

NOTAS SOBRE MECÂNICA DOS SOLOS, ESTADOS CRÍTICOS E EQUILÍBRIO LIMITE* (II PARTE)

Some remarks on Critical State Soil Mechanics and Limiting States of Plastic Equilibrium (Part II)

por
JOSÉ FOLQUE**

III – ESTUDO DO EQUILÍBRIO DE MASSAS TERROSAS COM BASE NA TEORIA DA PLASTICIDADE

1 – INTRODUÇÃO

Como por mais de uma vez se tem realçado, a Mecânica dos Solos, mesmo nas suas formulações clássicas, (poder-se-á mesmo dizer, primitivas) foi buscar à Teoria da Plasticidade o suporte para o tratamento quantitativo de problemas de equilíbrio de maciços.

Têm sido utilizados métodos que, inicialmente pouco potentes, têm visto reforçada ultimamente a sua capacidade de lidar com geometrias e solicitações mais complicadas. Esses métodos são habitualmente expostos sem realçar as vinculações que possuem em relação aos conceitos básicos da Plasticidade, mas haverá vantagem em arrumá-los de acordo com os mencionados conceitos. Assim, irão passar-se primeiramente em revista métodos que têm como suporte o teorema da região inferior, e depois os que se apoiam no teorema da região superior. Acontece, como já foi exposto e se procurará tornar mais explícito, que todas as soluções que nestas formulações se baseiam são formulações de equilíbrio

* Palestras proferidas na COPPE (Univ. Fed. Rio de Janeiro) e nos Cursos de Post-Graduação da Escola Politécnica da Univ. de S. Paulo – Novembro de 1973.

** Engenheiro investigador, Chefe da Divisão de Fundações do LNEC.

limite, que postulam o estudo em fluência e portanto se aplicam ao corpo plástico ideal quando a sua capacidade de resposta, em termos de resistência distorsional, se encontra exaurida. Ora a adopção de modelos mais elaborados de corpo plástico, dos quais os modelos comentados no Cap. II são um exemplo, possibilitam o estudo (por enquanto ainda rudimentar) da situação anterior ao estado limite. Por isso, para terminar, apresentar-se-á também um breve sumário do método dos campos associados, que trata o problema dentro desta linha.

2 – SOLUÇÕES BASEADAS NO TEOREMA DA REGIÃO INFERIOR

Diz o teorema da região inferior que um maciço é estável se um qualquer campo de tensões puder ser atribuído ao maciço que equilibre as solicitações exteriores e de tal forma que em ponto algum do maciço seja excedida a tensão de fluência.

Já na Introdução se apreciou qualitativamente algumas consequências deste teorema. Vejamos agora como se tem procedido a quantificações tomando-o por base. Os problemas que inicialmente se resolveram, e a que se limitará esta exposição, são problemas a duas dimensões. As condições de equilíbrio estático requerem

$$\begin{aligned} \frac{\delta\sigma_x}{\delta x} + \frac{\delta\zeta_{xz}}{\delta z} &= X \\ \frac{\delta\zeta_{xz}}{\delta x} + \frac{\delta\sigma_z}{\delta z} &= Z \end{aligned} \quad (1)$$

sendo evidentemente X e Z as componentes das solicitações mássicas e exteriores.

A condição que requer que em ponto algum do maciço seja excedida a tensão de fluência obriga à escolha de uma função de fluência. É clássica em Mecânica dos Solos a adopção da condição de Mohr-Coulomb

$$\zeta < c + \sigma t_g \varphi \quad (2)$$

Quer dizer que a solução exacta do problema posto implica assim a pesquisa do máximo ζ e a averiguação de que ele não infringe a condição (2).

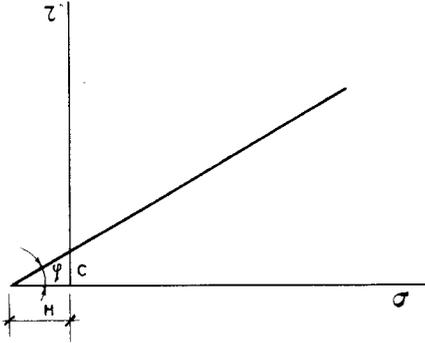


Fig. III-1

Usando a “tensão equivalente” H (cuja definição imediatamente se deduz da Fig. 1) em vez da coesão, c , pode substituir-se (2) por

$$\zeta \ll (\sigma + H) t_g \varphi \quad (2')$$

Para tornar o problema determinado pesquisa-se a equação (2') para a condição de igualdade

$$\zeta = (\sigma + H) t_g \varphi \quad (2'')$$

o que torna bem evidente a razão pela qual a solução encontrada por esta via é uma solução em equilíbrio limite.

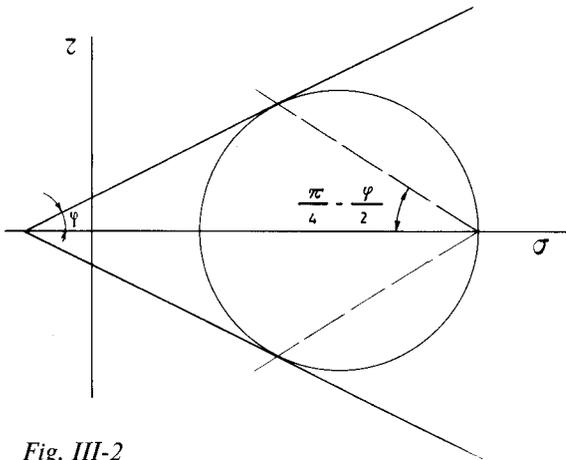


Fig. III-2

Recorrendo à representação em círculos de Mohr (Fig. 2) vê-se imediatamente que a equação (2'') é satisfeita para uma família de facetas cujas direcções fazem o ângulo $\pi/4 - \varphi/2$ com a direcção principal máxima. São as chamadas *superfícies de escorregamento*.

A solução do problema consiste pois na resolução do sistema

$$\begin{aligned} \frac{\delta \sigma_x}{\delta x} + \frac{\delta \zeta_{xz}}{\delta z} &= X \\ \frac{\delta \zeta_{xz}}{\delta x} + \frac{\delta \sigma_z}{\delta z} &= Z \end{aligned} \quad (3)$$

$$\zeta = (\sigma + H) t_g \varphi$$

e na pesquisa das direcções de escorregamento.

Como é óbvio a terceira das equações (3) terá de ser referida às coordenadas x , y . É uma questão de simples manipulação matemática, cujas passagens se omitem, e que leva a

$$\begin{aligned} \frac{\delta \sigma_x}{\delta x} + \frac{\delta \zeta_{xz}}{\delta z} &= X \\ \frac{\delta \zeta_{xz}}{\delta x} + \frac{\delta \sigma_z}{\delta z} &= Z \\ \frac{1}{4} (\sigma_x - \sigma_z)^2 + \zeta_{xz}^2 &= \frac{\text{sen}^2 \varphi}{4} (\sigma_x + \sigma_z + 2H)^2 \end{aligned} \quad (3')$$

2.1 – Soluções simples da Mecânica dos Solos clássica

Como se pode depreender do que fica exposto é fácil, para maciços de geometria simples e condições de solitação particulares, encontrar soluções exactas dentro das postulações feitas.

Considere-se, por exemplo, um maciço semi-indefinido de superfície horizontal solitado só por forças de peso próprio. As tensões verticais e horizontais serão tensões principais:

$$\begin{aligned} \sigma_v &= \gamma h = \sigma_1 \\ \sigma_h &= k_0 \sigma_v = \sigma_2 \end{aligned}$$

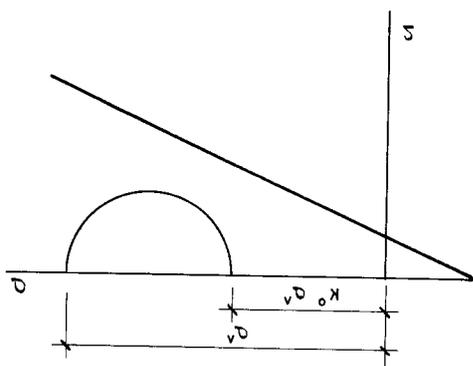
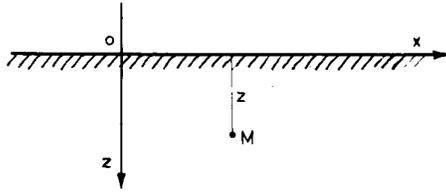


