

# NOTAS SOBRE MECÂNICA DOS SOLOS, ESTADOS CRÍTICOS E EQUILÍBRIO LIMITE\* (I PARTE)

## Some remarks on Critical State Soil Mechanics and Limiting States of Plastic Equilibrium (Part I)

por  
JOSÉ FOLQUE\*\*

**RESUMO** – São resumidamente apresentados os princípios da Teoria da Plasticidade em que se baseiam os métodos de equilíbrio limite usados em Mecânica dos Solos. Expõe-se com mais desenvolvimento um desses métodos, o de Sokolovski.

Resume-se e discute-se o conjunto de princípios que é habitual designar por Mecânica dos Solos dos estados críticos.

**SYNOPSIS** – The fundamentals of Theory of Plasticity are presented and correlated with the methods of computation, used in Soil Mechanics, based on the limiting states of plastic equilibrium. The method of Sokolovski is briefly exposed.

The basic principles of Critical State Soil Mechanics are presented and discussed.

As presentes notas constituem uma condensação do Curso 110 do LNEC que se efectuou em Julho de 1973\*\*\*. O principal objectivo desse curso foi realçar as vinculações da Mecânica dos Solos à Teoria da Plasticidade. Com efeito, as soluções que tradicionalmente têm sido usadas em Mecânica dos Solos para estudo de estabilidade de maciços são soluções de equilíbrios limites, que implicam constância das tensões mobilizadas e sua independência das deformações. Inserem-se por isso no âmbito das Teorias de Plasticidade clássicas. Uma formulação recente, em que é conseguida a solução de equilíbrios com geometria e

---

\* Palestras proferidas na COPPE (Univ. Fed. Rio de Janeiro) e nos Cursos de Post-Graduação da Escola Politécnica da Univ. de S. Paulo – Novembro de 1973.

\*\* Engenheiro investigador, Chefe da Divisão de Fundações do LNEC.

\*\*\* Guedes de Melo e Maranha das Neves, "Mecânica dos Solos – Equilíbrios limites e estados críticos", LNEC (em impressão). GEOTECNIA 11

solicitações complexas, deve-se a Sokolovski. É uma formulação extremamente potente podendo dizer-se que só tem as limitações que derivam da adopção de um modelo relativamente simplista para os corpos plásticos cujo comportamento se pretende estudar.

A Mecânica dos Solos dos estados críticos é fundamentalmente a definição de um corpo plástico que se pretende mais realista do que os modelos de corpo plástico que foram usados nas formulações primitivas – corpo rígido-plástico e corpo elasto-plástico.

O que será importante questionar é se a utilização dum modelo mais realista terá repercussões na prática da Engenharia, por se poder dispor de soluções mais próximas da exactidão, mesmo à custa de uma maior complexidade de tratamento. Parte da resposta está contida nos circunstanciais da questão pois se efectivamente o modelo é mais realista as soluções serão forçosamente mais “exactas”. Mas o problema tem outra conotação em ligação com a engenharia prática, nomeadamente a determinação dos parâmetros descritivos do comportamento mecânico das massas terrosas que se pretende estudar. Ora nesse domínio acontece que aquilo que se ganha em exactidão formal no uso de métodos mais requintados não pode ser substanciado por correspondente exactidão na descrição do comportamento mecânico. Não se põem só obstáculos de determinação instrumental mas também uma circunstância factual que não se viu ainda como ultrapassar: as características mecânicas são erráticas de ponto para ponto de um maciço e não parece prático medianizá-las de forma a poder adoptar parâmetros realmente representativos.

Posto isto, qual a repercussão prática da Mecânica dos Solos mais elaborada que tem ocupado os esforços dos investigadores de Cambridge e seus seguidores? Pois de facto não se poderá atribuir-lhe consequências práticas imediatas, com implicações directas no dimensionamento, interessando assim aos técnicos que com estas matérias têm de litar nos projectos e nos estaleiros. Mas há uma repercussão que acaba sempre por resultar no domínio prático e que justifica que esta matéria se aprofunde: o maior domínio que proporciona em relação aos mecanismos causais, a maior aproximação que representa em relação a um “real” que se postula e que quanto mais cingido se encontrar melhor se deixará subjugar. Esta subjugação da natureza ensina a prática histórica que teve sempre, a mais ou menos longo prazo, repercussões no campo das aplicações.

## I – INTRODUÇÃO; MECÂNICA DOS SOLOS E TEORIA DA PLASTICIDADE

A Mecânica dos Solos, na sua formulação clássica, foi elaborada como uma aplicação da Teoria da Plasticidade. É este contudo um facto que frequentemente não se encontra salientado nos tratados, mesmo nos de bom desenvolvimento, e que muitas vezes surge até como simplesmente intuído. Julga-se que apresenta interesse, pelo menos do ponto de vista epistemológico, tornar patente esta ligação, o que a seguir se vai tentar. Isto obrigará a uma digressão pela Teoria da Plasticidade, que necessariamente será breve e resumida.

As teorias de plasticidade tradicionais têm por objecto o estudo de corpos que em reologia fenomenológica podem ser descritos tomando por base os diagramas tensões-deformações das Figs. 1 e 2.

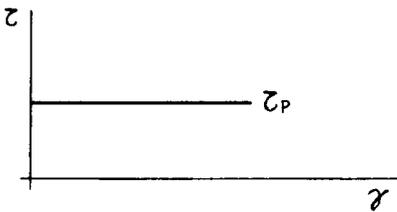


Fig. 1.1

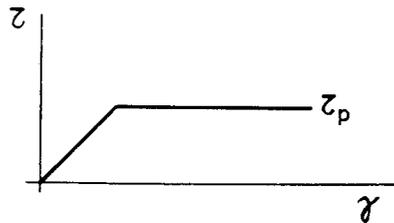


Fig. 1.2

A Fig. 1 corresponde ao corpo rígido-plástico em que se admite que o corpo não sofre deformações enquanto uma certa tensão de fluência não é atingida. Quando essa tensão é atingida o corpo entra em deformação plástica a tensão constante. Por deformações plásticas, designa-se só as “deformações irreversíveis”. A Fig. 2 corresponde ao corpo elasto-plástico em que também, após se atingir a tensão de fluência, deformações se processam a tensão constante; para tensões inferiores às da fluência há deformações proporcionais às tensões.

É fácil figurar modelos analógicos para os corpos rígido-plástico e elasto-plástico. A Fig. 3 representa um modelo adequado para descrever um corpo rígido-plástico. Consiste num bloco rígido assente sobre uma base também rígida. O corpo deslocar-se-á quando a força aplicada atingir o valor que corresponde a vencer o atrito de escorregamento bloco-base. Para forças menores



Fig. I.3

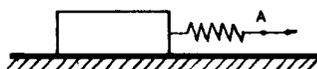


Fig. I.4

não há deslocamentos; forças maiores provocarão aceleração no corpo porque a reacção no contacto bloco-base não pode exceder a força de atrito. A Fig. 4 corresponde a um modelo do corpo elasto-plástico. Da mesma forma se processará deslocamento a força constante quando for atingida a força de atrito no contacto bloco-base; para forças inferiores, porém, haverá deslocamentos do corpo, representados pelos deslocamentos do ponto A, consequentes da deformação elástica da mola posta em série com o bloco.

