

MECANISMOS DE ATRITO INTERNO DE SOLOS E ROCHAS*

Mechanisms of internal friction in soils and rocks

por

U. NASCIMENTO**

H. TEIXEIRA***

RESUMO - Analisam-se os diferentes mecanismos que geram atrito interno de solos e rochas por efeito de fricção, de cunha, de rotação e de rolamento. A partir da cinemática desses mecanismos, relacionam-se os ângulos de atrito gerados com as formas das partículas dos solos ou dos blocos dos maciços rochosos e com a amplitude da distorção sofrida pelo terreno. Apresentam-se também relações entre a dilatância provocada pela distorção com a amplitude desta.

Com base nos mecanismos elementares, deduzem-se relações para alguns mecanismos compostos, chamando-se a atenção para o efeito da rotação combinado com o efeito de fricção.

SYNOPSIS - The authors analyse the different mechanisms causing internal friction in soils and rocks, due to surface friction, wedge, rotation and rolling effects. From the kinematics of these mechanisms relations are obtained between the resulting angles of friction, the shapes of soil particles and rock blocks, and the shear displacement. Relations between shear dilatancy and shear displacement are also presented. From the basic mechanisms, the authors derive relations for some combined mechanisms, in special rotation plus surface friction.

INTRODUÇÃO

O ângulo de atrito interno de solos e rochas é usualmente determinado em ensaios de corte directo em que se impõe ao terreno um certo plano de corte, ou em ensaios triaxiais em que se impõe ao terreno uma deformação até à rotura, sem condicionamento quanto à superfície de corte.

* Comunicação apresentada ao 1.º Congresso Hispano-Luso-Americano de Geologia Económica, em Madrid, e ao Simpósio sobre Fracturação das Rochas, em Nancy, respectivamente em Set. e Out. de 1971.

** Chefe do Serviço de Geotecnia, Laboratório Nacional de Engenharia Civil, Lisboa, Portugal.

*** Geólogo, Departamento de Geologia de Engenharia, Instituto de Geociências da Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brasil, (Bolsista, no LNEC, do Conselho Nacional de Pesquisas, Brasil).

Nos ensaios de corte directo, o ângulo de atrito interno Φ é dado pela máxima inclinação da tensão resultante em relação à normal ao plano de corte, isto é, pela máxima obliquidade dessa tensão. Sendo σ e τ , as componentes dessa tensão, a obliquidade α é dada pela relação:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\tau}{\sigma}, \quad (1)$$

sendo portanto o ângulo de atrito interno obtido pela expressão:

$$\operatorname{tg} \Phi = \operatorname{tg} \alpha_m = \frac{\tau_R}{\sigma}, \quad (2)$$

onde τ_R é a tensão de corte que, sob σ constante, determina a rotura.

Na Fig. 1-a esquematiza-se um ensaio de corte directo, impondo-se o corte segundo a direcção Ox. O corte directo de deslocamento u , pode ser grosseiramente assimilado a uma distorção, dada por:

$$\gamma = \frac{u}{2b} \quad (3)$$

Na Fig. 1-b apresenta-se o círculo de Mohr das tensões para o caso da Fig. 1-a.

No ensaio triaxial que, para simplificar, é neste trabalho considerado biaxial, o ângulo de atrito interno é dado pela expressão:

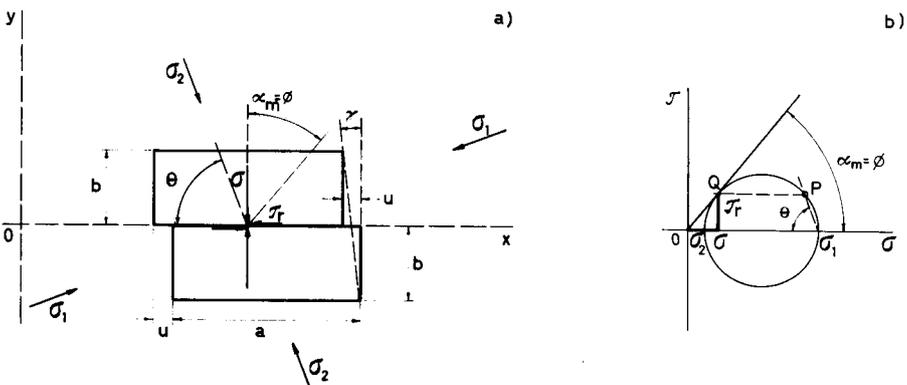


Fig. 1 - Ensaio de corte directo. - a) -Esquema do corte ao longo da direcção Ox; b) -Círculo de Mohr das tensões

$$\text{sen } \Phi = \frac{\sigma_{1R} - \sigma_2}{\sigma_{1R} + \sigma_2} \quad (4)$$

ou,

$$\text{tg } \Phi = \frac{\sigma_{1R} - \sigma_2}{2 \sqrt{\sigma_{1R} \times \sigma_2}}, \quad (5)$$

onde σ_{1R} é o valor da tensão principal máxima que produz a rotura, sob σ_2 constante.