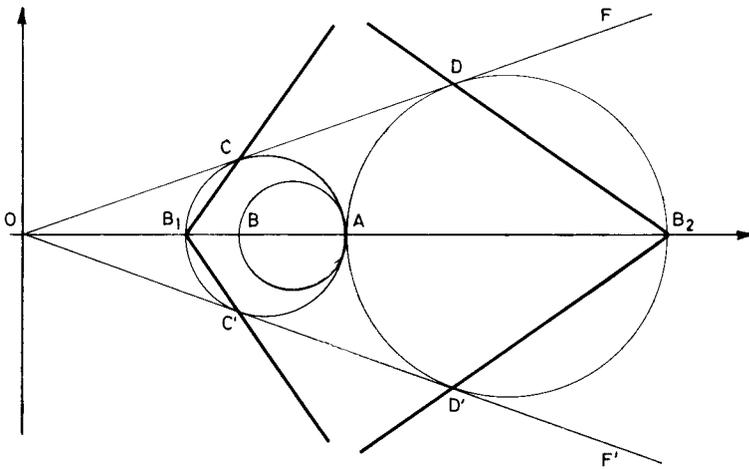
Fig. III-3

Num caso em repouso, em que se saiba atribuir um valor a k_0 , poder-se-á representar o círculo de Mohr da Fig. 3 que mostra que o maciço é estável. Com efeito, o círculo de Mohr exprime as condições de equilíbrio das duas primeiras equações (3') e o facto de ele não tangenciar a curva intrínseca mostra que em nenhum ponto do maciço é atingida a tensão de fluência.

a)

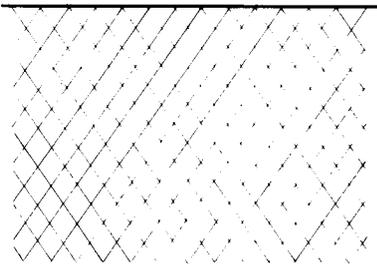


b)



c)

CASO ATTIVO



d)

CASO PASSIVO

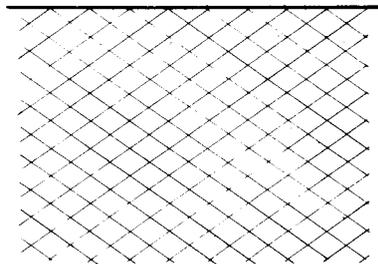


Fig. III- 4

Procurando levar o problema até uma situação limite suponha-se que por redução, de qualquer modo conseguida, da tensão principal σ_1 se leva o círculo a tangenciar a curva intrínseca (círculo AB_1 – Fig. 4)

Porque a tensão principal máxima (ponto A) actua em planos horizontais o polo é B_1 o que permite traçar as superfícies de escorregamento $B_1 C$ e $B_1 C'$.

Poder-se-ia por outra via levar o mesmo maciço à fluência: se de qualquer forma se incrementar a tensão horizontal até se ser conduzido ao círculo AB_2 (Fig. 4). Porque neste caso a tensão principal mínima (ponto A) actua em planos horizontais o polo é B_2 o que conduz às superfícies de escorregamento $B_2 D$ e $B_2 D'$.

Como é sabido os casos descritos são designados, o primeiro por caso activo e o segundo por caso passivo. Para um material obedecendo estritamente à condição de fluência de Mohr-Coulomb expressa por (2'') não há, como é evidente, qualquer distinção reológica entre as situações instaladas nos dois casos; a sua diferença reside na orientação das superfícies de escorregamento em relação à vertical, o que tem um sentido físico importante em Engenharia pela preponderância que nos seus problemas tomam as forças de peso próprio. Outra diferença, esta de muito peso, mas que só adquire sentido para materiais em que a função de fluência depende da “história” de tensões, reside no facto de o caso activo ser atingido partindo de uma certa situação e fazendo *decrecer* a tensão média; no caso passivo as coisas passam-se exactamente ao contrário. Se o material for capaz de “memorizar” as tensões prévias, o caso activo interessa material sobre-consolidado, enquanto que o caso passivo interessa material virgem. As respostas serão obviamente diferentes.

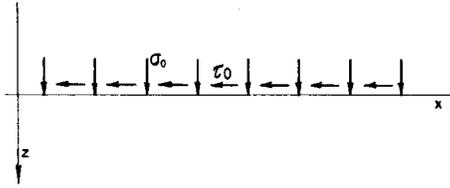
Haverá interesse em rapidamente passar em revista mais alguns casos que comportam soluções estabelecidas pela mesma via dentro da Mecânica dos Solos clássica.

Seja o caso de um maciço incoerente de superfície horizontal com peso próprio e uma solicitação aplicada à superfície (Fig. 5).

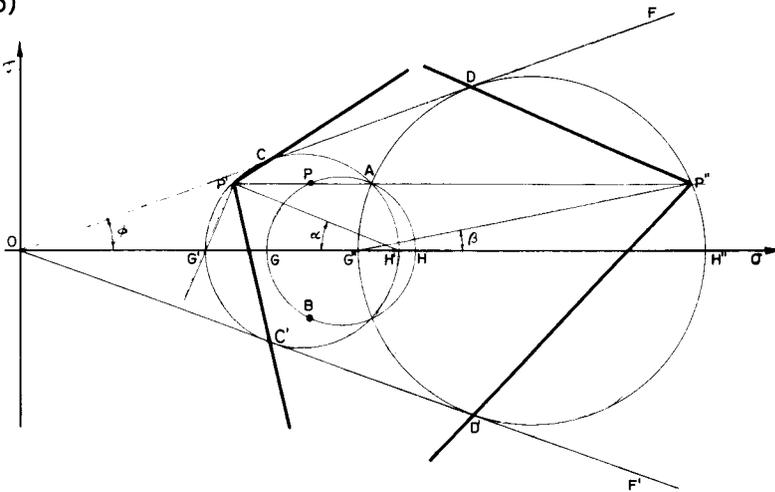
Num ponto M à profundidade z, na faceta horizontal actuará a tensão normal $\gamma Z + \sigma_0$ e a tensão tangencial ζ_0 ; este estado de tensão é representado pelo ponto A do círculo GAH e ele permite definir o polo P.

As direcções principais já não são a horizontal e a vertical, pois que serão definidas pelas direcções PH (máxima) e o PG (mínima). Decrescendo a tensão média (caso activo) a situação limite é atingida para o círculo $G' CH'$.

a)

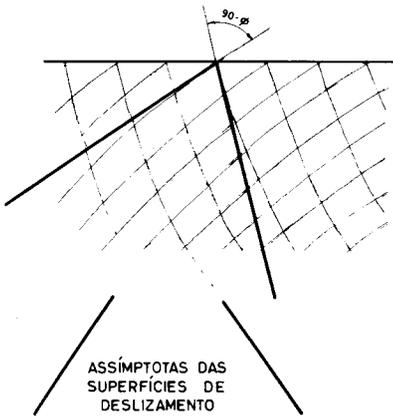


b)



c)

CASO ACTIVO



d)

CASO PASSIVO

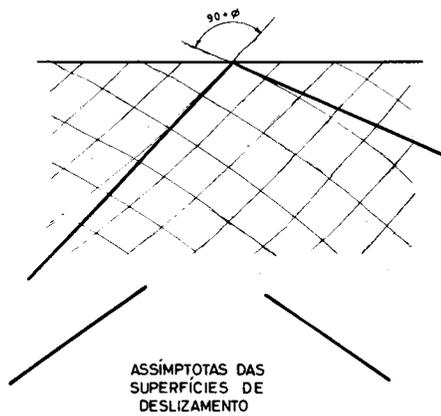


Fig. III-5

As direcções principais serão dadas por P' H' e P' G'; as direcções de escorregamento por P'C e P'C'. Incrementando a tensão média (caso passivo) atingir-se-á o círculo G'' D H'', donde facilmente se deduzem também as direcções principais e as direcções de escorregamento. Repetindo a construção para diversas profundidades obter-se-iam as redes de superfície de escorregamento representadas nas figuras. De sublinhar a acentuada curvatura das superfícies de escorregamento, consequência de decrescer com a profundidade a relação entre a tensão devida à sollicitação exterior e a tensão devida a peso próprio. Quer dizer, repetindo a construção para um ponto mais profundo os ângulos α e β diminuem (pois σ_0 e ζ_0 mantêm-se constantes). Em profundidade tende-se por isso para a rede já encontrada para o maciço sujeito só a peso próprio, o que é óbvio por se tornar irrelevante a sollicitação exterior em comparação com as altas tensões devidas a peso próprio.

Seja agora o caso de um maciço semi-indefinido, incoerente, com superfície inclinada (Fig. 6). À profundidade z , numa faceta com inclinação i , isto é, paralela à superfície do talude, as tensões normal e tangencial serão:

$$\begin{aligned}\sigma &= \gamma Z \cos^2 i \\ \zeta &= \gamma Z \cos i \sin i\end{aligned}$$

que correspondem ao ponto A. Isto permite definir o polo P e consequentemente as superfícies de escorregamento PC e PC' (caso activo). Para o caso passivo o polo é P' e as superfícies de escorregamento são definidas por P'D e P'D'. As superfícies de escorregamento serão planas, pois a construção leva às mesmas direcções para qualquer profundidade. Torna-se evidente que não pode existir um maciço com talude i mais inclinado do que φ , pois isso implicaria círculos de Mohr intersectados pela recta de Mohr-Coulomb.