É importante sublinhar que os corpos que são estudados na teoria da plasticidade postulam-se como tendo comportamentos reológicos independentes do tempo. Nisso também são descritores fiéis os modelos das Figs. 3 e 4. Com efeito os deslocamentos desses corpos exibirão velocidades que traduzirão directamente as taxas de evolução no tempo das forças aplicadas, sem intervenção de parâmetros *viscosos*. Quer dizer que num processo em que se imponha, por exemplo ao modelo da Fig. 3, um deslocamento com velocidade qualquer, a tensão no contacto bloco-base não depende da velocidade e nunca excede  $\zeta_p$  (Fig. 1). Num processo em que se imponha forças exteriores, se a força  $F$  for suficiente para provocar cedência no contacto bloco-base o bloco entrará em movimento acelerado com uma aceleração dada por  $(F - \zeta_p S)/\underline{m}$  em que  $\underline{m}$  é a massa do bloco e  $S$  a superfície do contacto bloco-base.

Importa fazer notar que os diagramas e modelos apresentados são crua-mente esquemáticos no que se refere à qualificação do estado de tensão que provoca a fluência. Na realidade não se pretendeu com esses modelos mais do que fazer uma descrição genérica do tipo de relação que se estabelece entre tensões e deformações, encaradas com generalidade. Mas efectivamente deformações plásticas de um corpo real (e consequentemente da sua contrapartida em modelo, mesmo pouco rigoroso) dão-se para uma infinidade de combinações de estados de tensão; por outras palavras, sobrepondo tensões tangenciais a tensões isotrópicas haverá uma infinidade de combinações que levarão à cedência: nos casos extremos o corpo exibirá cedência para uma tensão puramente isotrópica, e sofrerá cedência para uma tensão de corte puro. Nestes termos, tomando como eixos coordenados componentes da tensão, poder-se-á definir uma função

$F(\sigma_{ij})$  (Fig. 5) – que se designará por função de cedência – que define os estados de tensão combinada,  $\sigma_{ij}$ , para a qual se dão deformações plásticas. Para um acréscimo de sollicitação que leve a tensão de O a A o corpo terá resposta elástica (ou rígida) e o mesmo se passará quando a sollicitação levar a tensão até B. Atingido B o corpo entrará em cedência. É óbvio que para o corpo ideal da plasticidade clássica não podem existir estados de tensão fora da fronteira definida por  $F(\sigma_{ij})$ .

Em muitos corpos reais acontece que, após plastificação, por anulação das sollicitações exteriores e nova aplicação da sollicitação, se constata que a tensão de cedência aumenta. Por outras palavras, a curva de cedência mudou de posição, afastando-se mais do ponto O. Estes corpos são designados por “corpos plásticos com endurecimento”.

A particularização de algumas propriedades importantes da curva de cedência e das conformações que assumem para corpos reais (isto é, para modelos que dos corpos reais bastante se aproximam) torna-se mais fácil após discutir a importante problemática envolvida no “postulado da estabilidade” de Drucker.

Por analogia com as definições clássicas de equilíbrio estável, instável e indiferente podem-se definir corpos plásticos estáveis, instáveis e neutros. Recapitulando sumariamente aquelas noções tome-se o corpo rígido representado na Fig. 6 em três posições.

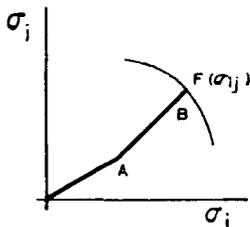


Fig. 1.5

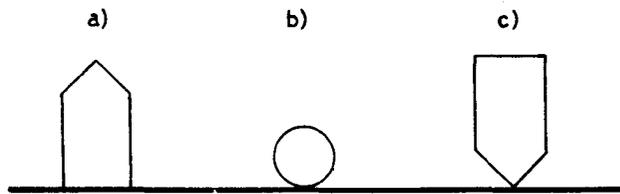


Fig. 1.6

O corpo é constituído por um tronco de cilindro rematado por um tronco de pirâmide, assente num plano rígido horizontal. Na posição a) o corpo está em equilíbrio estável, na posição b) em equilíbrio indiferente, e finalmente, na posição c) em equilíbrio instável. Supondo que uma força horizontal é aplicada no extremo superior do corpo na posição a) este sofre uma rotação

que se anula quando a força é retirada. A força exterior tem que realizar trabalho para provocar o deslocamento por rotação. Já na posição c) uma força horizontal, mesmo pequena, instabilizará o corpo; para que o deslocamento por rotação fique contido na gama dos pequenos deslocamentos torna-se necessário que a força aplicada realize trabalho negativo, por outras palavras, terá de se aplicar, imediatamente após a perturbação, uma força de sentido contrário ao deslocamento. Por outras palavras ainda a perturbação (incremento de sollicitação infinitesimal aplicado pelo agente exterior) provocaria a libertação de trabalho do sistema, trabalho esse susceptível de ser utilizado. A massa do sistema adquiriria energia durante a aceleração observando-se um deslocamento rápido e incontrolável. Na posição b), como é óbvio, o corpo sofre deslocamentos horizontais sendo nulo o trabalho realizado pelas forças aplicadas, ou por outras palavras, para forças aplicadas praticamente nulas. Pode portanto em resumo definir-se equilíbrio estável, instável e indiferente de acordo com o sinal do trabalho realizado pelas forças exteriores, que será positivo, no primeiro caso negativo no segundo e nulo no terceiro.

Em analogia com o equilíbrio de sistemas Drucker define, em relação ao comportamento de corpos plásticos, corpos estáveis como aqueles em que é positivo o trabalho das forças exteriores associadas a uma dada deformação plástica; nos corpos instáveis pelo contrário, será negativo o trabalho realizado pelas forças exteriores, (sendo de apontar que as argilas sobre-consolidadas poderão constituir um bom exemplo do corpo plástico instável). Como é óbvio terá comportamento plástico indiferente ou neutro o corpo que se deforma, nalguma zona da sua "resposta", sem acréscimo de trabalho das forças exteriores. Daqui se deprende que os corpos ideais da plasticidade clássica terão comportamento neutro uma vez atingida a plastificação.

A teoria da plasticidade, nas suas aplicações à engenharia civil, tem-se ocupado sobretudo de corpos estáveis. Será importante mostrar algumas importantes peculiaridades que podem apontar-se à descrição matemática destes corpos e que imediatamente se deduzem do postulado da estabilidade.

