CONTRIBUIÇÃO PARA UMA TEORIA DO ATRITO INTERNO

Contribution to a theory of internal friction.

por
ULPIO NASCIMENTO*

RESUMO – A partir da noção de tensão média num solo granular define-se o conceito de contínuo equivalente a uma zona do solo. Consideram-se depois os poliédros circunscritos aos grãos, cujas faces são definidas pelos contactos entre grãos. Com base nestes poliedros estaticamente equivalentes aos grãos faz-se a análise das respectivas condições de equilíbrio. Essa análise é facilitada porque se demonstra que as forças que actuam na rede de poliedros são dadas directamente por uma simples transformação geométrica daquela rede. Deduz-se assim um método para calcular as obliquidades da força que actua em cada contacto, obliquidade essa que é a soma duma obliquidade hidrostática com uma obliquidade distorsional. Em conclusão estabelece-se que para haver equilíbrio dos grãos será necessário que em cada contacto a obliquidade não exceda o respectivo ângulo de fricção.

SYNOPSIS – From the notion of mean stress in a granular soil, the concept of continuum equivalent to a zone of soil is defined. After this, the author considers the polyhedra circumscribing the grains whose faces are defined by the contacts between grains. On basis of these polyhedra statically equivalent to the grains, an analysis is made of the corresponding equilibrium conditions. This analysis becomes easier as it is proved that the forces acting in the polyhedra network are given direct by a simple geometrical transformation of this network. A method is thus derived for calculating the obliquities of the force acting on each contact, this obliquity being the sum of a hydrostatic obliquity and a distortional obliquity. In conclusion, it is established that for securing equilibrium conditions in the grains ther obliquity in each contact must not to exceed the corresponding angle of friction.

---

* Eng. Investigador, Chefe do Serviço de Geotecnia do LNEC

1 – INTRODUÇÃO

Considere-se um solo granular, sem coesão, constituído por grãos pouco deformáveis e submetido a tensões suficientemente pequenas para que seja admissível a hipótese de indeformabilidade desses grãos. Nessas condições as deformações do solo são unicamente devidas ao deslocamento dos grãos uns em relação aos outros, e a resistência que ele oferece às deformações provém unicamente do atrito gerado entre os grãos.

Em anterior trabalho (Nascimento and Teixeira, 1971) fez-se a análise dos diferentes mecanismos que geram atrito interno por efeito de fricção, de cunha, de rotação e de rolamento.

Neste trabalho analisam-se as condições de equilíbrio dos grãos bem como as condições de rotura dos respectivos contactos.

2 – TENSÃO MÉDIA OU TENSÃO NO CONTÍNUO EQUIVALENTE

Considere-se na Fig. 1 um conjunto de grãos de um solo granular. Para maior simplicidade supõe-se o espaço bidimensional e os grãos sem peso próprio. Admite-se que o contacto entre grãos se estabelece por meio de duas facetas planas coincidentes, uma de cada grão. Cada contacto define portanto um plano de contacto e o conjunto dos planos de contacto dum grão definem um poliedro circunscrito a esse grão.

Considere-se na Fig. 2a o poliedro (neste caso polígono) circunscrito ao grão número 1 da Fig. 1 e suponha-se que o solo nessa zona está submetido ao estado médio de tensão σ_1, σ_2 cuja direcção principal faz um dado ângulo x_σ com o eixo xx dum sistema de referência. Entende-se por tensão média, numa dada secção plana duma certa zona dum material granular o quociente entre a resultante das forças aplicadas nos contactos mais próximos da secção e a área desta. A secção, e portanto a zona, terá no entanto que ter uma extensão suficientemente grande para que um pequeno acréscimo nessa extensão, que abranja mais alguns grãos, não altere o valor da respectiva tensão média.