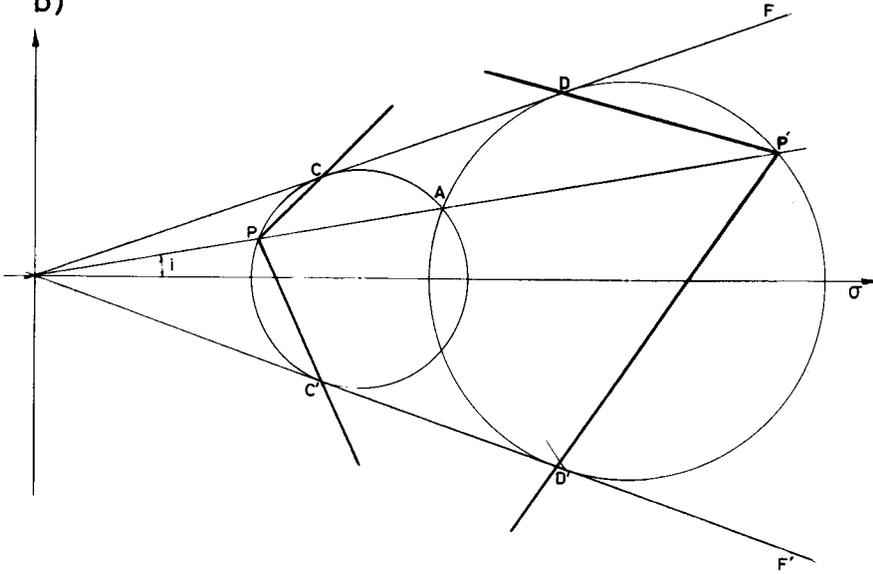
Interessará agora considerar o caso de maciços puramente coesivos. Seja um maciço de superfície horizontal (Fig. 7) sujeito só a forças de peso próprio. As direcções principais são a horizontal e vertical e o maciço entrará em fluência, quer em equilíbrio activo, quer em equilíbrio passivo, para superfícies de escorregamento que fazem 45° com as direcções principais. Atente-se porém no que se passa na camada superficial. Tenha-se presente que as tensões principais são, por exemplo no caso activo:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \sigma_v = \gamma Z \\ \sigma_2 &= \sigma_h = k_0 \gamma Z\end{aligned}$$

a)

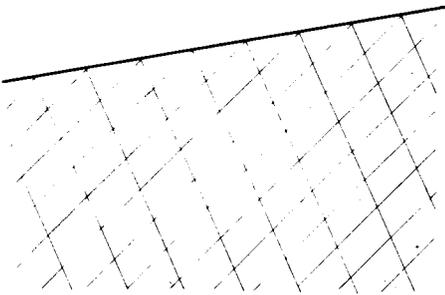


b)



c)

CASO ATTIVO



d)

CASO PASSIVO

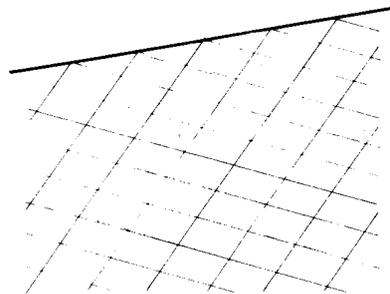


Fig. III-6

Para que o maciço entre em fluência é necessário que o círculo de Mohr tenha o raio c , por outras palavras, a diferença de tensões principais terá de ser

$$\sigma_1 - \sigma_2 = 2c$$

Portanto

$$\gamma Z (1 - k_0) = 2c$$

Para o caso extremo de $k_0 = 0$ a entrada em fluência implica

$$\gamma Z = 2c$$

Para valores de Z pequenos, para um valor Z' tal que

$$\gamma Z' < 2c$$

o maciço não pode sofrer fluência se não se aplicarem solicitações exteriores. Quer dizer que a camada superficial de espessura dada por

$$Z_0 = \frac{2c}{\gamma}$$

não pode entrar em fluência num maciço coerente sujeito só a forças de peso próprio.

Se se considerar agora um maciço puramente coesivo com solicitação exterior aplicada à superfície insuficiente para provocar fluência numa dada camada superficial, virá a situação representada na Fig. 8. De apontar que, ao contrário do que acontecia nos maciços friccionais, as superfícies de escorregamento são planas. Deve-se isso ao facto de a tensão média não influenciar a tensão de fluência do material. Por isso o acréscimo de tensão que se verifica em profundidade devido a peso próprio não modifica a reologia do material e mantém-se constante a distorsão da rede de superfícies de escorregamento causada pela aplicação de solicitações exteriores.

Examine-se agora o caso de um maciço puramente coesivo com superfície superior em talude de inclinação i .

À profundidade Z , em facetas paralelas à superfície, actuam as tensões

$$\sigma = \gamma Z \cos^2 i$$

$$\zeta = \gamma Z \sin i \cos i$$

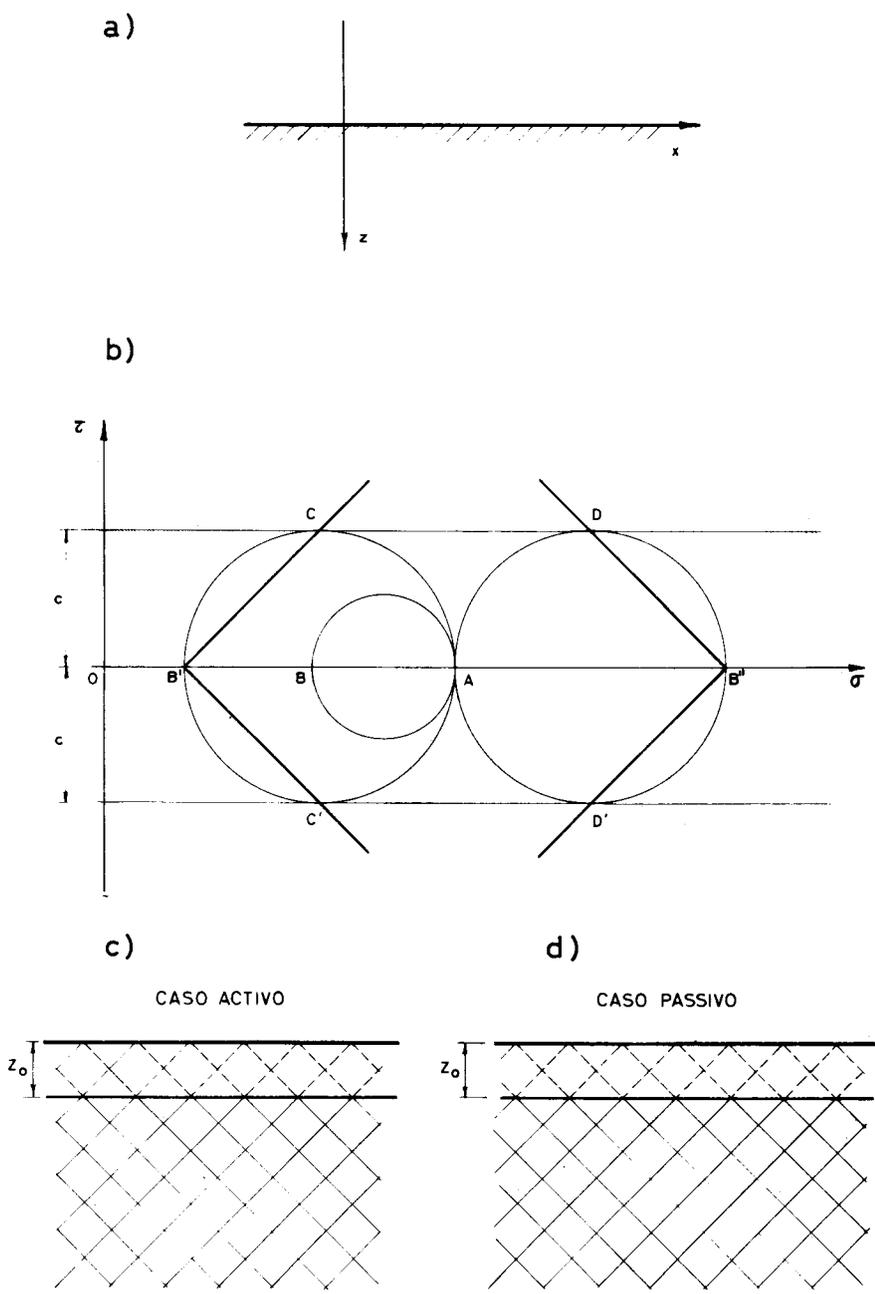
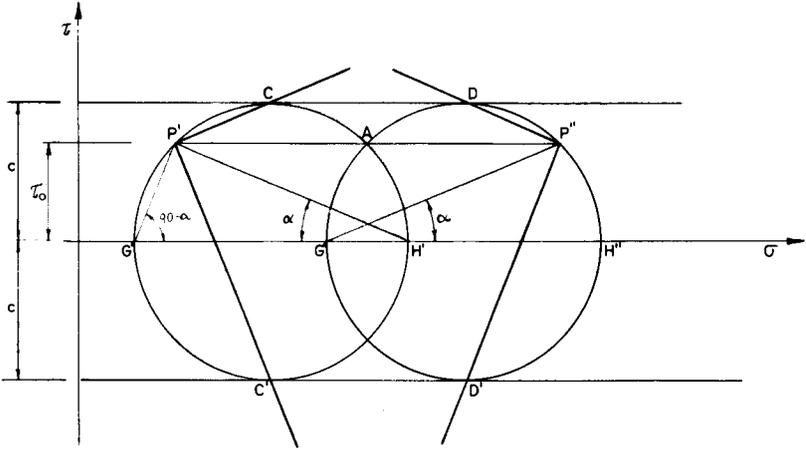