Considere-se novamente num sistema de eixos coordenados correspondentes às componentes de tensão, a curva de cedência da Fig. 7. Admitindo que coincidem as direcções principais de tensão e extensão, aos eixos  $\sigma_i$ ,  $\sigma_j$  associam-se eixos  $\epsilon_i$ ,  $\epsilon_j$ . Solicitando o corpo desde o estado de tensão representado por  $a$  até ao estado de tensão representado por  $b$ , tenha-se em atenção que haverá deformação elástica no trajecto  $ab$  e só após se atingir o ponto  $b$  se processará extensão

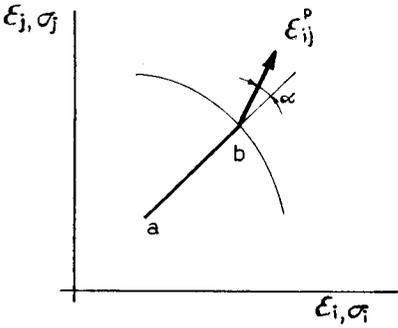


Fig. 1.7

plástica,  $\epsilon_{ij}^p$ . O postulado da estabilidade diz que o trabalho realizado pelas forças exteriores para provocar deformações plásticas, terá de ser positivo ou nulo.

Portanto

$$\overline{(\sigma_{ij}^b - \sigma_{ij}^a)} \cdot \overline{\epsilon_{ij}^p} \geq 0$$

ou seja

$$|(\sigma_{ij}^a - \sigma_{ij}^b)| \cdot |\epsilon_{ij}^p| \cos \alpha \geq 0$$

Concluiu-se daqui que os vectores  $\overline{(\sigma_{ij}^a - \sigma_{ij}^b)}$  e  $\overline{\epsilon_{ij}^p}$  não podem formar um ângulo obtuso. E consequentemente a curva de cedência terá de ser convexa, pois se tivesse um trecho côncavo (Fig. 8) seria possível associar um vector de deformação plástica a uma trajectória de tensão que com ele formasse um ângulo maior do que  $90^\circ$ .

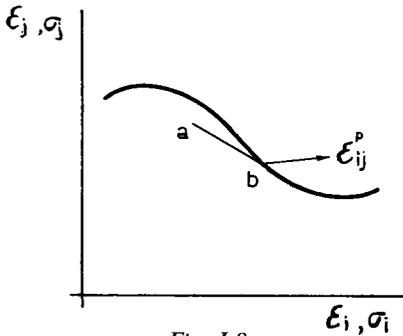


Fig. 1.8

Assente que a curva é convexa (Fig. 9) também se conclui que os vectores  $\overline{\epsilon_{ij}^p}$  terão de ser normais à dita curva, pois só nessas condições é que farão um ângulo menor do que  $90^\circ$  as as direcções dos vectores  $\overline{(\sigma_{ij}^a - \sigma_{ij}^b)}$ , associados e representativos de todas as trajectórias de tensão possíveis.

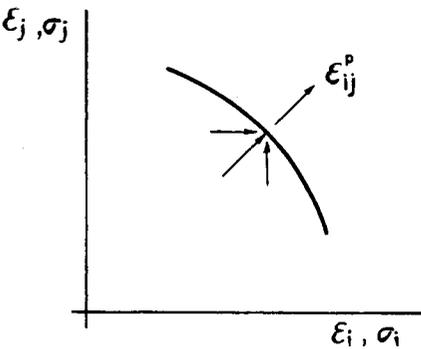


Fig. 1.9

Os corpos assim definidos têm portanto campos associados de tensões e deformações plásticas, quer dizer, é possível definir uma função de cedência que determina o estado da tensão para o qual há deformação plástica e a ela associar uma função que dê em cada ponta a direcção dessa deformação plástica.

Há dois teoremas fundamentais, em teoria de plasticidade, que praticamente resumem as metodologias possíveis para estudo de estruturas plásticas.

O I teorema, usualmente designado por teorema da “região inferior”, diz:

- dada uma estrutura e uma sollicitação, se é possível atribuir à estrutura uma distribuição de tensões que equilibre a sollicitação e em ponto algum é excedida a tensão de fluência do material que constitui a estrutura, *esta não pode sofrer colapso*.

O II teorema, usualmente designado por teorema da “região superior”, diz:

- dada uma estrutura e uma sollicitação, se é possível atribuir à estrutura uma distribuição de deformações plásticas tal que as forças exteriores realizem trabalho a uma taxa que seja superior ou igual ao trabalho dissipado internamente, (por outras palavras, em que a potência das forças exteriores seja superior à potência das forças dissipativas), *a estrutura sofre colapso*.

O I teorema significa que uma estrutura responde às sollicitações exteriores adaptando-se o melhor possível, isto é, compensando os pontos mais tensionados com redistribuição de tensões para outros pontos; e enquanto uma distribuição de tensões houver que, respeitando as condições de fronteira, possa equilibrar a sollicitação exterior, a estrutura não entrará em fluência. Este teorema exprime a metodologia dos estaticistas e refere-se assim à “região inferior” à situação de fronteira.

O II teorema significa que desde que sejam possíveis trajectórias de deformação, cinematicamente viáveis, ao longo das quais se esteja em condições de fluência, a estrutura tem deformações incessantes. Este teorema exprime a metodologia própria aos estudos de materiais em fluência (extrusão, por exemplo) e refere-se por isso à “região superior” à situação de fronteira.

Conceptualmente ter-se-á de admitir que coincidem o limite superior da “região inferior” e o limite inferior da “região superior”.

Com dois exemplos, que embora correspondam a enfoques bastante simplificados, se achou conveniente escolher por respeitarem a soluções da Mecânica dos Solos clássica, se procurará ilustrar aplicações dos dois teoremas.

O primeiro exemplo será a solução clássica de cálculo de impulsos em obras de suporte pelo método de Rankine. Como é sabido o impulso num muro de tardo vertical é obtido por integração das tensões horizontais aí actuantes. Essas tensões, por sua vez, são calculadas admitindo que o desloca-

mento foi suficiente para levar o maciço ao estado limite, isto é, até à tensão de fluência em toda a massa. Por outras palavras, tomando um material com a curva intrínseca AB (Fig. 10), num ponto em que a tensão vertical é  $\sigma_1 = \gamma h$  admite-se que a tensão horizontal é  $\sigma_3$ , máxima tensão compatível com

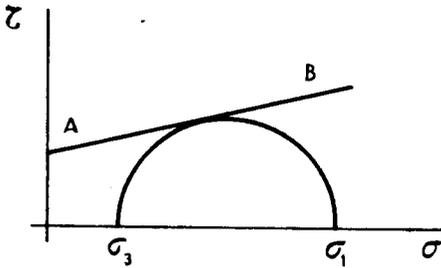


Fig. 1.10

$\sigma_1 = \gamma h$ , determinando-se assim um estado de tensão que leva a trajetória de tensões até à curva de fluência. É óbvio que esta metodologia deriva da admissão do I teorema atrás mencionado, pois com o impulso assim calculado vai-se em seguida dimensionar um suporte que ofereça resistência *sobran*te em relação a esse impulso. Está-se *pois* a admitir que o

suporte é estável porque em nenhum ponto do maciço a tensão instalada atinge a curva de fluência. É de sublinhar que este método cai dentro da categoria dos métodos que se designam por “equilíbrio limites”, pois consistem em calcular tensões no maciço suportado supondo-o no *limite superior da região inferior*. É este um caminho muito seguido em Mecânica dos Solos para obviar à dificuldade da determinação da tensão para situações dentro da “região inferior” em que se tem de lidar com um material com relações tensões-deformações não lineares e conducentes por isso, nas formulações analíticas, a sistemas de muito difícil resolução. Mas é óbvio que qualquer método que permita estudar campos de tensões e compará-los com tensões de fluência para verificar que elas não são atingidas, cai dentro da metodologia coberta pelo I teorema.