A tensão média não é mais portanto do que a tensão num contínuo, estaticamente equivalente, que substitua o solo em toda a extensão da referida zona e que seja limitado no seu contorno por uma superfície poliédrica em cujas faces

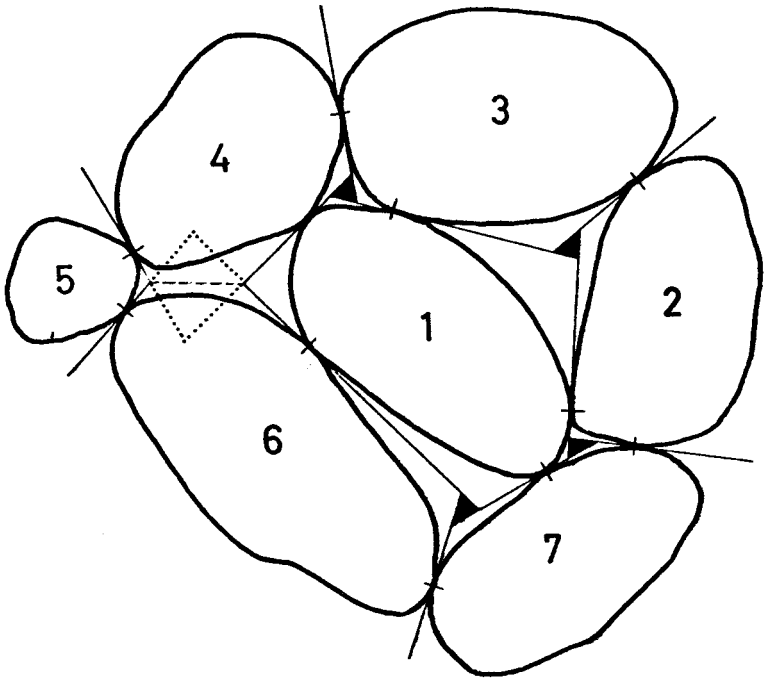

Fig. 1 – Grãos e correspondentes poliedros equivalentes

contactam os grãos exteriores à zona. A pequena distância desse contorno o estado de tensão nesse contínuo será portanto uniforme.

Numa face do polígono fazendo um ângulo Θ com a direcção principal (Fig. 2, a) o contínuo actua com uma tensão uniforme cuja obliquidade α em relação à respectiva normal é dada pela conhecida expressão:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\tau}{\sigma} = \frac{(K-1) \operatorname{tg} \Theta}{K + \operatorname{tg}^2 \Theta} \tag{1}$$

onde

$$K = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \tag{2}$$

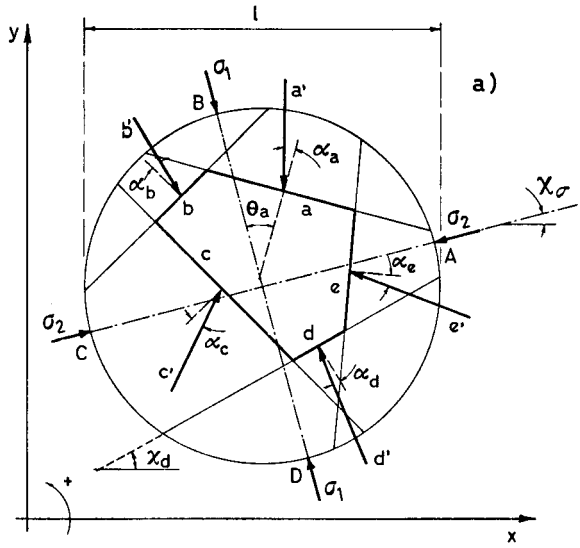

Fig. 2-a) – Poliedro equivalente num contínuo sob o estado de tensão σ_1, σ_2

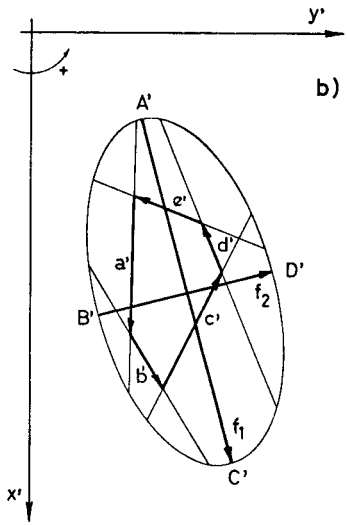

Fig. 2-b) – Transformação da Fig. a) representando as forças actuando no poliedro equivalente.

Esta tensão uniforme aplicada numa face do poliedro é estaticamente equivalente a uma força aplicada no centro da face e com a mesma obliquidade (Fig. 2, a).

