualmente utilizada na experimentação, quando se determinam os parâmetros globais de deformabilidade e de resistência.

A análise numérica da maioria dos problemas em túneis é realizada em modelos estruturais bidimensionais, o que é razoável em face do comprimento

dos túneis e do próprio estado actual de investigação das técnicas de medição de tensões iniciais, das propriedades dos materiais e do seu comportamento. No entanto, esta idealização nem sempre é razoável em face da disposição das famílias de juntas e do estado de tensão inicial, em certas cavidades subterrâneas especiais ou mesmo no estudo da frente de um túnel, onde se poderá justificar uma análise tridimensional (Descoeudres, 1974).

Finalmente, sob o ponto de vista das solicitações actuantes em túneis resultantes da escavação, a via utilizada é fundamentalmente a seguinte:

(i) Introdz-se no modelo de cálculo o estado de tensão inicial instalado no maciço que, ou será medido directamente no local pelas técnicas adequadas, ou será calculado por uma análise gravitacional num modelo de cálculo contendo a zona a escavar.

(ii) Aplicam-se as forças, na superfície da periferia da zona a escavar, equivalentes às tensões, iguais em valor absoluto e opostas às tensões iniciais dos elementos da periferia. Os deslocamentos obtidos neste cálculo serão os que deve corresponder aos observados na obra, enquanto que, as tensões obtidas terão de ser adicionadas às inicialmente instaladas no maciço.

Descrevem-se, a seguir, os modelos de cálculo por elementos finitos, considerando os modelos de estruturas reticuladas, os modelos contínuos, dependentes ou não do tempo, com várias leis constitutivas para os materiais e os modelos descontínuos com elementos de junta e modelos para análise de escoamentos. Referem-se, também, os programas de cálculo automático actualmente existentes no LNEC que permitem uma análise de problemas de túneis.

### 3.2 – *Modelos de estruturas reticuladas*

Um dos modelos de cálculo mais utilizados inicialmente, corresponde a considerar, no caso dos túneis com revestimento de suporte, o revestimento por uma série contínua de peças lineares, rodeadas por elementos do maciço que as solicitam. O dimensionamento do revestimento do túnel é, no entanto, difícil pela quantificação das solicitações actuantes, pois que a estrutura composta pelo revestimento e pelo maciço circundante é, em geral, estaticamente indeterminada, isto é, a solicitação actuante no revestimento é determinada pela deformação de ambas as componentes da estrutura (Salamon, 1974).

O LNEC dispõe de programas de cálculo automático que permitem considerar elementos lineares apoiados sobre meios deformáveis, o que pode facilitar a

análise das solicitações, segundo uma formulação de Winkler e que permitem simular comportamentos lineares e não lineares dos maciços. As reacções destes meios são discretizadas pelo Teorema dos Trabalhos Virtuais adoptando, para o elemento linear e para o meio deformável, idênticas funções de deslocamento. Conseguem-se soluções em que a compatibilidade do maciço e do revestimento é satisfeita. O programa de cálculo utiliza o método de elasticidade variável seguindo uma técnica incremental e efectuando uma iteração em cada incremento (Falcão *et al.*, 1973).

### 3.3 – Modelos contínuos independentes do tempo

Descrevem-se os modelos de cálculo, em que o maciço é suposto um meio contínuo e anisótropo, que simulam a existência de eventuais famílias de juntas. Não se analisam fenómenos dependentes do tempo e podem considerar-se comportamentos elásticos lineares e comportamentos não lineares dos materiais.

A adopção de um comportamento elástico linear constitui sem dúvida o modelo mais simples e verifica-se que constitui uma aproximação suficiente, sob o ponto de vista prático, para grande número de problemas em face, muitas vezes, da limitada informação geotécnica disponível.

A relação entre tensões e deformações é dada pela lei de Hooke, expressa em (3), sendo a matriz  $D_{mn}$  determinada a partir de constantes elásticas (módulos de elasticidade longitudinal e transversal e coeficientes de Poisson) cujo número varia consoante a simetria elástica apresentada pelos materiais.

Seguindo esta aproximação de corpos elásticos e anisótropos, tem sido desenvolvidos pelo LNEC programas de cálculo automático que permitem considerar os equilíbrios habituais em estruturas maciças. Em equilíbrios planos, aproximação corrente em túneis, as famílias de programas utilizam elementos finitos triangulares com três pontos nodais nos vértices e elementos finitos isoparamétricos quadrangulares de lados rectos ou curvos com oito pontos nodais nos vértices e a meio dos lados; em equilíbrios axissimétricos e tridimensionais em sólidos de revolução utilizam elementos finitos de revolução de secção transversal triangular com pontos nodais nos vértices; em equilíbrios tridimensionais em geral utilizam elementos finitos de oito nós, compostos por tetratedros, e elementos finitos isoparamétricos com oito pontos nodais nos vértices e de lados planos (Pedro, 1973 a e b).

Muitas vezes nem sempre o uso de modelos elásticos lineares resulta

adequado, daí o desenvolvimento de modelos contínuos que simulem comportamentos não lineares dos materiais. Admitem-se, normalmente, idealizações de não resistência à tracção, elasto-plásticas e de roturas por cortes ao longo de certas superfícies:

(i) O modelo em que não se admite resistência à tracção, o que é compreensível sobretudo em maciços rochosos, na medida em que estes são considerados incapazes de sustentar tensões de tracção dada a existência de numerosas famílias de juntas, foi dos primeiros modelos não lineares a serem aplicados ao dimensionamento de túneis (Zienkiewicz, 1968).

(ii) O modelo em que se admite a idealização elasto-plástica, é talvez o mais utilizado em túneis com revestimento, sendo usados nas aplicações variados esquemas de teorias de plasticidade (Desai, 1972).

(iii) No último tipo de idealização citado (“ubiquitous analysis”) especificam-se orientações das juntas em cada elemento finito, calculam-se as tensões normais e tangenciais nos planos adoptados para orientação das juntas e analisa-se qualquer rotura por tracção ou por corte nestes planos (Duncan e Goodman, 1968).

No LNEC foram desenvolvidas duas famílias de programas de cálculo automático que permitem analisar problemas que envolvam solos ou maciços rochosos. Um permite a determinação do estado de deformação e de tensão em solos, segundo um modelo elasto-plástico e do tipo elasticidade variável (Falcão, 1971) e o outro permite caracterizar o comportamento de um material estratificado e utiliza o método das tensões iniciais (Sousa, 1974). Ambos admitem a simplificação estrutural de estado plano de deformação e utilizam elementos finitos triangulares com três pontos nodais.