Outro exemplo, que vem dos primórdios da Mecânica dos Solos como disciplina autónoma, é o cálculo de impulsos sobre suportes pelo método de Coulomb, que serve para ilustrar uma visão do problema baseado no II teorema. No método de Coulomb o impulso é calculado postulando uma *superfície de escorregamento* cinematicamente viável e ao

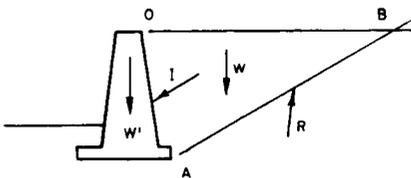


Fig. 1.11

longo do qual o material está em fluência, e segundo a qual uma parte do maciço tende a destacar-se em relação a um remanescente. O cálculo do impulso é feito determinando o constrangimento que o suporte terá

de oferecer para contrarrestar esse deslizamento. Por exemplo, num muro de gravidade (Fig. 11) terá de computar-se o peso  $W'$  do muro de forma a que ele contrarie a acção do impulso  $I$ . Está-se portanto a admitir que o *muro não é estável* enquanto ao longo de  $AB$  existem condições que possibilitam o deslizamento da cunha  $A O B$ .

## II – OS MODELOS BASEADOS NO CONCEITO DE “ESTADO CRÍTICO”

1 – *Estados críticos* – Devem-se a Prager e Drucker (1952) as primeiras tentativas de aplicação actualizada das Teorias de Plasticidade mais evoluídas à Mecânica dos Solos, enfoque retomado posteriormente por Drucker, Gibson e Henckel (1957) e que deu origem aos trabalhos que na Universidade de Cambridge, impulsionados sobretudo por Roscoe, permitiram uma teorização consistente com aquele propósito.

Os investigadores de Cambridge alicerçaram a sua construção no conceito do estado crítico, conceito bem assente em Mecânica dos Solos clássica, em torno do qual elaboraram uma doutrinação arguta para descrição, em termos de plasticidade, do comportamento de solos remoldados (i. e., sem considerar efeitos micro-estruturais) e saturados (para obviar às dificuldades, também derivadas de efeitos micro-estruturais, da consideração de forças nos contactos do tri-fásico ar-água-partícula sólida).

Como é bem sabido o conceito de estado crítico baseia-se na circunstância, com vasta confirmação experimental, de um solo, quando solicitado distorsionalmente até extensão bastante avançada, entrar em deformação distorsional a tensão constante e *porosidade* constante. Essa porosidade, que para um dado solo depende só da tensão média, define-se como “porosidade crítica”. Depreende-se daqui que para um solo e uma dada tensão média existe uma só porosidade crítica. Ou o que o mesmo é dizer, num espaço de porosidades e tensões médias, existe uma única curva que define as possíveis porosidades críticas que pelo solo podem ser exibidas.

Usando-se a notação da escola de Cambridge em que:

$p$  – tensão média

$q$  – tensão distorsional

$v$  – volume específico (volume somado dos poros e das partículas ocupado pela unidade de volume das partículas).

virá que é possível definir os estados críticos de um dado solo a partir das equações

$$\begin{aligned}
 q &= Mp \\
 \Gamma &= v + \lambda g p
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

em que  $M$ ,  $\lambda$  e  $\Gamma$  são constantes representativas de características básicas do material em questão.

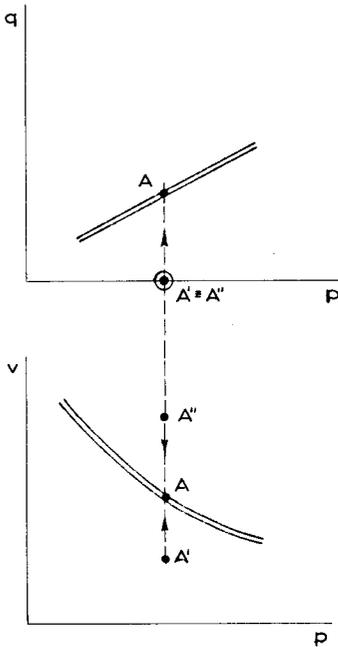


Fig. II.1

Considere-se um provete na situação representada por  $A'$  na Fig. 1 sujeita a uma tensão isotrópica e com um volume específico *inferior* ao crítico. Mantendo  $p$  constante, por aumento de  $q$  o corpo de prova dilatará até atingir a situação representada por  $A$ . Daí em diante, desde que  $p$  se mantenha constante, ele fluirá a  $q$  e  $v$  constantes.

Se se tomar um provete na situação representada por  $A''$ , sujeito a tensão isotrópica e com volume específico *superior* ao crítico, por acréscimo de  $q$  ele contrairá até igualmente atingir  $A$ , tendo evolução subsequente idêntica à do primeiro provete. O primeiro provete diz-se que estava em situação *dilatante* e o segundo em situação *contráctil*.

Esta formalização do conceito de estado crítico é, como se sabe, consagrada de há muito, devendo-se sobretudo à escola de Cambridge, como contribuição recente, a proposta da quantificação dos parâmetros  $M$ ,  $\lambda$  e  $\Gamma$ . E como adiante se verá, outras importantes aquisições do conhecimento que a Mecânica dos Solos clássica estabelecera, vão nas formulações de Cambridge ser incorporadas de forma unitária e consequente.

2 - *Cedência, fluência e ruptura* - Antes de avançar mais nesta problemática convirá fixar terminologia, por ser frequente encontrar em bibliografia deste tema termos ambíguos.

Usar-se-á o termo cedência, ao tratar de corpos rígido-plásticos ou elasto-plásticos, para designar a fronteira em que se iniciam deformações plásticas, isto é, deformações irreversíveis.