Fig. III-7

a)

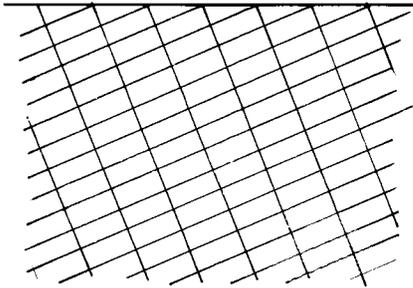


b)



c)

CASO ACTIVO



d)

CASO PASSIVO

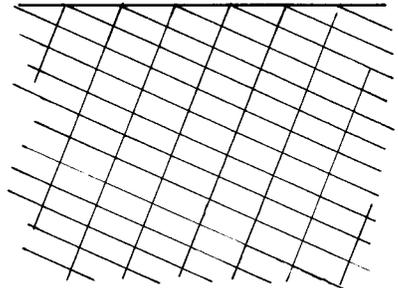


Fig. III-8

que correspondem ao ponto A da Fig. 9. Aumentando a profundidade o ponto representativo do estado de tensão nas facetas inclinadas de i desloca-se ao longo de OA até que atinge M. É evidentemente impossível instalarem-se tensões a que correspondam círculos de Mohr mais para a direita. Por isso, a partir dessa profundidade todo o maciço está em fluência, independentemente de se criarem condições de deformação que levem as tensões principais às relações que implicam o equilíbrio activo ou passivo. As direcções de escorregamento, porque o solo é P_0 , são a paralela ao talude e a perpendicular.

Na camada que vai de Z_0 a Z_1 poderá instalar-se equilíbrio limite activo ou passivo, desde que os constrangimentos às deformações forcem às correspondentes relações σ_1/σ_2 .

Na camada acima de Z_0 não poderá haver fluência a não ser por aplicação de solicitações exteriores.

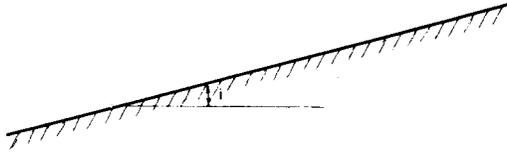
2.2 – Soluções obtidas por resolução usando métodos numéricos, das equações básicas

As soluções que foram apresentadas puderam estabelecer-se, como se julga ter ficado evidente, devido à extrema simplicidade da geometria dos maciços estudados e ao facto de as solicitações serem uniformes ou funções muito simples de x, z . Por isso o círculo de Mohr, que quando tangencia a curva intrínseca corresponde a estados de tensão que satisfazem às equações básicas (3) facilmente se estabelece para uma faceta genérica e dela se extrapola para todo o campo a estudar. (Insiste-se em que um círculo de Mohr é uma representação geométrica das duas primeiras equações (3); se um dado círculo de Mohr tangencia a curva intrínseca, isto é, a superfície de fluência, fica também satisfeita a terceira das equações (3).

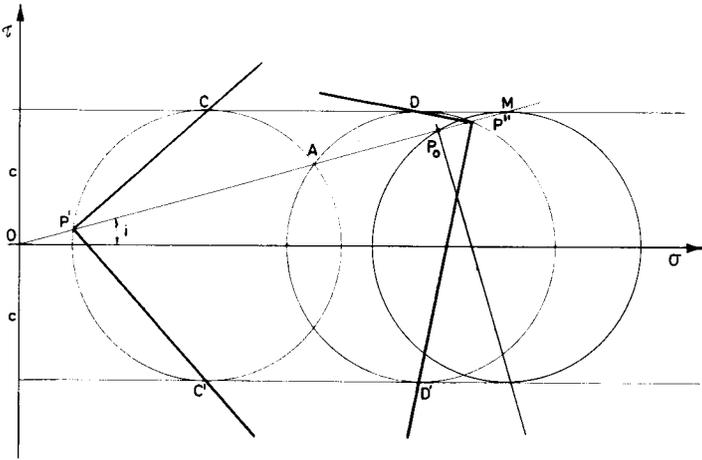
Quando se trata porém de estudos em maciços de geometria algo mais complicada e sobretudo quando as solicitações são funções de x, z menos simples do que as anteriormente consideradas, a cobertura do espaço a estudar por círculos de Mohr é tarefa extremamente difícil. Há por isso que recorrer a outros métodos de resolução das equações básicas (3).

Um dos métodos mais potentes entre os que nos últimos anos se têm proposto é o desenvolvido por Sokolovski, método de resolução numérica por diferenças finitas que veio praticamente preencher o domínio da problemática dos maciços

a)

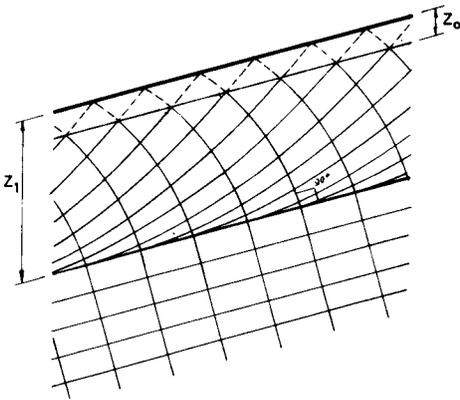


b)



c)

CASO ACTIVO



d)

CASO PASSIVO

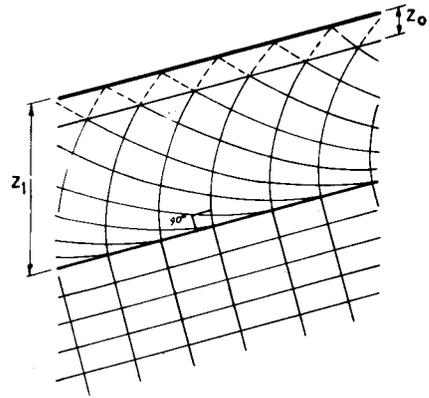


Fig. III-9

terrosos plásticos em equilíbrio-limite. Poderá portanto considerar-se como um vértice no desenvolvimento histórico da Mecânica dos Solos.

Fundamentalmente consiste o método na utilização de adequadas mudanças de variáveis que levam as equações básicas a uma forma em que se torna fácil a sua resolução numérica.

Tomando as equações básicas (3) começar-se-á por substituir, na descrição do estado de tensão num ponto, as grandezas σ_x , σ_z e ζ_{xz} pelas grandezas σ e Θ (Fig. 10) em que σ é a tensão média adicionada de H e Θ é o ângulo que a direcção principal máxima faz com o eixo dos XX.