### 3.4 – Modelos contínuos dependentes do tempo

Acontece que os materiais à volta das escavações subterrâneas podem continuar a deformar-se com o tempo, daí que a consideração destas deformações possa ser bastante importante na discussão da estabilidade de construções subterrâneas.

Nos modelos contínuos que envolvam o factor tempo, o processo de cálculo deve ser feito passo a passo em intervalos de tempo adequados, admitindo normalmente que em cada intervalo de tempo a resposta a um dado incremento é elástica (Zienkiewicz e Valliappan, 1969). Além disso, como os fenómenos de fluência são caracterizados pelo facto de que a relação por fluência depende do

estado de tensão e de deformação e também, em geral, de toda a história no tempo, os processos de cálculo computacionais apresentam dificuldades práticas pois nem sempre é praticável armazenar toda a informação respeitante ao estado de tensão no tempo.

Na hipótese de viscoelasticidade linear é possível representar o comportamento dos materiais por uma série de corpos de Kelvin, sendo então necessário reter apenas informação num número finito de termos para representar todo o efeito da história de tensões e de deformações (Zienkiewicz, 1971), (Oka e Hiramatsu, 1974).

Não foram ainda desenvolvidos pelo LNEC programas de cálculo que permitam a consideração de fenómenos de fluência.

### 3.5 – Modelos descontínuos

Pretendem-se referir os modelos de cálculo que permitem considerar elementos de junta, citados em 2.4, que caracterizam as discontinuidades existentes nos maciços rochosos. Estes modelos apresentam grande vantagem sobre os modelos contínuos elásticos e elasto-plásticos, pois, enquanto que nestes a estabilidade das aberturas é independente da sua dimensão, nos modelos descontínuos pode-se simular o espaçamento real entre juntas.

Acontece no entanto que, por vezes, o espaçamento médio entre juntas é pouco significativo em face das dimensões dos túneis, sendo então impossível introduzir na análise todas as discontinuidades que existem no maciço. Determinam-se, então, as propriedades de um meio contínuo equivalente, reservando-se elementos de junta para certas zonas onde se prevêem eventuais roturas por tracção ou por escorregamento.

Para simular as propriedades do meio contínuo equivalente existem duas hipóteses:

(i) Se as juntas são supostas contínuas, calculam-se as relações entre deformações e tensões num sistema de eixos ortogonal associado às juntas e, em seguida, efectua-se a transformação das matrizes  $H_i'$ , que relacionam deformações com tensões nos eixos locais da junta para o sistema global adoptado para a estrutura:

$$H_i = A_i^T H_i' A_i \quad (15)$$

sendo  $A_i$  uma matriz de transformação. A deformabilidade média do maciço

determina-se, então, por:

$$H = \sum_{i=1}^n A_i^T H_i A_i \quad (16)$$

sendo  $n$  um número igual ao número de famílias de juntas acrescido de um, que representa a introdução da deformabilidade da matriz rochosa.

(ii) Se as juntas não são contínuas, isto é, se apresentam um certo imbricamento, poderão ser deduzidas as características de deformabilidade média do maciço por análise numérica dos modos de deformação de um elemento de volume suficientemente representativo do meio a analisar.

No LNEC existe actualmente uma família de programas de cálculo automático baseados no modelo de cálculo descrito. Utiliza elementos lineares de junta com quatro pontos nodais e elementos triangulares com três pontos nodais e segue o método das tensões iniciais (Sousa, 1974).

### 3.6 – Modelos de escoamento

Referem-se os modelos de cálculo que permitem estudar as solicitações devidas à variação de pressão da água. Como foi citado em 2.4, os maciços podem assimilar-se, sob o ponto de vista hidráulico, a um meio contínuo e anisótropo ou a um meio descontínuo, formado por juntas elementares. Daí se considerarem dois tipos fundamentais de modelos de cálculo:

(i) Modelos contínuos – Supõe-se o meio contínuo e anisótropo, sendo, portanto, necessário determinar o tensor de permeabilidade por medição directa no local da obra ou por medição directa das condutividades hidráulicas  $k_i$  dos sistemas de juntas eventualmente existentes no maciço. Neste caso, associa-se a cada sistema de juntas um sistema de eixos ortogonais ligados às direcções principais de permeabilidade, determina-se a matriz de permeabilidade  $K_i$  do sistema de juntas a partir da sua condutividade e da permeabilidade da matriz rochosa define-se o operador linear  $P_i$  de transformação dos eixos locais para os exteriores do maciço e determina-se a matriz global de permeabilidade dos  $n$  sistemas de juntas por (Louis, 1974):

$$K = \sum_{i=1}^n P_i K_i P_i^T \quad (17)$$



Utilizam-se, por isso, elementos finitos planos ou tridimensionais consoante o tipo de análise, plana ou tridimensional, efectuada.

(ii) Modelos descontínuos – Supõe-se o meio descontínuo formado por uma combinação de superfícies de fissuras elementares, caracterizadas hidraulicamente pelas suas condutividades. Como foi dito, utilizam elementos finitos de juntas lineares ou superficiais.

Os modelos de cálculo referidos admitem habitualmente a hipótese de se manterem rígidas as configurações das juntas, em especial as suas aberturas, mas, dado que uma variação do estado de tensão provoca uma variação de abertura das juntas e, conseqüentemente, um efeito notável nas características de condutividade hidráulica destas, existem modelos de cálculo que permitem efectuar a análise dos escoamentos tendo em conta o estado de tensão que se instalam nos maciços (Brekke *et al.*, 1972).

No LNEC existem actualmente famílias de programas de cálculo automático para análise de modelos contínuos e descontínuos. Os primeiros utilizam elementos finitos triangulares e quadrangulares, respectivamente, com três e quatro pontos nodais para análises planas e de revolução e os segundos utilizam elementos finitos lineares de junta com dois pontos nodais.

### 3.7 – Exemplos de aplicação

Seguem-se alguns exemplos de aplicação que utilizam os vários modelos de cálculo de elementos finitos descritos, com excepção dos modelos de escoamento.

(i) Túnel do metropolitano do Rio de Janeiro.