Por fluência designar-se-á o processo de deformação incessante, a tensão constante, e que portanto conduzirá à ruptura se a tensão for mantida. E consequentemente por ruptura está a designar-se um fenómeno, mais do domínio do qualitativo do que do quantitativo, em que a conformação do corpo se perde, ou por fragmentação (ruptura frágil) ou por deformação excessiva (sem se discutir aqui, por estar fora do âmbito do que aqui interessa, qual o critério com que se julga o significado "excessivo").

Num corpo plástico ideal, sem endurecimento, a cedência coincide com a fluência. Mas outro tanto não sucede nos corpos plásticos a que se atribuem modelos mais exigentes, para melhor aderência à descrição de corpos reais.

Definir-se-á superfície de cedência, retomando matéria já exposta na Introdução, como aquela que num espaço de tensões  $\sigma_{ij}$  determina as tensões para as quais se inicia o aparecimento de deformações plásticas.

Posto isto, e voltando a questão mais próximas da problemática dos solos, que curva ou curvas de cedência poderão ser esperadas em relação a um material tal como, por exemplo, uma areia limpa? Para tensão média nula será também nula a tensão deviatória que provoca cedência. E então, num

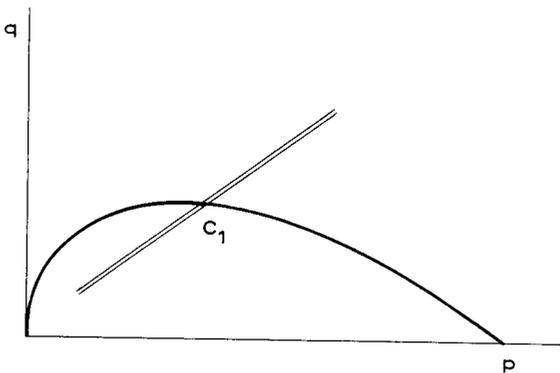


Fig. II.2

espaço p,q (Fig. 2) a curva de cedência passará na origem. A tensão deviatória que provoca cedência cresce, próximo da origem, muito acentuadamente quando p cresce; por outro lado, uma tensão isotrópica suficientemente elevada também causará cedência o que faz com que a curva de cedência tenha novamente de intersectar o eixo dos pp; passará portanto por um máximo (ponto  $C_1$ ), como na Fig. 2 se

representa. O ponto  $C_1$  corresponde portanto ao máximo  $q$  para o qual se verifica cedência.

Esse valor  $q_{m\acute{a}x}$  tem necessariamente que coincidir com o distorsor  $q_c$  que corresponde ao estado crítico para o volume específico existente em  $C_1$ . Com efeito, tenha-se em atenção que admitindo coincidência de direcções principais de tensão e de extensão ao eixo  $p$  pode-se associar um eixo  $v$ , de variações volumétricas. Ora, por definição, no estado crítico as deformações processam-se a volumes constantes e portanto a extensão plástica  $\epsilon_{pp}^p$  no estado crítico não tem componente volumétrica; é portanto normal ao eixo dos  $vv$ , quer dizer, normal a curva de cedência no ponto em que esta tem tangente paralela aos  $pp$ .

Do exposto tira-se a importante conclusão que o vértice da curva de cedência situa-se na linha dos estados críticos.

Tenha-se agora em atenção que os solos são materiais plásticos com endurecimento. Deriva daqui que a actuação de tensões para além de cedência correspondente a um dado estado é possível, fazendo deslocar a curva de cedência para nova posição. (Recorda-se que num corpo plástico ideal, sem endurecimento, não há possibilidade de mobilizar tensões fora da superfície de cedência, ao contrário do que acontece nos corpos com endurecimento).

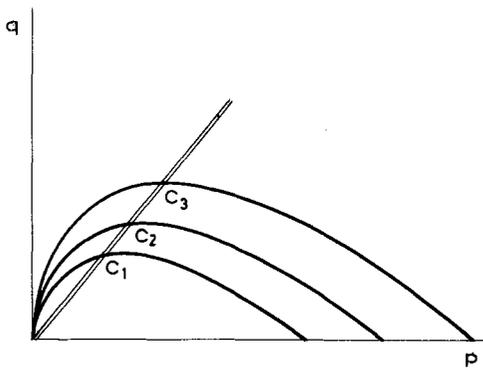


Fig. II.3

Os vértices das sucessivas curvas de cedência dispõem-se ao longo da linha dos estados críticos (Fig. 3).

Como é óbvio, as sucessivas curvas de cedência a que se fez menção estão relacionadas com correspondentes variações de volumes específicos, como se mostra, com maior generalidade, num diagrama num espaço  $p, q, v$  (Fig. 4). Define-se assim uma superfície de cedência (com cumeada na linha de estados

críticos) incorporando o endurecimento.

3 - *Corpos rígido-plásticos e corpos elasto-plásticos* - Não se discutiu por enquanto o comportamento dos corpos a que se tem feito menção enquanto a



4 - *Estabilidade e instabilidade* - Definiu-se na introdução corpo plástico estável como aquele em que o trabalho realizado pelas forças exteriores quando ocorrem deformações plásticas é nulo ou positivo. Viu-se como esta postulação leva à demonstração do princípio da "normalidade", extremamente profícuo por permitir associar campos de tensão com campos de deformação plástica. Recorda-se que este princípio diz que num corpo em que se possam considerar coincidentes as direcções principais de tensão e de extensão (uma concessão em relação a um tratamento generalizado da questão, mas que constitui uma circunstância muito frequentemente comprovada experimentalmente) os vectores de deformação plástica terão de ser normais à superfície de cedência. Permite isto, como se disse, associar os campos de tensão e de deformação plástica pois que sendo  $F(\sigma_{ij})$  a curva de cedência virá

$$\nu d \epsilon_{ij}^p = \frac{\delta F}{\delta \sigma_{ij}} \quad (2)$$

A função de cedência representa assim uma função potencial de fluxo pois que as suas derivadas parciais dão as direcções das deformações plásticas.

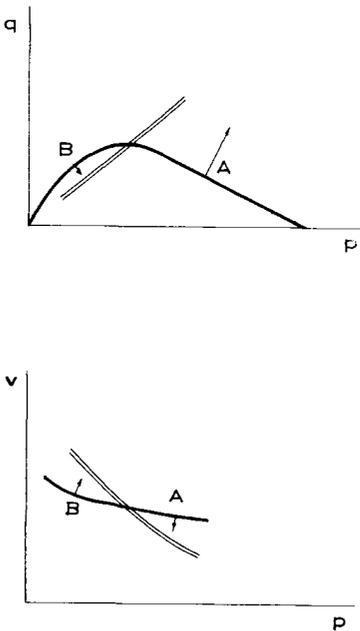


Fig. II.5

Note-se porém que para completa quantificação da questão necessitar-se-á também de determinar a grandeza dos vectores  $d\epsilon_{ij}^p$ . Ora esta quantificação requer a determinação do escalar  $\nu$ , que mede o trabalho consumido na deformação. Só por via experimental portanto (ou por adopção de qualquer hipótese suficientemente bem fundamentada sobre a grandeza de  $\nu$ ) se pode quantificar completamente a questão.