Portanto vem

$$\sigma = \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_2) + H \quad (4)$$

e as linhas do escorregamento terão por equação

$$\frac{dz}{dx} = \operatorname{tg} (\Theta \pm \mu) \quad \text{em que } \mu = \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) \quad (5)$$

Exprimindo σ_x , σ_z e ζ_{xz} em função de σ e Θ obtém-se

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma (1 + \operatorname{sen} \varphi \cos 2 \Theta) - H \\ \sigma_z &= \sigma (1 - \operatorname{sen} \varphi \cos 2 \Theta) - H \\ \zeta_{xz} &= \sigma \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} 2 \Theta \end{aligned} \quad (6)$$

substituindo estes valores nas equações básicas (3') obtém-se um sistema de duas equações a duas incógnitas, σ e Θ :

$$\begin{aligned} (1 + \operatorname{sen} \varphi \cos 2 \Theta) \frac{\delta \sigma}{\delta x} + \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} 2 \Theta \frac{\delta \sigma}{\delta z} - 2 \sigma \operatorname{sen} \varphi \left(\operatorname{sen} 2 \Theta \frac{\delta \Theta}{\delta x} - \right. \\ \left. - \cos 2 \Theta \frac{\delta \Theta}{\delta z} \right) = X = \gamma \operatorname{sen} \alpha \quad (7)^* \\ \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} 2 \Theta \frac{\delta \sigma}{\delta x} + (1 - \operatorname{sen} \varphi \cos 2 \Theta) \frac{\delta \sigma}{\delta z} + 2 \sigma \operatorname{sen} \varphi \left(\cos 2 \Theta \frac{\delta \Theta}{\delta x} + \right. \\ \left. + \operatorname{sen} 2 \Theta \frac{\delta \Theta}{\delta z} \right) = Z = \gamma \cos \alpha \end{aligned}$$

Com estas primeiras equações transformou-se portanto o problema, que inicialmente consistia na pesquisa da distribuição de σ_x , σ_z e ζ_{xz} no espaço x,z, na pesquisa, no mesmo espaço, da distribuição de σ e Θ .

* $X = \gamma \operatorname{sen} \alpha$ e $Z = \gamma \cos \alpha$ num maciço sujeito a peso próprio com talude de inclinação i.

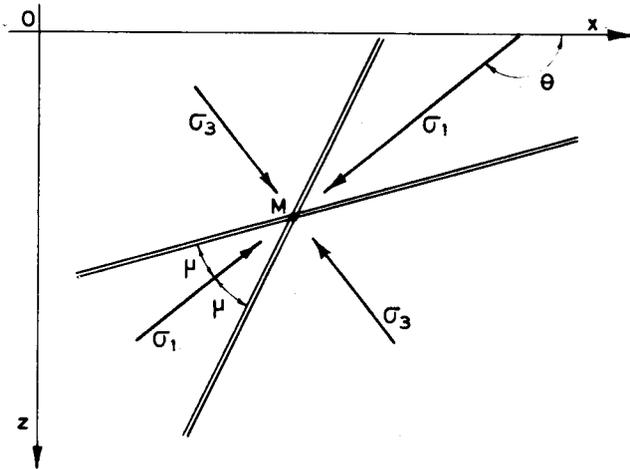
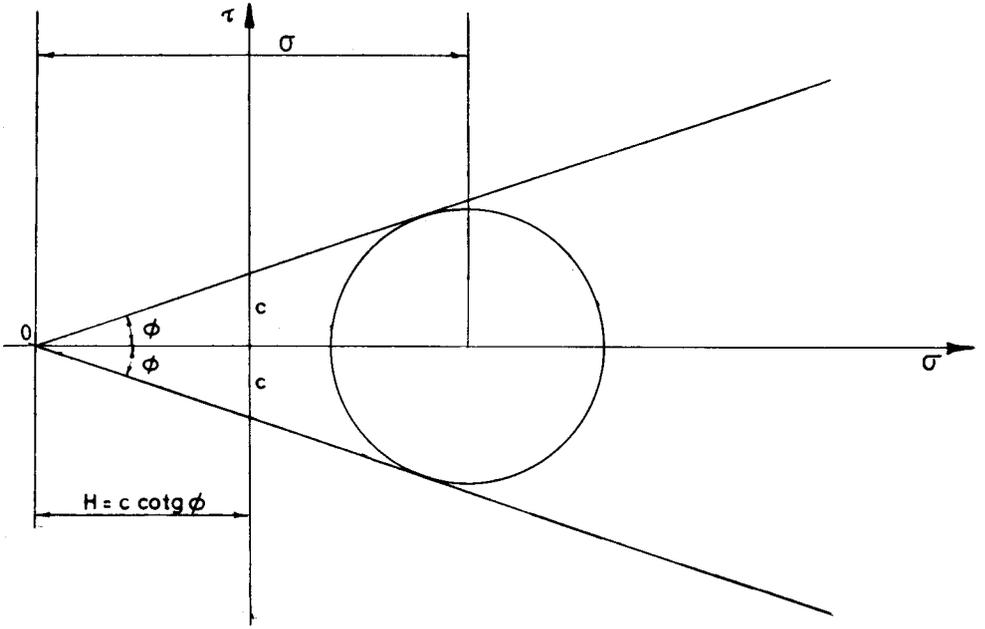


Fig. III-10

Prosseguindo com convenientes mudanças de variáveis Sokolovski adoptou em seguida

$$X = \frac{1}{2} \cotg \varphi \frac{\sigma}{\sigma_0} \quad (8)$$

em que σ_0 é uma tensão arbitrária de referência. E fazendo

$$\begin{aligned} \xi &= X + \Theta \\ n &= X - \Theta \end{aligned} \quad (9)$$

por substituição nas equações (7) e conveniente manipulação matemática obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{\delta \xi}{\delta x} + \operatorname{tg}(\Theta + \mu) \frac{\delta \xi}{\delta z} &= a \\ \frac{\delta n}{\delta x} + \operatorname{tg}(\Theta - \mu) \frac{\delta n}{\delta z} &= b \end{aligned} \quad (10)$$

em que:

$$\begin{aligned} a &= \frac{\gamma \cos(\Theta + \alpha - \mu)}{2 \sigma \operatorname{sen} \varphi \cos(\Theta + \mu)} \\ b &= - \frac{\gamma \cos(\Theta + \alpha - \mu)}{2 \sigma \operatorname{sen} \varphi \cos(\Theta - \mu)} \end{aligned} \quad (11)$$

As equações (10) são as equações básicas de Sokolovski e examinando-as constata-se que o problema agora está posto neste pé: trata-se de averiguar qual a distribuição no espaço x, z das grandezas ξ e n . Na realidade as equações (10) não dão a distribuição especial de ξ e n mas sim as condições a que devem satisfazer as suas primeiras derivadas. Por isso o estudo da questão prossegue usando um artifício. Suponha-se que as funções ξ e n são conhecidas. Seja por exemplo:

$$\xi(x, z) = x^2 + z^2$$

Num ponto do maciço de coordenadas $x=3$ e $z=4$ será $\xi=25$. E se se procurar qual o lugar geométrico dos pontos do maciço em que $\xi=25$ obter-se-á uma circunferência de raio 5 (Fig. 11). Quer dizer que a recta de equação $\xi=25$ no espaço ξn corresponde à circunferência de raio 5 indicada na Fig. 11, no espaço x, z . Uma família

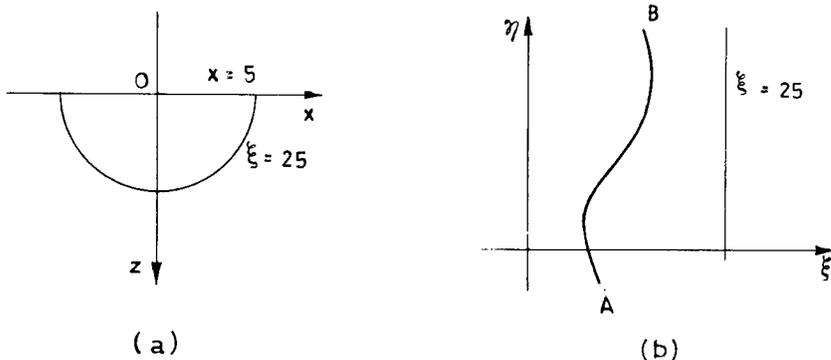


Fig. III-11

de rectas corresponde a uma família de circunferências no outro espaço. É a esta técnica que em literatura de língua inglesa se chama "mapping". Procurando agora qual a correspondência no espaço x, z de uma qualquer curva AB no espaço ξ, η (Fig. 11) ter-se-á que verificar

$$\begin{aligned} d\xi &= \frac{\delta \xi}{\delta x} dx + \frac{\delta \xi}{\delta z} dz \\ dn &= \frac{\delta n}{\delta x} dx + \frac{\delta n}{\delta z} dz \end{aligned} \quad (12)$$

Estas equações juntamente com as equações (10) formam um sistema de quatro equações a quatro incógnitas cuja resolução conduz a

$$\begin{aligned} \frac{\delta \xi}{\delta n} &= \frac{adz - \operatorname{tg}(\Theta + \mu) d\xi}{dz - \operatorname{tg}(\Theta + \mu) dx} \\ \frac{\delta \xi}{\delta z} &= \frac{d\xi - adx}{dz - \operatorname{tg}(\Theta + \mu) dx} \\ \frac{\delta n}{\delta z} &= \frac{bdz - \operatorname{tg}(\Theta - \mu) dv}{dz - \operatorname{tg}(\Theta - \mu) dx} \\ \frac{\delta n}{\delta z} &= \frac{dn - bdx}{dz - \operatorname{tg}(\Theta - \mu) dx} \end{aligned} \quad (13)$$

Examinando este sistema constata-se que se os denominadores do 2.º membro forem nulos se obtém

$$\frac{dz}{dx} = \operatorname{tg}(\Theta \pm \mu) \quad (14)$$

que são, como já ficou exposto, as equações das linhas de escorregamento.