Apresenta-se o estudo de um túnel do metropolitano do Rio de Janeiro, analisado por uma estrutura reticulada utilizando programas de cálculo automático desenvolvidos no LNEC (Pedro *et al.*, 1972).

O túnel é constituído por uma galeria rectangular de betão armado, cuja secção se apresenta na Fig. 2. A viga de fundação está à profundidade de 18 m, estando o pórtico enterrado numa camada de argila, que vai até à profundidade de 24 m, a que se segue uma camada de areia. As solicitações, que se supõem actuar superior e lateralmente, são as que se indicam na mesma figura. Admite-se que a fundação é do tipo Winkler e que o comportamento dos materiais da estrutura são elásticos lineares, enquanto que se admite para o material de fundação comportamento não linear em relação ao módulo de reacção e à resistência à tracção.

Os resultados obtidos, reacção da fundação e momentos flectores na viga de fundação, são comparados com os calculados por Fusco e Mazilli (1970) que estudaram a influência da fundação do pórtico por três processos, que correspondem a aplicar uma hipótese de apoio de Winkler, a estudar a fundação por elementos finitos planos e a admitir a viga dividida em tramos iguais (processo OHDE). Verifica-se, como se pode ver pela Fig. 2 uma boa concordância de resultados.

(ii) Galeria de desvio de Cabora Bassa

Pretende-se analisar as alterações introduzidas no estado de tensão inicial existente na vizinhança de uma galeria de desvio da barragem de Cabora Bassa, admitindo que se trata de um meio homogéneo isótropo ou anisótropo com comportamento elástico linear. Foram usados programas de cálculo automático desenvolvidos pelo LNEC, utilizando elementos finitos triangulares com pontos

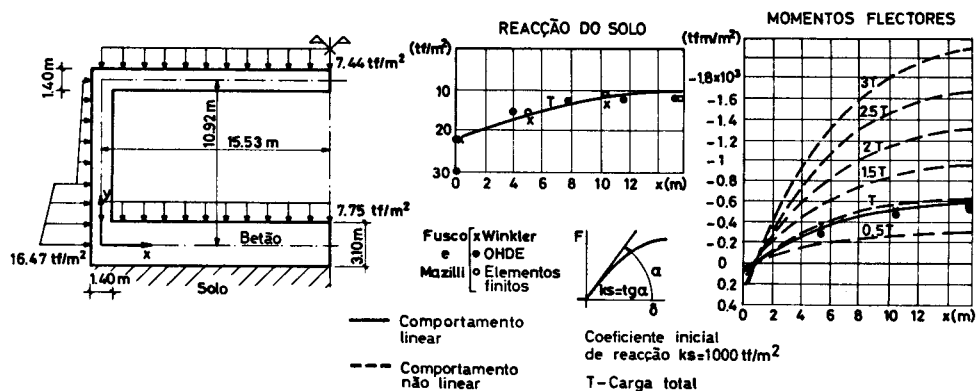
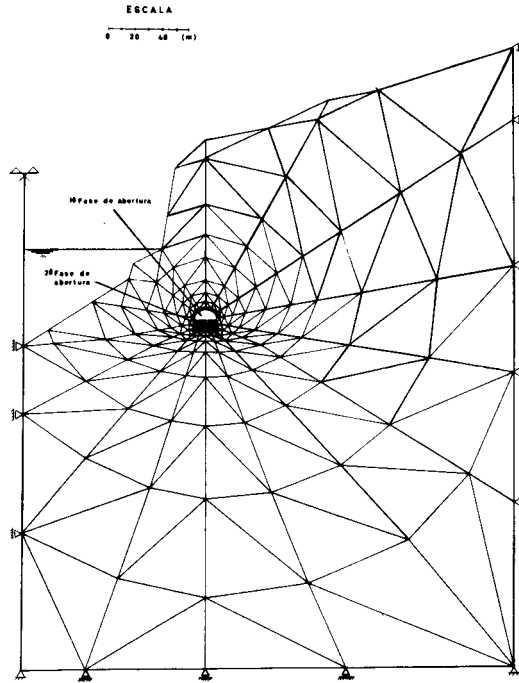


Fig. 2 – Pórtico de um túnel do metropolitano de S. Paulo

nodais nos vértices e elementos finitos de lados curvos com oito pontos nodais (LNEC, 1971), (Sousa, 1974).

No primeiro estudo efectuado, admitiu-se que o maciço era um meio isótropo com módulo de elasticidade  $E = 7 \times 10^6 \text{ tfm}^{-2}$  e um coeficiente de Poisson  $\nu = 0,2$  e analisaram-se equilíbrios planos de uma secção do maciço contendo a secção transversal da galeria que se supôs aberta em duas fases. O meio a analisar foi discretizado por elementos finitos triangulares (Fig. 3).

Existiam medições do estado de tensão inicial em três pontos da vizinhança



*Fig. 3 – Galeria de desvio de Cabora Bassa, Malha de elementos finitos triangulares*

da galeria e obtiveram-se tensões principais com intensidades bastante variáveis. Em face dos valores determinados, fez-se a análise estrutural da galeria para sete estados iniciais de tensão típicos, supostos constantes para todo o maciço, e para as duas fases de escavação.

Indicam-se, a seguir, alguns resultados referentes a uma das hipóteses de estado inicial de tensão. Assim, na Fig. 4, apresentam-se os deslocamentos dos pontos da periferia da galeria após a primeira e a segunda fase de escavação e as tensões na vizinhança da superfície da galeria na primeira e segunda fases. Indicam-se, também, na zona da galeria, aproximadamente circular, as tensões tangenciais recorrendo à solução da Teoria da Elasticidade para um túnel circular. Na Fig. 5, representam-se as tensões verticais no maciço resultantes da escavação da galeria, podendo verificar-se que as tensões iniciais são perturbadas de forma significativa numa zona compreendida dentro de um círculo aproximadamente igual a uma vez e meia a duas vezes a sua altura.