Se a massa do solo está em equilíbrio, também estão em equilíbrio as forças com que o contínuo respectivo actua no poliedro circunscrito a um grão dessa massa do solo. Na Fig. 2, a) o polígono de faces *a, b, c, . . .*, fazendo com a direcção principal os ângulos Θ_a, Θ_b, Θ_c . . . está submetido às forças do contínuo *a', b', c', . . .* de obliquidades α_a, α_b, α_c . . .

Na Fig. 2, b) estas forças, porque estão em equilíbrio, formam um polígono fechado. E esse polígono fechado, rodado de 90°, não é mais do que a transformação do polígono circunscrito obtida por projecção num plano paralelo à direcção principal e fazendo com o seu plano um ângulo n dado por

$$\cos n = \frac{1}{K} \tag{3}$$

Um círculo ABCD do contínuo, de diâmetro 1, (Fig. 2, a) está submetido a forças cujo polígono é, a uma certa escala, a elipse A' B' C' D' (Fig. 2, b) em que os eixos principais são as forças

$$\begin{aligned} f_1 &= 1\ \sigma_1 \\ f_2 &= 1\ \sigma_2 \end{aligned} \tag{4}$$

cuja relação é evidentemente igual a K (eq. 2).

A K = 1 e n = 0 corresponde evidentemente um estado hidrostático de tensão. Serão portanto nulas as obliquidades das forças (eq. 1) o que significa que o polígono das forças é obtido do polígono circunscrito rodando-o apenas de 90° e ampliando-o ou reduzindo-o a uma certa escalada mas sem alteração dos respectivos ângulos. K = ∞, n = 90° corresponde a um estado de compressão simples e a elipse das forças é reduzida ao seu diâmetro maior f_1.

3 – EQUILÍBRIO DOS POLIEDROS EQUIVALENTES

Considere-se na Fig. 3 o poliedro circunscrito ao mesmo grão número 1 das figuras anteriores e suponha-se que o estado de tensão na zona em que está o grão é uma pressão hidrostática de valor p. As forças do contínuo *a', b', c', ...* estão aplicadas nos pontos médios dos respectivos lados, M_a, M_b, M_c, ... e normalmente a eles, uma vez que em estado hidrostático de tensão as obliquidades são nulas.

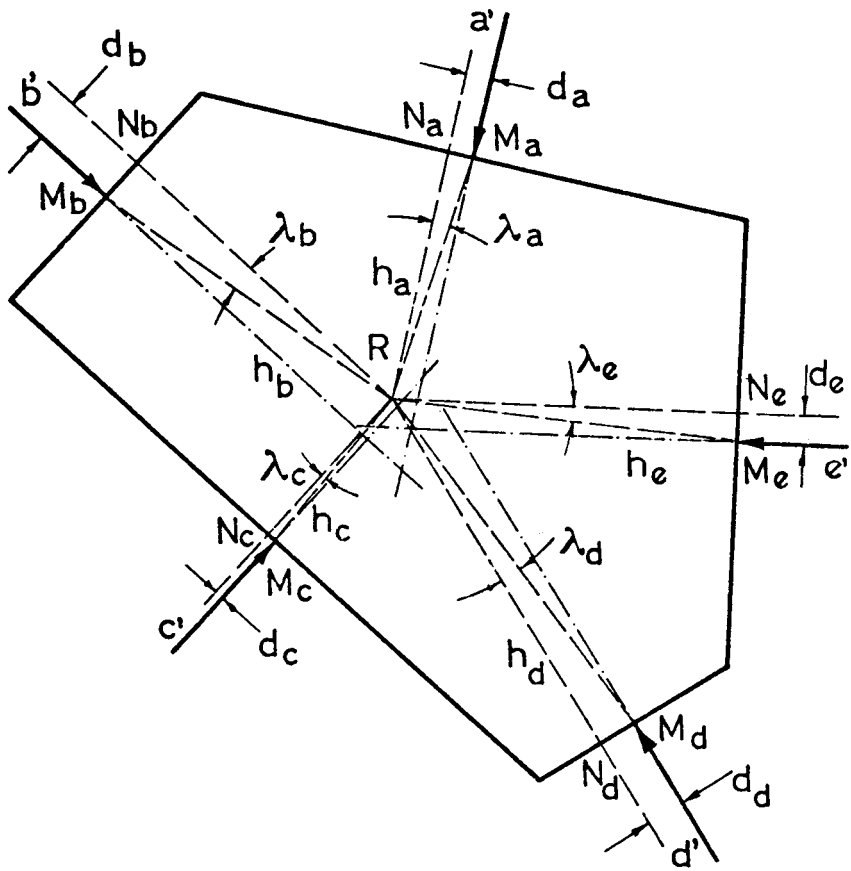

Fig. 3 – Equilíbrio de rotação de um poliedro equivalente sob estado hidrostático de tensão.