Se os numeradores do 2.º membro forem também nulos o sistema tem uma infinidade de soluções constituindo duas famílias de curvas:

1.ª família

$$\frac{dz}{dx} = \operatorname{tg} (\Theta - \mu) \quad \frac{dn}{dx} = b$$

2.ª família

$$\frac{dz}{dx} = \operatorname{tg} (\Theta + \mu) \quad \frac{d\xi}{dx} = a \quad (15)$$

Em terminologia matemática designam-se estas curvas por “características”. Definem, como é evidente, a rede de linhas de escorregamento, fornecendo as equações:

$$\frac{dn}{dx} = b \quad \frac{d\xi}{dx} = a$$

a lei de variação das grandezas ξ e n ao longo das características.

Se os denominadores de (13) não forem nulos, sendo-o os numeradores, as derivadas $\frac{d\xi}{dx}$, $\frac{d\xi}{dz}$, $\frac{dn}{dx}$, $\frac{dn}{dz}$ são descontínuas o que significa que haverá discontinuidades na distribuição de tensões. Mas continua a verificar-se

$$\frac{dz}{dx} = \operatorname{tg} (\Theta \pm \mu)$$

Quer dizer que as linhas de discontinuidades são ainda linhas de escorregamento limites, que marcam as fronteiras da região do espaço x, z no interior do qual o material está em fluência. Essas fronteiras são também, portanto, linhas de escorregamento ou envolventes de linhas de escorregamento, como a física do fenómeno o requer. Obviamente a formulação proposta para solução do problema não se aplica fora das superfícies limites de escorregamento.

O prosseguimento do método de Sokolovski é o desenvolvimento matemático necessário para aplicar métodos numéricos à resolução das equações estabelecidas. É uma questão de pormenorização de técnica matemática que se prescinde de apresentar neste curso, havendo mais interesse em apresentar alguns resultados de problemas concretos, resultados a que se foi conduzido pelo método atrás sucintamente apresentado.

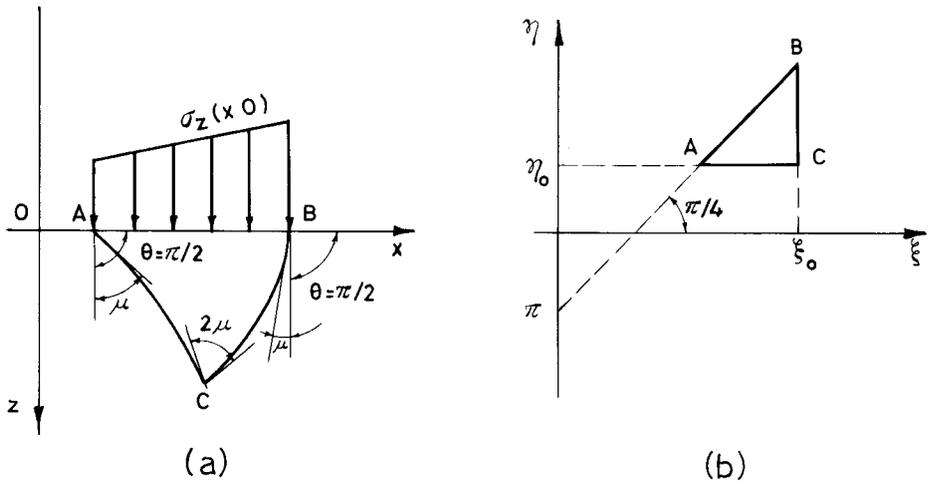


Fig. III-12

A Fig. 12 representa o andamento das linhas de escorregamento limite e respectivo "mapping" no caso de um maciço semi-indefinido, solicitado em parte da superfície com uma solicitação que varia linearmente com x , sendo o estado de tensão no maciço tal que ocorre "afundamento" da superfície carregada. Está-se pois perante um caso de equilíbrio limite activo, por diminuição do constrangimento lateral. A linha AB (coincidente com o eixo dos x) é portanto a direcção principal mínima e consequentemente o ângulo ao longo de AB vale $\pi/2$. Substituindo nas equações (9) virá portanto

$$\xi = \eta + \pi$$

o que justifica o andamento de AB representado no "mapping".

Tomando pontos da linha AB , onde obviamente são conhecidos os valores de x, z, σ e Θ , como pontos de partida e dando acréscimos finitos a ξ e η pode-se determinar os valores destas grandezas para pontos vizinhos de AB no interior do triângulo ABC .

Por sucessivos passos cobrir-se-á todo o domínio ABC o que constituirá a solução do problema.

A Fig. 13 apresenta o problema quantitativamente resolvido para um maciço de $\varphi = 30^\circ$, $\gamma = 120$ psi e $H = 120$ psi. Note-se a curvatura das linhas de escorregamento, causada pela assimetria da solicitação exterior.

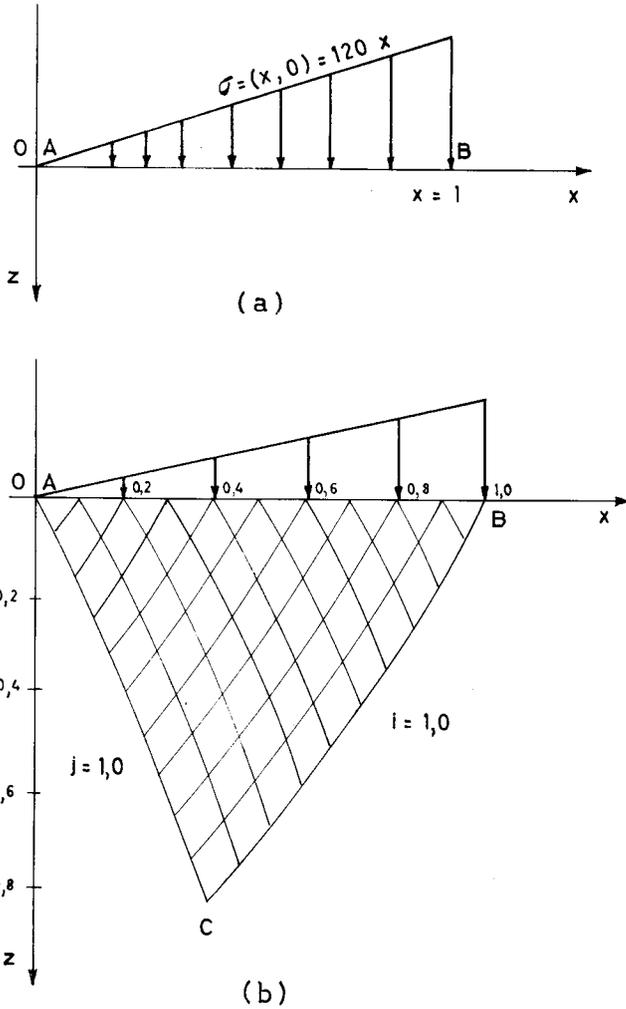


Fig. III-13

A Fig. 14 corresponde a um caso semelhante de maciço e solitação, mas em que o estado de tensão no maciço é levado ao limite que provoca “levantamento” da superfície carregada. É portanto um caso de equilíbrio passivo, cujos resultados quantitativos estão representados na Fig. 15.