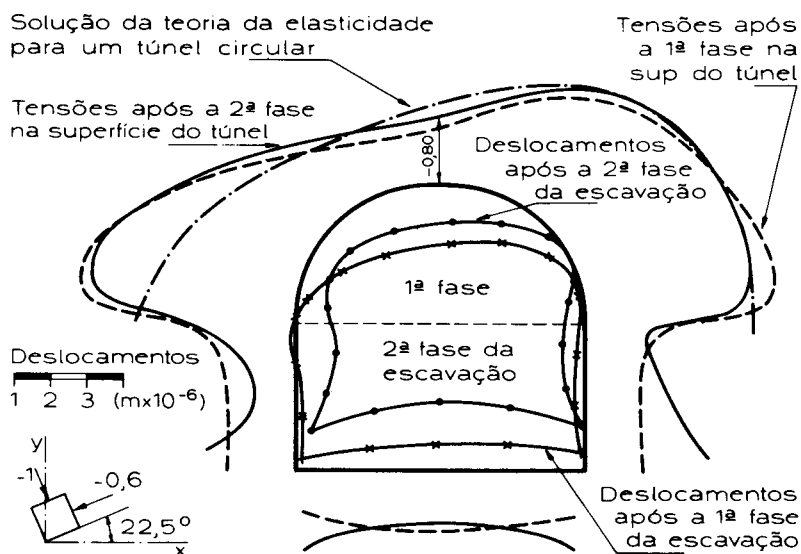


Fig. 4 – Tensões e deslocamentos na vizinhança da superfície da galeria resultantes das escavações para uma das hipóteses do estado de tensão inicial

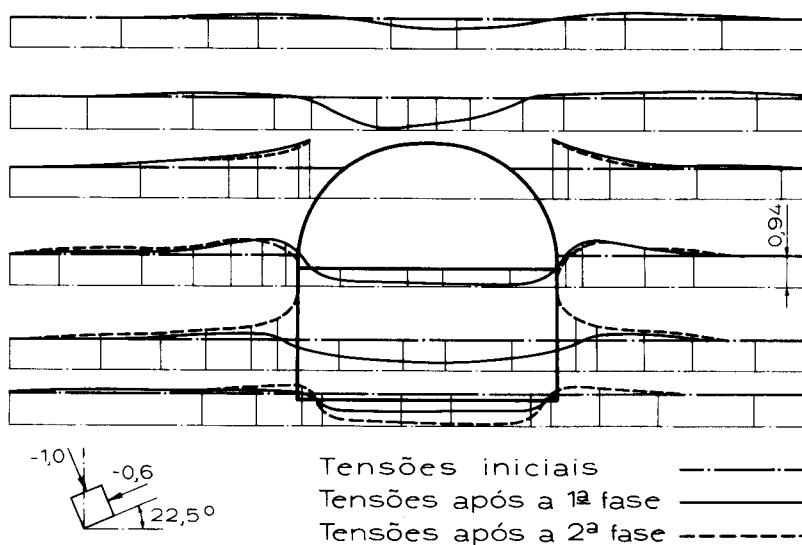


Fig. 5 – Tensões verticais no maciço resultantes da escavação da galeria para uma das hipóteses de estado de tensão inicial

No segundo estudo efectuado, admitiu-se, para a mesma galeria de Cabora Bassa, mas para outra situação de ligações exteriores do maciço, o meio rochoso homogéneo, transverso-isotrópico e, também, com comportamento elástico linear. Estudaram-se as seguintes hipóteses de relações de módulos de elasticidade,  $E_1/E_2 = 1, 5$  e  $1/5$ , sendo a orientação dos estratos horizontal ou vertical.

Dado o suposto comportamento elástico linear para o maciço, considerou-se como solicitação o peso próprio do material e a abertura suposta escavada total e instantaneamente. Aproximou-se a estrutura por elementos finitos isoparaméticos com oito pontos nodais (Fig. 6).

Apresentam-se, na Fig. 7, as tensões principais na vizinhança da galeria para as relações de módulos de elasticidade  $E_1/E_2 = 5$  e  $1/5$ , respectivamente.

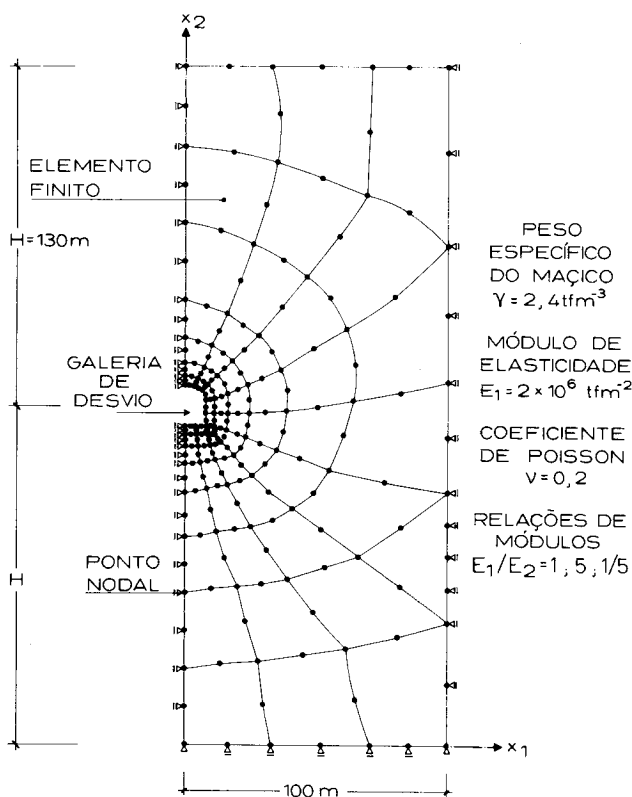


Fig. 6 – Galeria de desvio. Malha de elementos finitos isoparamétricos com oito pontos nodais

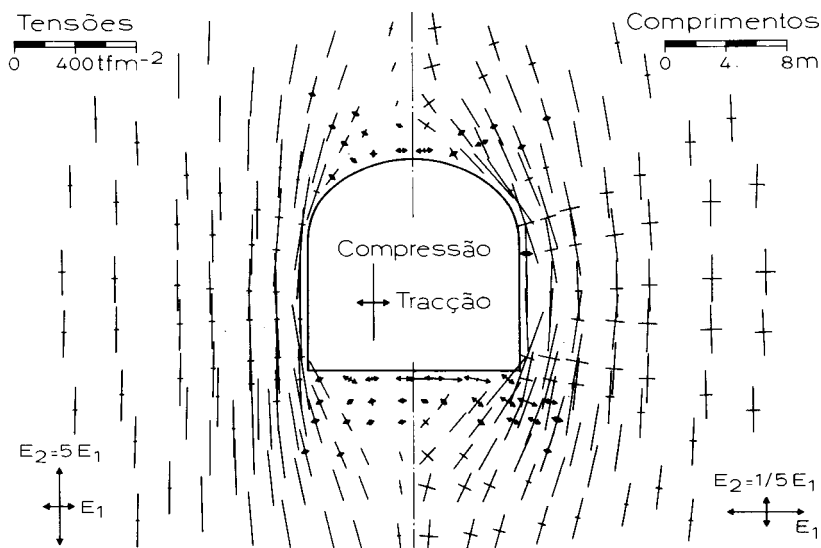


Fig. 7 – Tensões principais no maciço devidas ao peso próprio para duas hipóteses de meio anisótropo