Em geral, tratando-se de polígonos irregulares, como na Fig. 3, as forças do contínuo e portanto as normais tiradas a meio dos lados, não são concorrentes num ponto. O equilíbrio de rotação exige porém que seja nula a soma dos momentos em relação a qualquer ponto.

Quer dizer, deverá verificar-se a equação

$$a' \cdot d_a + b' \, d_b + c' \, d_c + \ldots\ldots\ldots\ldots = 0 \tag{5}$$

sendo d_a, d_b, d_c, os braços de alavanca das forças (fig. 3).

Mas como as forças *a', b'* .... são dadas pelos produtos

$$\begin{aligned} a' &= pa \\ b' &= pb \\ &\ldots \end{aligned} \tag{6}$$

a equação (5) transforma-se em

$$p\,(a\,d_a + b d_b + c d_c + \ldots) = O \tag{7}$$

que é independente da pressão p.

E como

$$\begin{aligned} d_a &= h_a \, tg\lambda_a \\ d_b &= h_b \, tg\lambda_b \\ &\ldots \end{aligned} \tag{8}$$

Sendo h_a, h_b, ... as alturas, tiradas do centro R, dos triângulos que compõem o polígono e que têm as respectivas faces por bases.

Tem-se, substituindo em (7)

$$a \, h_a \, tg\lambda_a + b \, h_b \, tg\lambda_b + \ldots\ldots\ldots = O \tag{9}$$

O equilíbrio de translação está verificado pois que sendo fechado o polígono equivalente também é fechado o polígono das forças, como se viu na secção 2.

Se no poliedro só actuasse por exemplo, a força *a'*, ele não estaria em equilíbrio. Para assegurar esse equilíbrio seria necessário aplicar na face respectiva uma força tangencial cujo momento em relação a R fosse igual e contrário ao de *a'*. A resultante da composição da força *a'* com essa força tangencial teria necessariamente que passar por R e teria portanto uma obliquidade λ_a (Fig. 3). No entanto esta obliquidade é aparente pois que não está aplicada na face do poliedro nenhuma força tangencial, mas sim apenas as forças normais do contínuo.

Outra maneira de mostrar que os ângulos λ não corresponde nenhuma obliquidade real é a que se esquematiza na Fig. 4. Com efeito é sempre possível decompor um poliedro qualquer ABCDE em poliedros trigonais elementares ABC, ADE e ACD cada um dos quais tem o seu centro R_1, R_2 e R_3 perfeitamente determinados e sem quaisquer obliquidades. Isso resulta da propriedade de qualquer triângulo de as normais aos meios dos lados serem concorrentes um ponto. Tudo se passa pois como se em vez dum único poliedro com mais de três faces se tivesse um conjunto de poliedros trigonais justapostos uns aos outros de modo a serem geometricamente e estaticamente equivalentes ao poliedro.

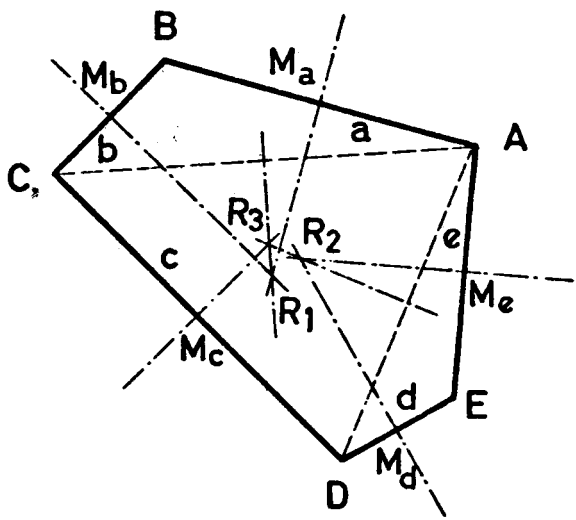

FIG. 4 – Decomposição de um poliedro pentagonal num conjunto estaticamente equivalente de poliedros trigonais.