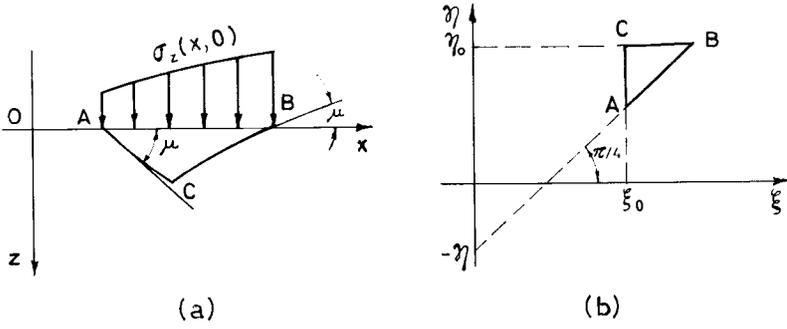


Fig. III-14

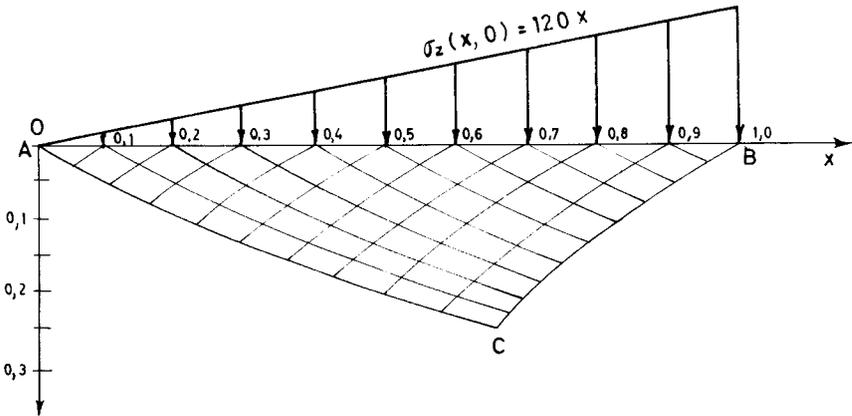


Fig. III-15

A Fig. 16 apresenta um outro caso de equilíbrio ativo, com uma solicitação exterior que obedece a lei um pouco mais complexa. Encontra-se também representado o “mapping” básico de que se parte para resolução de problema.

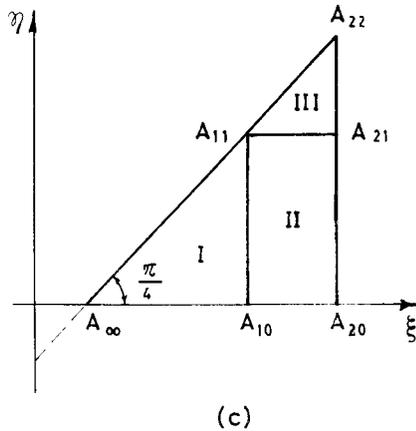
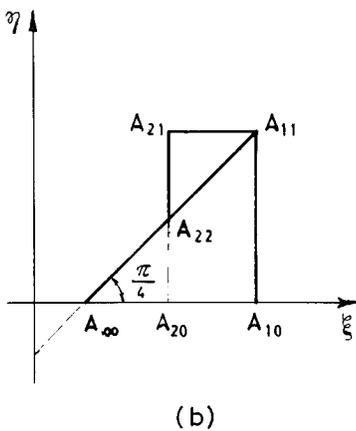
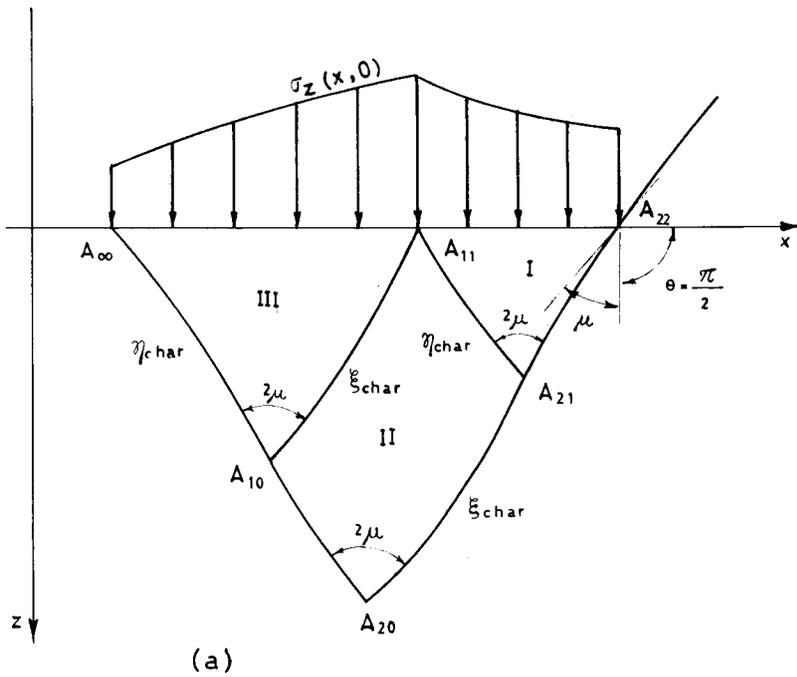


Fig. III-16

A Fig. 17 representa dois casos de “capacidade de carga”. Como é usual em Mecânica dos Solos designa-se por capacidade de carga a solicitação $q(x)$ que

provoca o afundamento do maciço sob a sua acção com conseqüente levantamento das zonas em que actua $p(x)$. Na Fig. 16 estão também representados os “mappings” respectivos.

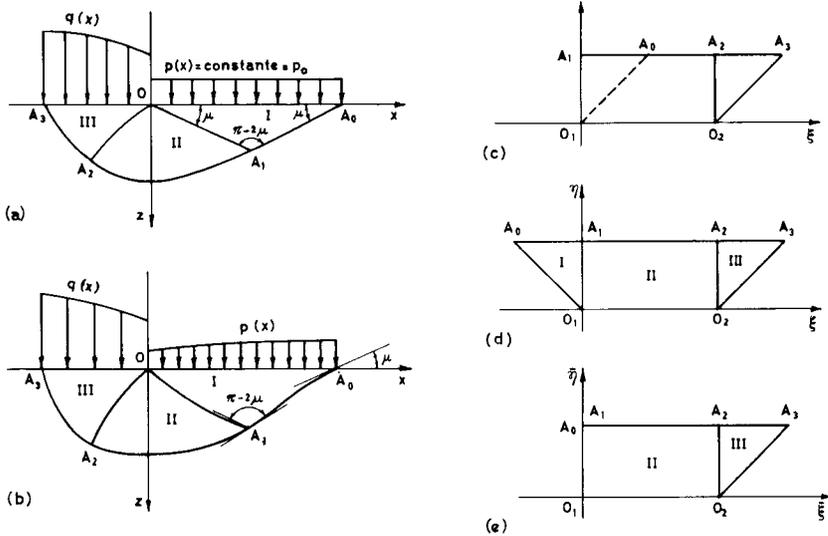


Fig. III-17

3 – Soluções baseadas no teorema da região superior – Os métodos baseados no teorema da região superior têm larga aplicação na Mecânica dos Solos clássica e, como se mostrou na Introdução com o comentário relativo ao método de Coulomb, podem mesmo considerar-se métodos pioneiros. Contudo, modernamente não têm sido retomados de forma a introduzir-lhes melhoramentos que lhes aumentem as potencialidades.

Muitos dos métodos utilizados no cálculo de muros de suporte, de capacidade de carga de fundações e de estabilidade de taludes, são métodos baseados no teorema da região superior. Recordando o que diz este teorema vem: dado um maciço e uma solicitação, se um campo de deformação cinematicamente viável puder ser atribuído de tal forma que o trabalho realizado na deformação pelas forças aplicadas (na unidade de tempo) seja igual ou superior ao trabalho dissipado internamente pelas forças reactivas, o maciço é instável.

Ilustrando com um exemplo muito simples, seja o caso de capacidade de carga ilustrado na Fig. 18. Supondo uma trajectória de deformação circular de raio R e ângulo ao centro α , na metade direita da superfície do maciço actuará a força

$$\sigma_d R \operatorname{sen} \alpha$$

e na metade esquerda

$$\sigma_e R \operatorname{sen} \alpha$$

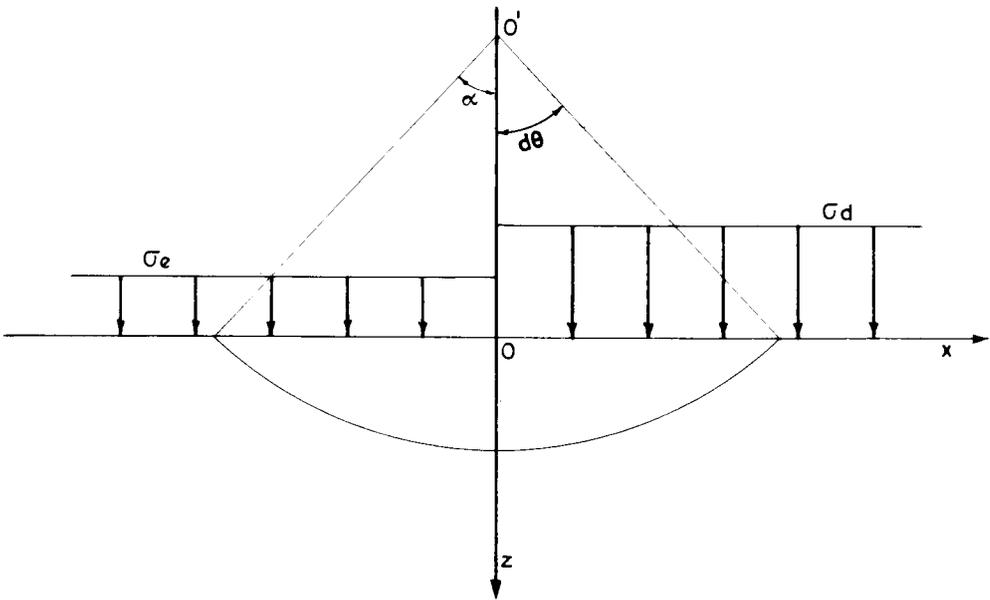


Fig. III-18

Se houver um deslocamento $d\Theta$, a metade direita do maciço “afundar-se-á”, em média:

$$\frac{1}{2} R \operatorname{sen} \alpha d\Theta$$

A mesma grandeza terá o “levantamento” médio da metade da esquerda. O trabalho realizado pelas forças exteriores será

$$\frac{1}{2} (\sigma_d - \sigma_c) R^2 \sin^2 \alpha d\Theta$$

Por outro lado, ao longo da superfície de deslizamento, sendo o maciço puramente *coesivo* com coesão c , pode ser mobilizada a força

$$2R \alpha c$$

O trabalho dissipado quando se dá o deslocamento angular $d\Theta$ a que corresponde o deslocamento linear $Rd\Theta$ ao longo da superfície de deslizamento será

$$2 R^2 \alpha c d\Theta$$

O teorema da região superior, no limite, isto é, quando há igualdade dos trabalhos realizados pelas solicitações exteriores e pelas forças dissipativas, leva a

$$\frac{1}{2} (\sigma_d - \sigma_c) R^2 \sin^2 \alpha d\Theta = 2 R^2 \alpha c d\Theta$$

e portanto

$$\sigma_d - \sigma_c = \frac{4 \alpha c}{\sin^2 \alpha}$$

Procurando o valor de α que torna máxima a diferença $\sigma_d - \sigma_c$, vem

$$\frac{d}{d\alpha} \left(\frac{4 \alpha c}{\sin^2 \alpha} \right) = 0$$

Encontra-se $\alpha = 1,166$ rad o que conduz a

$$(\sigma_d - \sigma_c)_{\max} = 5,53 c$$

Serve bem este exemplo simples para ilustrar as limitações que se põem em relação ao aperfeiçoamento formal dos métodos baseados no teorema da região superior. Assim, atente-se em que no exemplo dado foi fácil estabelecer as forças reactivas máximas ao longo da superfície de deslizamento por se tratar de um maciço puramente coesivo. Se assim não fosse seria necessário pesquisar o estado de tensão ao longo dessa superfície. Ora essa pesquisa só por si implicaria a resolução do problema a partir do teorema da região inferior. Se, como é de resto largamente praticado, se considerar satisfatório para a precisão desejada, uma distribuição de tensões

deduzida da teoria da elasticidade, ou de regras empíricas, não tem sentido aperfeiçoar formalmente as etapas subsequentes tomando como ponto de partida hipóteses de primeira aproximação.

Note-se ainda, como dificuldade grande que se depara quando se aplica estes métodos com formulação simplificada como a que se expôs, que o estudo feito demonstrou a estabilidade para uma dada superfície de deslizamento arbitrada. Nada informa sobre outras possíveis superfícies limites de escorregamento. Por isso nas formulações clássicas estes métodos são aplicados, como é bem sabido, como métodos de tentativas, em que se pesquisam numerosas superfícies viáveis, para adquirir uma razoável certeza de que se cobriu o campo de superfícies de deslizamento possíveis.

4 – *Método dos campos associados* – Como tem sido salientado, os métodos a que se tem feito referência são métodos de equilíbrio limite pois que implicam a consideração, para resolução quantitativa de um problema, de que a massa terrosa em estudo está em fluência. Concretamente, nos métodos baseados no teorema da região inferior procura-se pesquisar o limite superior dessa região. Em problemas de Engenharia dá-se uma dada estrutura como estável quando se constata que ela existe na região inferior, abaixo do mencionado limite. Mas as soluções deste tipo, como é evidente, nada informam sobre as deformações que exibem as estruturas cuja estabilidade por essa via se demonstrou.

A possibilidade de estabelecer modelos reológicos, para corpos elasto-plásticos, de razoável adequabilidade à descrição de solos, abre perspectivas teóricas para soluções mais ricas em informação. De facto poderá admitir-se que para uma dada solicitação o maciço não está em fluência mas tem um estado de tensão que se pode caracterizar por um certo φ mobilizado, quer dizer, por uma certa inclinação máxima da tensão total sobre a faceta incidente. Se essa inclinação for constante em todo o maciço, um método para pesquisar a distribuição de tensões no maciço pode ser elaborado usando exactamente a mesma via proposta por Sokolovski, substituindo evidentemente a função de fluência por uma função análoga em termos de φ_{mob} . Mas não é de esperar que φ_{mob} seja constante em todo o maciço. Então terá de procurar-se, e esse método foi estabelecido por Serrano (1972), uma solução numérica em que possa levar-se em conta a variação de φ_{mob} no espaço x, z .

Para que tenha sentido físico e interesse de aplicação, o que acaba de ser dito tem de ser encarado à luz da possibilidade de exprimir φ_{mob} em

função das deformações ocorrentes. Encare-se agora, para simplificação hermenêutica da questão, o problema com outro enfoque; se se caracterizar o estado de deformação de um maciço em função da sua dilatação v , ângulo cujo seno é a relação entre o incremento de deformação volumétrica e o incremento de deformação distorsional, vem que o ângulo v representará para o estudo matemático do campo de deformações o mesmo papel que no método de Sokolovski representa o ângulo φ . Quer dizer que a pesquisa quantitativa do campo de extensões de um maciço pode ser efectuado usando a mesma metodologia que se usa na pesquisa do campo de tensões. Ora bem, se se dispuser agora de uma função que permita a associação dos dois campos, por outras palavras, de uma função que relacione tensões com deformações plásticas, poderá procurar-se a compatibilização dos dois campos.

Estas são as linhas gerais das técnicas que têm sido utilizadas para resolver problemas por esta via, técnicas que têm sido designadas por “método dos campos associados”. São necessariamente métodos de iteração que se poderão resumir na seguinte marcha geral de cálculo.

- a) Determinação em 1.^a aproximação do campo de tensões com uma dada distribuição de φ_{mob} .
- b) Determinação da rede de características de deformação associada ao campo de tensões determinado.
- c) Aplicação de um incremento de deformação na fronteira do domínio.
- d) Determinação do campo de deformações consequente.
- e) Determinação do novo campo de tensões, por compatibilização com as deformações determinadas.

Prossegue-se por iteração até à convergência desejada. O método como se depreende, é trabalhoso e por enquanto só foi possível aplicá-lo à resolução de problemas muito simples. Mas tem interesse teórico evidente e a sua elaboração subsequente, com correspondente compilação de tabelas e ábacos, mostra-se actualmente uma tarefa bastante promissora para preencher esta importante lacuna em Mecânica dos Solos: estudo de equilíbrios de maciços reais, fora de situações limites, em termos de, simultaneamente, se conhecerem os campos de tensões e de deformações.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BARREIROS MARTINS – Capacidade de carga de fundações, Lourenço Marques, 1965.
- CORREIA DE ARAÚJO – Elasticidade e Plasticidade, Porto, 1961.
- DRUCKER – Plasticity, Structural Mechanics, Proc. of the First Symp. on Naval Structural Mechanics, Pergamon Press, Oxford, 1960.
- DRUCKER, GIBSON e HENKEL – Soil Mechanics and work-hardening theories of plasticity, Geotechnique, n.º 6, 1956.
- GUEDES DE MELO e MARANHA DAS NEVES – Equilíbrios limites e estados críticos, Curso 110, LNEC, 1974.
- HARR – Foundations of theoretical Soil Mechanics, Mc Graw Hill, New York, 1966.
- HENKEL – The effect of overconsolidation on the behaviour of clays during shear, Geotechnique, n.º 6, 1956.
- HVORSLEV – Physical components of the shear strength of saturated clays, Research Conf. on Shear Strength of cohesive Soils, ASCE, Boulder, 1960.
- PRAGER e DRUCKER – Soil Mechanics and Plastic Analysis, Quart. of Applied Mathematics, 10:2, 1952.
- ROSCOE e THURAIRAJAH – On the uniqueness of yield surfaces for wet clays, Proc. Int. Symp. on Rheology, Grenoble, 1964.
- SCHOFIELD e WROTH – Critical State Soil Mechanics, Mc Graw Hill, New-York, 1968.
- SOKOLOVSKI – Statics of Soil Media, Butterworths, Londres, 1960.
- SERRANO – El método de los campos asociados y su aplicación a los problemas de empujes – Proc. V Europ. Conf. Soil Mech. – Madrid, 1972.