Pode observar-se, no segundo caso, um aumento de tensões horizontais quer de compressão, quer de tracção. As maiores tensões de tracção aparecem na vizinhança da base e do tecto, atingindo na base, no caso dos estratos mais rígidos serem horizontais, valores da ordem de grandeza da tensão aplicada. As maiores tensões de compressão surgem na vizinhança da zona de transição da parede vertical para a base, atingindo valores de três vezes a pressão aplicada.

### (iii) Túnel a grande profundidade

Apresenta-se o cálculo de um túnel revestido a grande profundidade, construído num maciço rochoso, por um modelo contínuo dependente do tempo, pois se admite um comportamento viscoelástico dos materiais rochosos (Zienkiewicz e Valliappan, 1969).

Na Fig. 8, apresenta-se a malha de elementos finitos triangulares utilizada e os valores dos parâmetros que permitem ter em consideração a natureza viscoelástica do maciço. A expressão adoptada para simular o comportamento viscoelástico é dada por:

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} + \sum_{i=1}^2 \sigma a_i (1 - e^{-b_i t}) \quad (18)$$

sendo o módulo de elasticidade do betão e da rocha dados, respectivamente, por  $E_b = 3,16 \times 10^5 \text{ tfm}^{-2}$ ,  $E_r = 8,0 \times 10 \text{ tfm}^{-2}$  e o coeficiente de Poisson, suposto constante, dado por  $\nu = 0,15$ .

Na Fig. 9, referem-se alguns resultados obtidos pela análise de

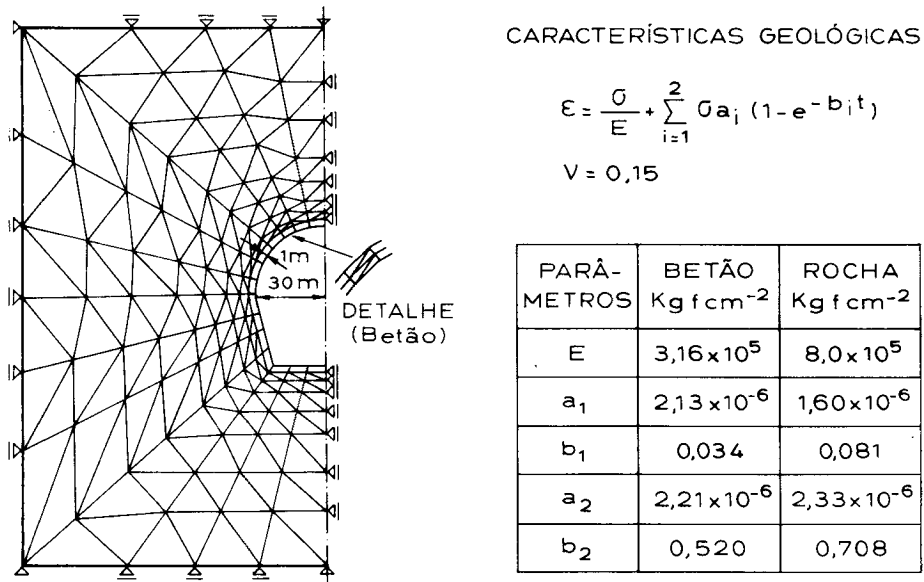


Fig. 8 – Túnel à profundidade de 100m com comportamento viscoelástico. Malha de elementos finitos

elementos finitos para dois instantes de tempo,  $t = 0$  e  $t = 10$  dias. Mostra-se a redistribuição de tensões que ocorre neste intervalo de tempo, podendo notar-se que, enquanto a distribuição geral das maiores tensões de compressão do maciço rochoso não varia muito (apenas as concentrações de tensões são reduzidas), as tensões principais no revestimento do túnel aumentam consideravelmente com o tempo.

(iv) Túnel da barragem de Tarbela

Refere-se uma aplicação de um modelo de cálculo contínuo, admitindo comportamentos não lineares dos materiais mas independentes do tempo, relativa ao dimensionamento do revestimento de uma das zonas de transição mais complexas de um dos túneis da barragem de terra de Tarbela (Rabcewicz e Golzer, 1974).