Vejamos agora como se situa esta problemática para os casos cujos modelos foram estabelecidos pela escola de Cambridge. É indiferente neste aspecto

tomar o modelo “Granta-gravel” ou “Cam-clay”, visto que eles só diferem no comportamento anterior à cedência. Considere-se um corpo de prova na situação A (Fig. 5). O corpo encontra-se em situação de cedência e exibe um volume

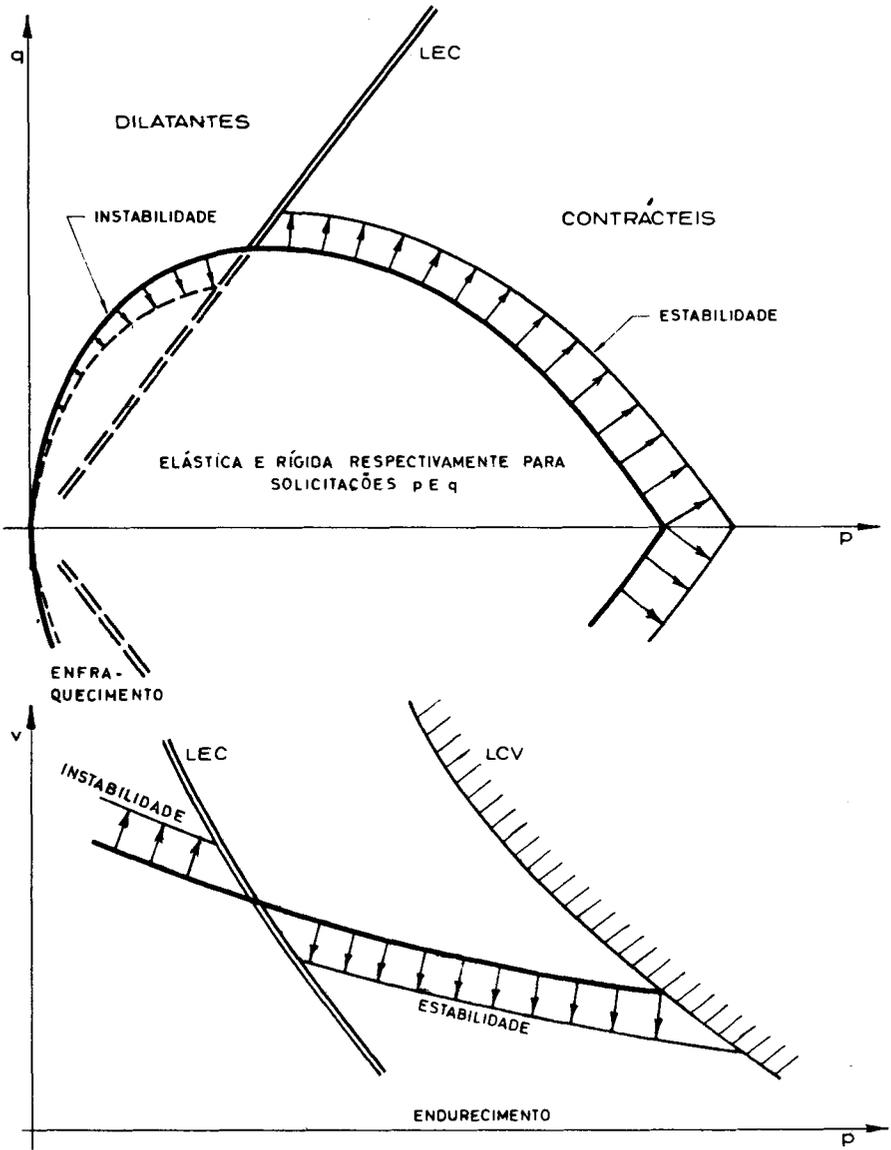


Fig. II.6

específico *superior* ao crítico. Ao deformar-se exibirá contração e portanto *endurecerá*. A curva de cedência evolui para fora da curva de cedência inicial. É portanto um corpo estável no sentido atrás definido, obedecendo ao princípio da normalidade. As forças exteriores realizam trabalho positivo no processo de deformação e os vectores de deformação plástica são normais à curva de cedência.

Considere-se agora um corpo de prova na situação B (Fig. 5). O volume específico é inferior ao crítico e portanto o corpo só pode dilatar. Quer dizer que um acréscimo de tensão provoca uma deformação plástica de sinal contrário. O vector deformação plástica será dirigido para o interior da curva de cedência. O corpo sofre amolecimento e é um corpo instável. Não pode portanto ser descrito pela formulação que toma por base o postulado da estabilidade. Este é o caso das areias muito duras (modelo "Granta-gravel") e das argilas sobre-consolidadas (modelo "Cam-clay"). Pode portanto resumir-se a situação como se representa na Fig. 6.

Em conclusão, deduz-se do que fica exposto que os modelos "Granta-gravel" e "Cam-clay" fornecem a informação necessária para a aplicação da Teoria da Plasticidade aos corpos com endurecimento, na região estável. Experimentação adequada, delicada mas exequível, fornece as sucessivas curvas de cedência associadas ao fenómeno de endurecimento e possibilita também a determinação do escalar  $\nu'$  necessário para quantificação dos módulos dos vectores de deformação plástica, cujas direcções se deduzem do princípio da normalidade.

5 - *Resistência ao corte* - A resistência ao corte tem sido descrita na Mecânica dos Solos pela lei de Coulomb

$$\zeta_r = c + \sigma \operatorname{tg} \varphi \quad (3)$$

com um sucesso que se pode considerar pleno ao nível das exigências das aplicações práticas.

A introdução do conceito de tensão efectiva e a formulação da equação de Coulomb em termos de tensões efectivas, conferiu-lhe univocidade, pois na formulação clássica, como é bem sabido, as grandezas  $c$  e  $\varphi$  dependem não só das tensões mas também da "história" de tensões.

Em tensões efectivas

$$\zeta_r = c' + \bar{\sigma} \operatorname{tg} \varphi' \quad (4)$$

as grandezas  $c'$  e  $\varphi'$  passam a ser características intrínsecas de um material, mas por outro lado não possuem riqueza informativa suficiente para descrever as resistências ao corte “memorizadas” consequentes à estruturação do material por via da “história” prévia de tensões. Essas resistências ao corte “memorizadas”, que figuram nas equações do tipo da de Coulomb como “coesões aparentes”, foram incorporadas na teorização da resistência ao corte por Hvorslev com os trabalhos que marcaram época publicados em 1937.