Considerou-se até aqui que as faces de poliedro contíguos são concorrentes num ponto. Considere-se agora o caso em que essas faces não são concorrentes num ponto. Dois casos se podem dar; ou tais faces na sua intersecção definem um novo poliedro exterior a qualquer dos poliedros contíguos, portanto um poliedro no vazio entre grãos, como sucede na Fig. 1 por exemplo entre os grãos 1, 2 e 3 ou 1, 3 e 4, assinalados a cheio; ou então a intersecção dessas faces define um poliedro interior a alguns dos poliedros contíguos como sucede na Fig. 1 entre os grãos 1, 4, 5 e 6 em que o poliedro de intersecção é interior ao poliedro 4 e 6.

No primeiro caso o poliedro vazio é estaticamente equivalente a um grão que lhe esteja inscrito. No segundo caso a sobreposição do poliedro de intersecção com os poliedros circunscritos aos grãos equivale a uma subtracção de espaço que deixa um buraco no contínuo, o que é contrário ao seu equilíbrio. Torna-se então necessário fechar o contínuo deformando ligeiramente os poliedros contíguos de modo a que as respectivas faces sejam concorrentes num ponto no interior do buraco. Como isso sucede nas zonas onde são maiores os vazios entre grãos e menor é portanto o número de contactos, a melhor maneira de proceder é introduzir nesses vazios um grão virtual cujo poliedro encherá portanto o referido buraco do contínuo. A deformação das faces dos poliedros contíguos far-se-á então fazendo-os convergir para o centro de gravidade do poliedro circunscrito ao grão virtual. Em termos de forças isso equivale a aplicar ao grão virtual um sistema de forças de resultante nula, que não altera portanto o equilíbrio, sistema esse que composto com as forças correspondentes aos poliedros circunscritos aos grãos reais, equilibra o polígono respectivo.

Para as intersecções nos vazios, indicados a cheio na Fig. 1, devem também deformar-se os poliedros contíguos de modo análogo ao descrito, para assim se conseguir que, sendo concorrentes num ponto, sejam iguais as forças correspondentes a uma dada face comum a dois grãos contíguos.

Os polígonos depois de deformados devem satisfazer à condição de equilíbrio de rotação expressa pela eq. (9), e satisfazem necessariamente ao equilibrio de translação porque são polígonos fechados. Mas como a deformação alterou as orientações das faces, passará a haver uma obliquidade entre as forças do contínuo e as faces reais do contacto entre grãos, obliquidade essa que é exactamente igual à diferença Δ entre as orientações das faces do poliedro deformado e o poliedro real.

Uma vez que há uma obliquidade Δ nas forças aplicadas nas faces de contacto, só haverá equilíbrio se essa obliquidade for inferior ao ângulo de fricção Φ_s entre as superfícies dos grãos em contacto.

Quer dizer, terão de se verificar mais as seguintes condições de equilíbrio.

$$\begin{aligned} \Delta_a &< \Phi_{sa} \\ \Delta_b &< \Phi_{sb} \\ &\ldots \end{aligned} \tag{10}$$

sendo $\Phi_{sa}, \Phi_{sb}, \ldots\ldots$ os ângulos de fricção nas faces a, b, ...

Se o estado de tensão não for hidrostático mas houver uma tensão distorsional tal que $\sigma_1/\sigma_2 = K$, então em cada face do poliedro será aplicada uma obliquidade α devida a essa distorsão que será dada pela expressão (1).

As condições de equilíbrio (10) transformam-se então em

$$\begin{aligned} \Delta_a + \alpha_a &< \Phi_{sa} \\ \Delta_b + \alpha_b &< \Phi_{sb} \\ &\ldots \end{aligned} \tag{11}$$

Se, em vez de um único poliedro, for considerado um conjunto de poliedros numa dada zona, além das condições de equilíbrio de cada um deles, condições essas contituídas por tantas equações (9) quantos os poliedros, haverá mais a condição de serem iguais os ângulos correspondentes a dois poliedros contíguos dum e doutro lado do respectivo contacto. Quer dizer, se tais condições forem satisfeitas, existirá em cada poliedro um centro R tal que são colineares os dois centros e o meio da face de contacto de dois poliedros contíguos. Por outras palavras, nesse caso, de cada centro irradiam raios para os centros dos poliedros contíguos raios esses que passam pelo meio das respectivas faces de contacto.