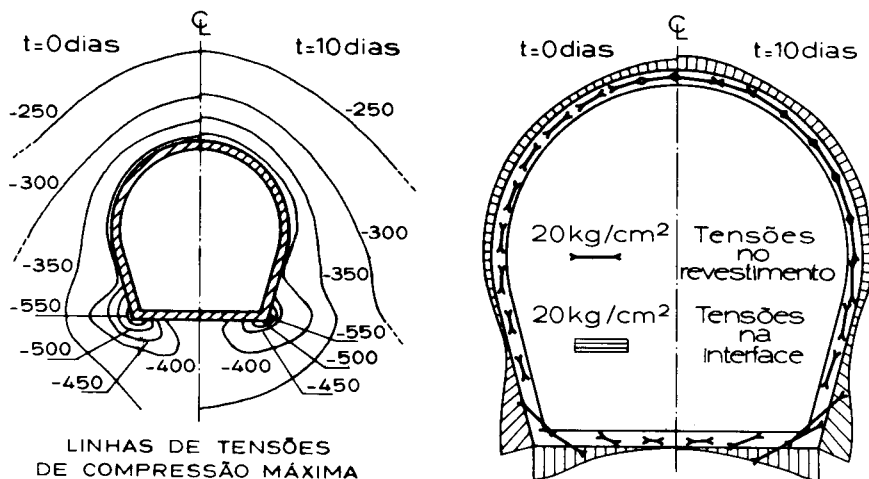


Fig. 9 - Análise viscoelástica do túnel à profundidade de 100m

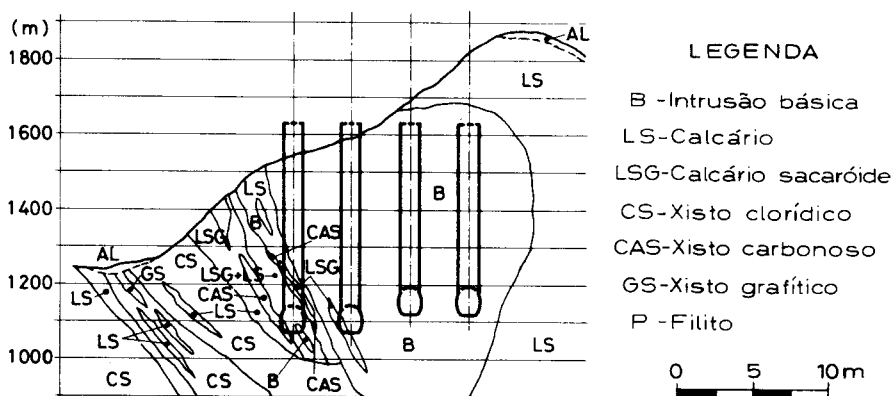


Fig. 10 - Túneis de Tarbela. Corte geológico do maciço

O desenvolvimento dos túneis varia entre 660 e 770 m, com profundidade entre 150 e 270 m e abertura de cerca de 20 m. Os trabalhos de escavação levados a cabo nos túneis são de particular interesse, pois que algumas secções ficaram sob condições geológicas bastante desfavoráveis. Na Fig. 10, apresenta-se uma secção que caracteriza bem as características geológicas do meio. Mostra uma intrusão básica onde se localizam estratos alternativos de formações sedimentares



e metamórficas, consistindo principalmente em calcários e xistos clorídricos.

Para a zona de transição referida, com condições geológicas particularmente más, foi utilizado um dimensionamento empírico durante a execução dos trabalhos o que envolvia o ajustamento da capacidade de suporte do revestimento aos diferentes tipos de rocha. Por isso, para ter uma ideia dos aspectos teóricos do problema, foram efectuados cálculos por elementos finitos conduzidos pelo Instituto de Mecânica das Rochas na Universidade Técnica de Zurique (Grob *et al.*, 1970).

Na Fig. 11 apresenta-se a malha de elementos finitos triangulares utilizada que discretiza os diferentes tipos de rocha.

Os cálculos foram conduzidos para diferentes valores de módulos de elasticidade do revestimento do túnel para investigar o efeito dos diferentes valores de rigidez do revestimento nas tensões que nele se instalam. Admitiram-se comportamentos elasto-plásticos para os diferentes tipos de rocha, caracterizados pelo módulo

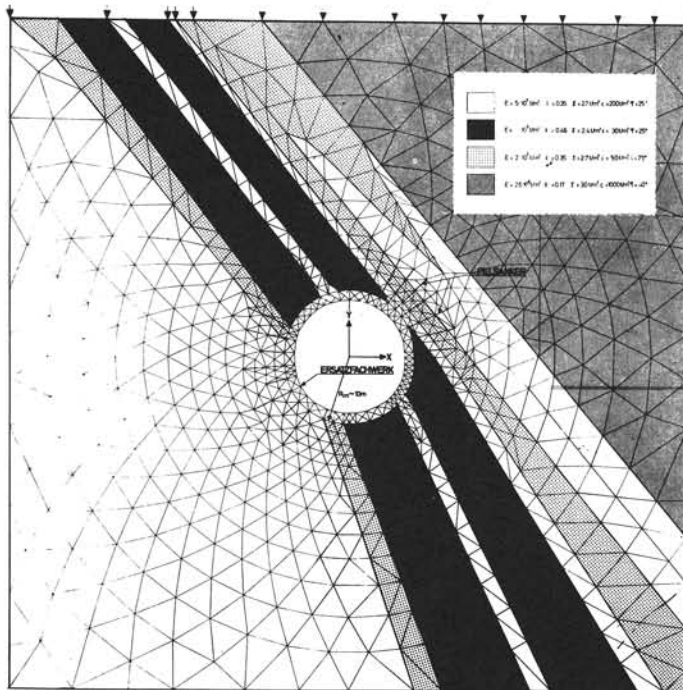


Fig. 11 – Malha de elementos finitos de uma zona de transição de um dos túneis de Tarbela.

de elasticidade, coeficiente de Poisson, coesão e ângulo de atrito (Fig. 11). Os valores para a coesão dos materiais parecem ser excessivamente elevados, devendo, talvez, atribuí-los à existência de ancoragens. Não foi, porém, possível ter em conta o factor tempo e os cálculos não foram baseados no facto de que as escavações são efectuadas por fases, pelo que os resultados obtidos diferiram consideravelmente dos medidos no local da obra, para além do facto de existir uma grande dispersão nos parâmetros mecânicos característicos dos diferentes tipos de rocha.

Apresentam-se na Fig. 12 alguns resultados da análise elasto-plástica efec-

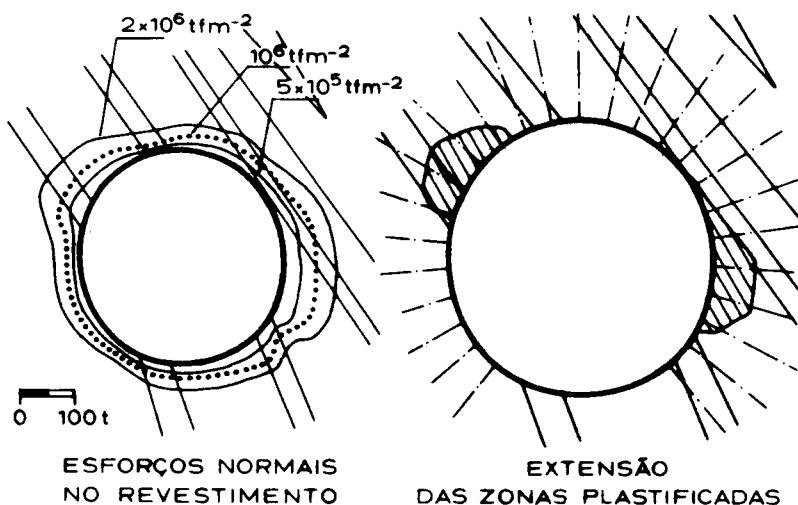


Fig. 12 - Análise elasto-plástica de uma zona do túnel de Tarbela

tuada: esforços normais no revestimento para diferentes módulos de elasticidade e zonas do maciço consideradas plastificadas.