A hipótese que Hvorslev adiantou e que comprovou experimentalmente é que a coesão aparente de um dado solo saturado depende univocamente do índice de vazios (ou do volume específico, ou ainda do teor de humidade, que são grandezas obviamente correlacionáveis) exibido pelo solo no estado em que a rotura se instala. Poder-se-á escrever então

$$\zeta_r = \bar{\sigma}_r \operatorname{tg} \varphi + c \bar{\sigma}_e \quad (5)$$

em que  $\sigma_e$  é a “tensão efectiva equivalente”, tensão que num diagrama de consolidação isotrópica sobre provete virgem conduz ao mesmo índice de vazios com que a rotura se instala no provete cuja resistência ao corte se pretende descrever.

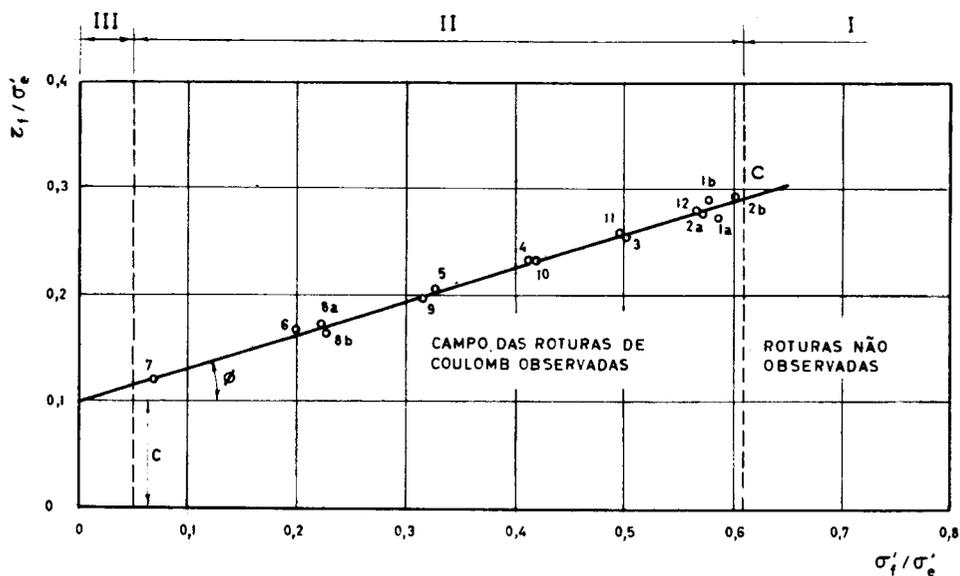


Fig. II.7

Poderá portanto escrever-se, tornando a equação (5) adimensional

$$\frac{\zeta_r}{\bar{\sigma}_e} = \frac{\bar{\sigma}_r}{\bar{\sigma}_e} \operatorname{tg} \varphi + c \quad (6)$$

A Fig. 7 reproduz os resultados obtidos por Hvorslev nos seus trabalhos de comprovação da formulação que acaba de ser resumida.

Uma muito interessante constatação que só recentemente foi realçada por Schofield e Wroth (1968) é que não há roturas observadas fora do intervalo  $0,05 < \frac{\sigma_r}{\sigma_e} < 0,6$ . Antes de comentar esta constatação haverá interesse em reproduzir do mesmo trabalho de Schofield e Wroth, o resumo de uma série numerosa de ensaios (Fig. 8).

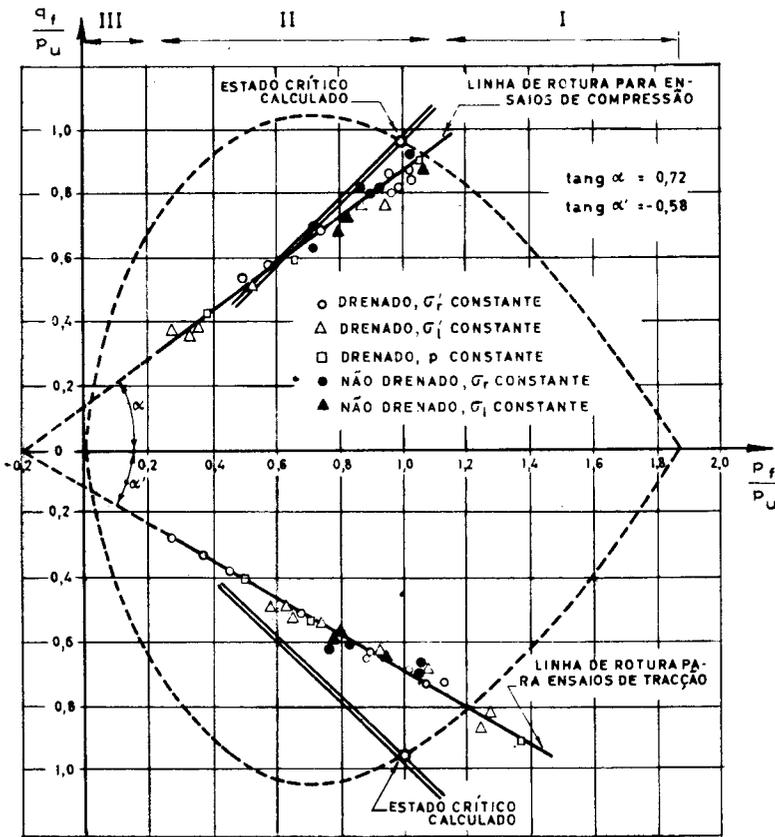


Fig. 11.8

São ensaios de determinação de resistência ao corte, conduzidos por diversos investigadores e em diversas modalidades. Estão estes resultados reunidos na Fig. 8, num diagrama de coordenadas também adimensionais mas em que se dividiu  $\bar{\zeta}_r$  e  $\bar{\sigma}_r$  por  $p_u$  e não por  $\bar{\sigma}_e$ , sendo  $p_u$  a tensão média que na linha de estados críticos, posta em diagrama,  $w, p$ , corresponde ao teor de humidade no instante de rotura. Demonstra-se que a relação  $\bar{\sigma}_e/p_u$  é constante para um dado solo e por isso o diagrama da Fig. 8 tem o mesmo significado do diagrama da Fig. 7.

Também na Fig. 8 se observa que só numa região intermédia da relação  $\zeta_r/p_u$  é que se obtiveram roturas. Pode-se portanto, quer na Fig. 7, quer na Fig. 8, distinguir três regiões: nas regiões I e III não se observam roturas: estas distribuem-se ao longo da região II com uma acentuada acumulação na zona terminal, próximo do estado crítico (ponto C). E é ainda de apontar que a linha representativa das roturas se situa na região *dilatante* do comportamento dos solos representados. Será então de concluir que os corpos de prova que iniciarem o processo de deformação da zona I, na zona contráctil portanto, sofreram cedência sem rotura até atingir o estado crítico. Só aí então entraram em rotura. Os corpos de prova que foram ensaiados na zona dilatante exibem rotura com pico e é essa rotura que está representada no diagrama. Se o seu processo de deformação tivesse sido levado suficientemente longe seria de esperar que a rotura evoluísse também para pontos próximos de C (note-se de passagem que as relações  $\bar{\sigma}_r/\bar{\sigma}_e$  decrescem quando a curva de rotura se aproxima do ponto C, quer dizer, os pontos próximos de C correspondem a provetes com resistência ao corte relativamente baixa quando em comparação com o  $\bar{\sigma}_r$  actuante). Por fim, na zona III não se observam roturas por ser inviável deformar provetes com relações  $\bar{\sigma}_r/\bar{\sigma}_e$  extremamente baixas. As fortes dilatações que se processam nesta zona provocam o crescimento, na prática impossível de evitar, de  $\bar{\sigma}_r$  e consequentemente da relação  $\bar{\sigma}_r/\bar{\sigma}_e$ .