Uma estrutura constituída por um sistema recticulado coincidente com esses raios e em que cada nó corresponde a um grão será estaticamente equivalente ao conjunto dos poliedros. Essa rede poderá por isso designar-se a rede estrutural do material.

4 – EQUILÍBRIO DOS GRÃOS

Na secção anterior considerou-se o equilíbrio dos poliedros nos quais as forças do contínuo estão aplicadas nos pontos médios das respectivas faces. Mas os contactos entre grãos não coincidem em geral com esses pontos médios, conforme se esquematiza na Fig. 5, em que esses contactos estão representados pelos pontos C_a, C_b, ...

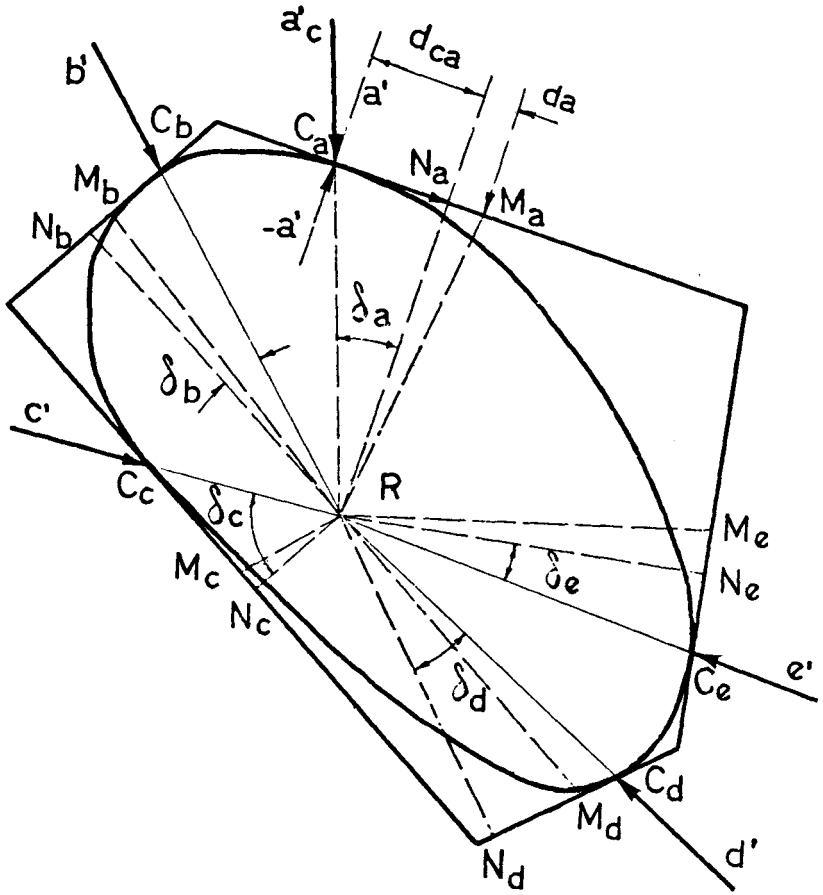

Fig. 5 – Equilíbrio de rotação de um poliedro quando os pontos de contacto entre os grãos não coincidem com os pontos médios das respectivas faces.

No entanto o equilíbrio do poliedro equivalente não será alterado se, na face *a* por exemplo, se aplicar no ponto C_a duas forças, uma igual *(a')* e outra oposta *(-a')* à força do contínuo nessa face. Obtem-se assim um novo sistema de forças constituído pela força *a'* aplicada em C_a e pelo binário formado pela força a' aplicada em M_a e pela força -a' aplicada em C_a.