O caso estudado dá uma ideia da importância do método dos elementos finitos no projecto de grandes escavações subterrâneas. Contudo, o método deve ser considerado em conjunção com a experiência obtida em muitos anos, deve considerar de maneira adequada as propriedades geotécnicas dos materiais para inclusão no modelo de cálculo e deve ter em conta, dada a sua importância em análise não linear os processos de escavação e, eventualmente, a influência do

factor tempo.

(v) Central de Morrow Point

Refere-se uma aplicação por um modelo de cálculo descontínuo com elementos finitos de junta, referente ao dimensionamento dos trabalhos subterrâneos da Central de Morrow Point realizados pelo U. S. Bureau of Reclamation (Chang e Nair, 1972).

A central de Morrow Point tem 63 m de comprimento e 17 m de largura, com uma altura variando entre 20 e 41 m, está localizada 122 m abaixo da superfície do maciço e situada num vale bastante escarpado, como se pode ver pela secção transversal na Fig. 13. Indicam-se, também, na figura duas zonas distintas de corte, uma zona inferior (A) e uma superior (B), que intersectam a central. Além disso, verifica-se que o maciço rochoso está compartimentado por três famílias principais de juntas.

Dada a compartimentação do maciço, a análise deste problema poder-se-ia dizer tridimensional, no entanto, para os propósitos de análise foi necessário considerá-lo como um problema de estado plano de deformação. Para criação do modelo de cálculo por elementos finitos, escolheram uma secção contendo a zona

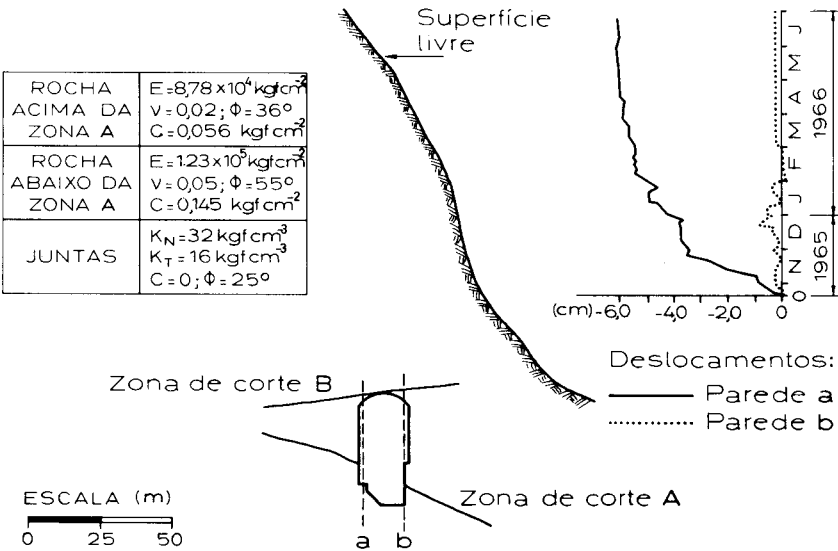


Fig. 13 – Central de Morrow Point. Características mecânicas do maciço e deslocamentos observados

de escavação, as duas zonas de corte indicadas e outros dois planos insipientes de rotura que são simulados por elementos de junta lineares com quatro pontos nodais.

Para caracterizar o material do maciço foram executados bastantes ensaios no sítio da barragem de Morrow Point. Nas zonas de corte, não existia, porém, informação mecânica, daí terem sido supostas duas hipóteses para a rigidez normal e tangencial das juntas. No quadro da Fig. 13, resumem-se as características mecânicas adoptadas para os materiais e para uma das hipóteses de rigidez das juntas.

Como não eram conhecidas as tensões iniciais instaladas no maciço, foi feita uma análise gravitacional do maciço, para as duas hipóteses de rigidez das juntas, tendo sido adoptado um valor elevado do coeficiente de Poisson,  $\nu = 0,49$ ,

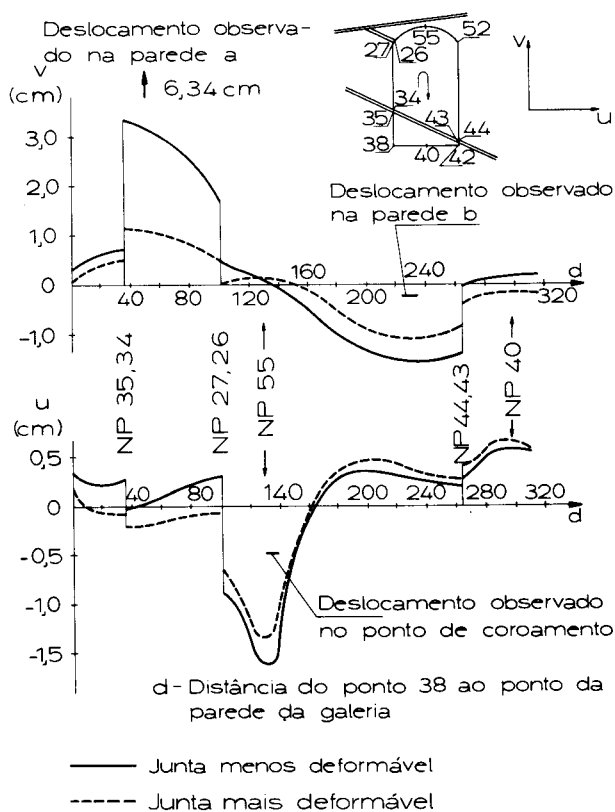


Fig. 14 – Deslocamentos ao longo da superfície da Central de Morrow Point

para simular a existência de tensões horizontais elevadas instaladas no maciço rochoso. Para cada caso, determinaram-se as tensões na periferia da zona escavada e aplicaram-se, em seguida, as forças de superfície que permitiram simular a escavação simultânea de toda a abertura.

Na Fig. 14, apresentam-se os resultados da análise por elementos finitos em termos dos deslocamentos verticais e horizontais ao longo dos pontos nodais da superfície de escavação. A observação de deslocamentos medidos nas paredes a e b da central, cuja história se referencia na figura anterior, permitiu a comparação simultânea de deslocamentos calculados e observados. Os resultados indicam que a análise numérica estimou com certa qualidade os movimentos do maciço, sendo portanto da mesma ordem de grandeza. As diferenças são significativas em termos de percentagens, mas em termos de valores numéricos podem ser considerados satisfatórios, tendo em vista as aproximações da análise feita por elementos finitos, isto é, o facto de ter sido considerado um equilíbrio plano e a escavação não ter sido feita por fases de construção, mas sim instantaneamente.

#### REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BREKKE, T. L.; NOORISHAD, J.; WITHERSPOON, P. A.; MAINI, Y. T., 1972 – *Coupled Stress and Flow Analysis of Fractured Dam Foundations and Rock Slopes*. T4-J, Percolation Through Fissured Rock, Proceedings, Stuttgart.
- CHANG, C. Y.; NAIR, K.; KARWOSKI, W. J., 1972 – *Finite Element Analysis of Excavations in Rock*. Proceedings of the Application of the Finite Element Method in Geotechnical Engineering, Vicksburg, Mississippi.
- DESAI, C. S., 1972 – *Overview, Trends and Projection: Theory and Application of the Finite Element Method in Geotechnical Engineering, "State-of-the-Art"*. Proceedings of the Application of the Finite Element Method in Geotechnical Engineering, Vicksburg, Mississippi.
- DESCOEUDRES, F., 1974 – *Analyse Tridimensionnelle de la Stabilité d'un Tunnel au Voisinage du Front de Taille dans une Roche Élasto-Plastique*. Proceedings of the International Society for Rock Mechanics, Denver (Theme 4).
- DUNCAN, J. A.; GOODMAN, R. E., 1968 – *Finite Element Analysis of Slopes in Jointed Rock*. U. S. Army Engineer Waterways Experiment Station, Corps of Engineers, Report n.º TE-68-1, Berkeley.
- FALCÃO, C. B., 1971 – *Aplicação do Método dos Elementos Finitos ao Dimensionamento de Barragens de Terra*. Tese para especialista do LNEC, Lisboa.
- FALCÃO, C. B.; PEDRO, J. O.; SOUSA, L. R., 1973 – *Estudo de Vigas, Estacas e Pórticos sobre Fundação Deformável*. Reunião sobre a Aplicação do Cálculo Automático à Engenharia Civil, LNEC, Lisboa.

- FUSCO, Jr., F. B.; MAZZILLI, A. P., 1970 – *Análise de uma Estrutura Enterrada pelos Processos de OHDE, do Coeficiente de Recalque e pelo Método dos Elementos Finitos*. XIV South American Conference of Structural Engineering and IV Pan-American Symposium of Structures.
- GOODMAN, R. E., 1974 – *The Mechanical Properties of Joints*. Panel Report of Theme 3 – Proceedings of the Third Congress of the I.S.R.M., Denver.
- GOODMAN, R. E.; DUBOIS, J., 1972 – *Duplication of Dilatancy in Analysis of Jointed Rocks*. Journal of the Soil Mechanics and Foundation Division, Proceedings of A.S.C.E.
- GOODMAN, R. E.; TAYLOR, R. L.; BREKKE, T., 1968 – *A Model for the Mechanics of Jointed Rock*. Journal of Soil Mechanics and Foundation Division, Proceedings of A.S.C.E.
- GROB, M.; KOVARI, K.; VANNOTTI, F.; AMSTAD, 1970 – *Praktische Anwendungen der Finite Element Method in der Turmclaststatik*. Proceedings of the Second Congress of the I.S.R.M., Belgrado.
- LNEC, 1971 – *Estudo das Tensões Resultantes da Escavação da Galeria de Desvio da Barragem de Cabora Bassa*. DEE, Relatório Interno, Lisboa.
- LOUIS, C., 1974 – *Rock Hydraulics*. Bureau de Recherches Géologiques et Minières, Orléans.
- MAHTAB, M. A.; GOODMAN, R. E., 1970 – *Three Dimensional Finite Element Analysis of Jointed Rock Slopes*. Proceedings of the Second Congress of the I.S.R.M., Belgrado.
- NORRIE, D. H.; VRIES, G. de, 1973 – *Finite Element Method*. Academic Press, New York.
- ODEN, J. T., 1972 – *Finite Elements on Nonlinear Continua*. Mc Graw-Hill Book Company New York.
- OKA, Y.; HIRAMATSU, Y., 1974 – *The Behaviour of Viscoelasticity Rock Around Underground Openings with or without Linings*. Proceedings of the Third Congress of the International Society for Rock Mechanics, Denver (Theme 4).
- PEDRO, J. O., 1973a – *Finite Element Stress Analysis of Plates, Shells and Massive Structures*. International Course on Structure Concrete, CEB, Lisboa.
- PEDRO, J. O., 1973b – *Cálculo de Estruturas Laminares e Maciças pelo Método dos Elementos Finitos*. Curso de Especialização n.º 127, LNEC, Lisboa.
- PEDRO, J. O.; FALCÃO, C. B.; SOUSA, L. R., 1972 – *Structural Analysis Deformability of Foundations by Finite Elements*. Geotecnia n.º 8, Lisboa.
- RABCEWICZ, L.; GOLSER, J., 1974 – *Application of the NATM to the Underground Works at Tarbela*. Water Power.
- SALAMON, M. D., 1974 – *Rock Mechanics of Underground Excavations*. General Report of Theme 4 – Underground Openings, Proceedings of the Third Congress of the I.S.R.M., Denver.
- SOUSA, L. R., 1974 – *Aplicação do Método dos Elementos Finitos ao Estudo de Maciços Rochosos*. Tese para especialista do LNEC, Lisboa.
- WITHERSPOON, P. A.; NEUMAN, S. P., 1972 – *Finite Element Methods in Hydrogeology*. Bureau de Recherches Géologiques et Minières, Orléans.

- ZIENKIEWICZ, O. C., 1968 – *Continuum Mechanics as an Approach to Rock Mass Problems*. Rock Mechanics in Engineering Practice, Ed. K. G. Staag and O. C. Zienkiewicz, John Wiley & Sons, London.
- ZIENKIEWICZ, O. C., 1971 – *The Finite Element Method in Engineering Science*. Mc Graw-Hill, London.
- ZIENKIEWICZ, O. C.; VALLIAPPAN, S., 1969 – *Analysis of Real Structures for Creep, Plasticity and Other Complex Constitutive Laws*. Proceedings of the Southampton 1969 Civil Engineering Materials Conference.