6 - *A curva de estados críticos como envoltória de resistências ao corte* -  
 Depreende-se do que atrás fica exposto que a linha dos estados críticos num espaço  $q, p$ , podia esperar-se que fosse o lugar geométrico dos pontos figurativos das resistências ao corte residuais. Com efeito, para cada  $p$ , por definição de estado crítico, o correspondente  $q$  representa a tensão deviatórica para a qual se processa deformação que não cessa a  $q$  constante (e porosidade

também constante). É óbvio que não levando em conta as resistências de pico, correspondentes às energias necessárias para destruir os arranjos estruturais, e continuando o processo de deformação até que ele se instale a volume específico constante, com destruição desses arranjos estruturais, o  $q$  mobilizado seria de esperar que correspondesse à resistência ao corte residual. É porém este um aspecto da questão em que se apresentam incongruências que, pelo menos por enquanto não se encontram ultrapassadas.

Na Fig. 9 reproduz-se de Schofield e Wroth (1968) um diagrama em que estão representadas (linha AC) resistências de um solo sobre-consolidado ( $\sigma_0$

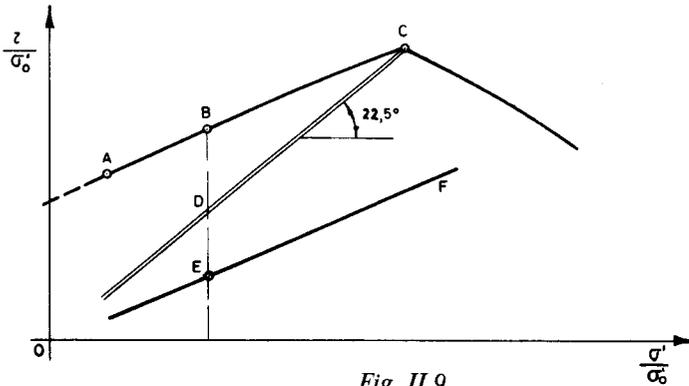


Fig. II.9

é a tensão de sobreconsolidação). Os resultados são reproduzidos de um trabalho de Skempton (1964) e na mesma figura a linha EF corresponde às resistências residuais. Para o mesmo solo Schofield e Wroth adicionam a correspondente linha de estados críticos, DC, que como se vê afasta-se muito acentuadamente da linha de resistências residuais. É verdade que, segundo Schofield e Wroth, a linha DC praticamente coincide com as resistências ao corte obtidas por Skempton no mesmo material sem sobreconsolidação (ou só com uma ligeira sobreconsolidação). Mas em geral a linha dos estados críticos não coincide com EF, ou tomando por referência a Fig. 10, a resistência, quando se incrementa a deformação, cai para valores mais baixos do que o crítico, o que implicaria variações incessantes do volume específico ao longo do processo de deformações distorsionais. Wroth (1968) estudando o tema com base em experiência conduzida em esferas metálicas, atribui o facto a re-arranjos das esferas que se dariam em zonas de grandes deformações, com disposições ordenadas que seriam menos resistentes do que as disposições randômicas ocorrentes no estado crítico. Maranhã das Neves

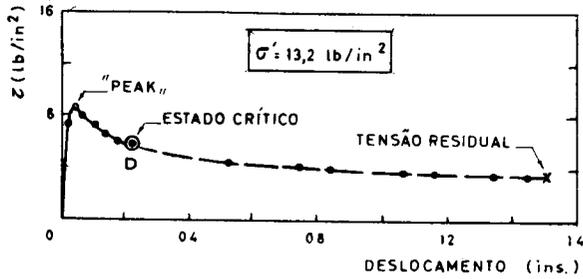


Fig. II.10

(1973), interpretando ensaios colhidos em fontes bibliográficas, mostra que argilas “estruturadas”, isto é, partindo de situações estruturalmente orientadas, evoluem por deformação distorsional até estruturas randômicas, características do estado crítico. Seria esta situação o limite de aplicação do modelo “estado crítico” ao solo em questão; para além de uma certa grandeza da deformação distorsional as partículas re-orientam-se dando origem a arrumos menos resistentes do que o estado crítico, mas nessa fase o material está fora do campo a que é aplicável o modelo. Esta formulação traduz uma limitação importante à aplicabilidade do modelo para descrição da rotura, pois a resistência residual vê-se assim que a partir dele não poderá ser prevista. Ora frequentemente, em problemas de equilíbrio-limite, será a resistência residual a que interessaria considerar. A resistência no estado crítico, ponto de passagem entre a resistência de pico e a resistência residual, insere-se portanto na descrição fenomenológica do processo, mas tem aplicação prática discutível dentro desta problemática.

7 – O modelo “estado crítico” como descrição unificada do comportamento dos solos – À guisa de resumo e conclusão afigura-se de interesse mostrar como o modelo “estado crítico” incorpora o consabido em Mecânica dos Solos clássica, com muitos pequenos contributos factuais, mas com a adopção de uma linguagem e metodologia que permitem a abertura para aplicação da Teoria da Plasticidade (para além das formulações teóricas baseados em modelos muito simples, que essas já figuram na Mecânica dos Solos clássica) à resolução de problemas de equilíbrio de maciços terrosos.

Assim, começa a elaboração da Mecânica dos Solos dos estados críticos por se basear no conceito, de há muito adquirido, da existência de uma fronteira de separação do comportamento dilatante e do comportamento contráctil de um dado solo. Considerando que o estado contráctil corresponde a corpos plásticos

estáveis com endurecimento formula a descrição do comportamento de um solo nessa situação; incorpora assim na descrição de cedência os processos de consolidação-evolução das curvas do endurecimento no espaço  $p, v$ . Com sucesso mais discutível pretende englobar a fenomenologia de corte. Mostra que não há incompatibilidade entre a conceptualização "estado crítico" e a teorização de resistência ao corte de Hvorslev, embora se manifeste impotente para uma descrição fenomenológica das resistências ao corte com pico, e não se aplique para as grandes deformações associadas às resistências residuais.

Finalmente, como contributo mais importante, evidencia a possibilidade de quantificar os campos de deformação plástica e associar estes campos aos campos de tensão que levam os solos à cedência.

*(Conclui no próximo número)*