Esse momento será dado pelo produto.

$$\grave{a}\ (d_a + d_{ca})$$

sendo d_{ca} a distância do contacto C_a à normal tirada pelo centro R e que intersecta a face em N_a. Mas, como se viu, somente a parcela $ád_{ca}$ desse momento terá de ser equilibrada aplicando tangencialmente à face uma força a" tal que produza em relação a R momento igual e oposto. Terá pois que verificar-se

$$a''h_a = a'\ d_{ca}$$

Mas como

$$\frac{d_{ca}}{h_a} = tg\delta_a \tag{12}$$

será

$$a'' = a'\ tg\delta_a \tag{13}$$

Quer dizer a força a'_c aplicada no contacto é a resultante das componentes normal a' e tangencial a" e actua portanto com uma obliquidade δ_a dada por (13).

Em estado hidrostático de tensão haverá pois uma obliquidade i que é dada pela soma

$$i = \Delta + \delta \tag{14}$$

E em estado distorsional de tensão a obliquidade total ω será dada pela soma da obliquidade hidrostática i com a obliquidade distorsional α. Ter-se-á pois, a seguinte expressão geral da obliquidade

$$\omega = i + \alpha \tag{15}$$

E as condições de equilíbrio fricional expressas por (10) e (11) tomarão agora a forma geral

$$\omega_a \leqslant \Phi_{sa}$$
$$\omega_b \leqslant \Phi_{sb} \qquad (16)$$

5 – CONCLUSÕES

Parece que deste trabalho se podem tirar as seguintes conclusões:

a) Uma zona dum material granular, em equilíbrio e com extensão suficiente para nela se poder definir uma tensão média, é estaticamente equivalente a um contínuo com tensão uniforme e igual a essa tensão média.

b) Os contactos entre os grãos dum material granular definem faces de contacto e estas, por sua vez, definem poliedros circunscritos aos grãos. Supondo que nestas faces estão aplicadas as forças do contínuo, esses poliedros são estaticamente equivalentes aos grãos. E se as faces de poliedros contíguos não forem convergentes em pontos comuns, podem deformar-se angularmente essas faces de modo a serem convergentes, continuando a manter-se estaticamente equivalentes.

c) Dado um certo material granular, com grãos de determinada forma agrupados com uma certa fábrica, obtem-se facilmente as forças que actuam nos grãos, traçando a rede dos poliedros equivalentes. Se o estado de tensão é hidrostático de pressão p, essas forças são dadas directamente pela extensão das faces à escala 1/p e rodadas de 90°. Se o estado de tensão é distorsional essas forças são dadas directamente pela transformação que resulta de projectar a rede dos poliedros equivalentes num plano paralelo à direcção principal e fazendo com o seu plano um ângulo tal que o seu cosseno seja igual a σ_2/σ_1.

d) Pode também traçar-se uma rede estrutural que consiste num sistema recticulado contituído por barras e nós, estaticamente equivalente aos poliedros. As barras dessa rede são os segmentos de recta que unem os centros de eventual rotação de grãos contíguos e passando pelos respectivos pontos de contacto, e os nós são esses centros eventuais de rotação.

d) As condições de equilíbrio dos grãos dum material granular podem estabelecer-se em termos exclusivamente angulares, isto é, em termos de obliquidade das forças que actuam nos seus contactos. Em estado hidrostático de tensão

a obliquidade i da força em cada face é a soma de dois ângulos: o ângulo Δ que a face correspondente do poliedro equivalente faz com a face de contacto, e um ângulo δ que resulta de o contacto real correspondente a essa face não coincidir com o centro da face. Este ângulo é definido entre o raio correspondente da rede estrutural e a normal à respectiva face do poliedro equivalente. No caso geral de um estado distorsional de tensão, a obliquidade total ω será a soma da obliquidade hidrostática i mais a obliquidade distorsional α dada por (1).

f) Para haver equilíbrio dos grãos será portanto necessário que em cada contacto a obliquidade ω não exceda o ângulo de fricção Φ_s, isto é, que não haja rotura de nenhum contacto

AGRADECIMENTO

O autor expressa o seu agradecimento ao Eng.º José Folque, chefe da DF e ao Eng.º Castel-Branco Falcão, chefe da DEGE, pelos seus valiosos comentários após leitura do texto.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

NASCIMENTO, U. and TEIXEIRA, H. – Mechanismes of Internal Friction in Soil and Rocks, Symposium on Rock Fracture, Nancy, 1971.