As expressões (4) e (5) pressupõem a hipótese de que a rotura se dá pelo plano no qual, para as tensões σ_{1R} e σ_2 , é máxima a obliquidade da tensão resultante. Tal plano faz, como se sabe, um ângulo Θ_m com o plano principal máximo, que é dado por:

$$\Theta_m = 45^\circ + \frac{\alpha_m}{2} \quad (6)$$

Na Fig. 2-a, esquematiza-se este ensaio em que o plano de máxima obliquidade é paralelo ao eixo dos xx e na Fig. 2-b apresenta-se o círculo de Mohr das tensões em que a máxima obliquidade corresponde ao ponto Q, comum à

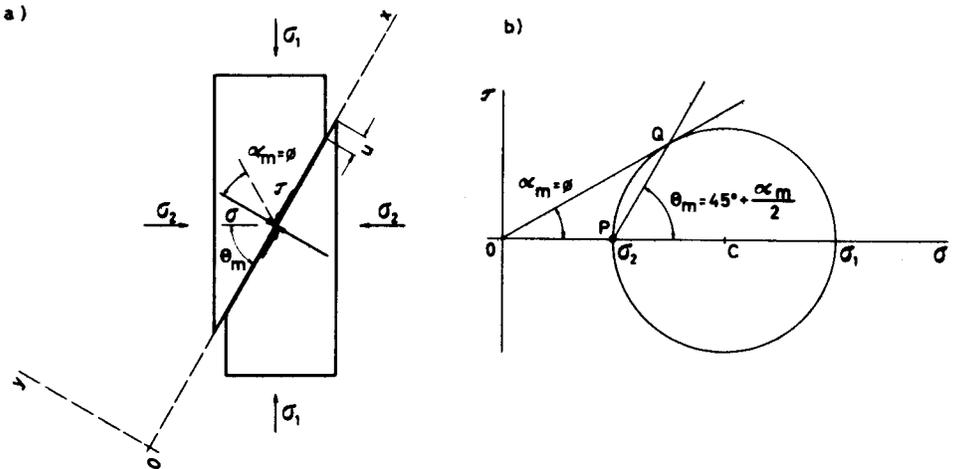


Fig. 2 - Ensaio biaxial. - a) -Esquema do ensaio; b) -Círculo de Mohr das tensões

tangente OQ ao círculo e à recta PQ tirada pelo ponto P paralelamente à direcção da faceta.

A hipótese da máxima obliquidade implica supor que o terreno tem igual resistência em todas as direcções e que, portanto, romperá por aquela em que a obliquidade for máxima. Assim, as expressões (4) e (5) implicam supor que o terreno é isótropo em relação ao corte.

Todavia, se o terreno não for isótropo em relação ao corte, como é comum, fácil será deduzir das conhecidas expressões:

$$\sigma = \sigma_1 \cos^2 \Theta + \sigma_2 \sin^2 \Theta \quad (7)$$

$$\tau = (\sigma_1 - \sigma_2) \sin \Theta \cos \Theta \quad (8)$$

que a obliquidade α correspondente à direcção Θ será dada por:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\frac{\sigma_1}{\operatorname{tg} \Theta} + \sigma_2 \operatorname{tg} \Theta} \quad (9)$$

e não pela expressão (5).

Chama-se a atenção para o facto de que, para simplificação, todo o estudo basear-se-á na consideração de que os materiais são idealmente rígidos, não se levando em conta portanto as deformações elásticas ou de outra natureza que possam ocorrer nas partículas ou blocos.

Ressalta-se também que foi realizada uma extensa pesquisa bibliográfica relacionada com este assunto, da qual se apresentam apenas algumas referências que se julgam essenciais.

ATRITO DE FRICÇÃO

Considerem-se duas partículas ou blocos de terreno em contacto por meio de duas faces planas e comprimidas uma contra a outra por uma força com uma obliquidade conforme a Fig. 1-a. Sendo N e T as componentes normal e tangencial dessa força e como elas se distribuem pela mesma área S das faces em contacto, tem-se de (1):

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{T}{N} = \frac{\tau}{\sigma} \quad (10)$$

Materiais	Fricção Estática		Fricção cinemática	
	tg Φ_s	Φ_s	tg Φ_k	Φ_k
Ferro fundido	1,10	48° 00'	0,15	8° 30'
Vidro	0,94	43° 00'	0,40	22° 00'
Aço duro	0,78	38° 00'	0,42	23° 00'
Madeira de carvalho:				
Paralela às fibras	0,62	32° 00'	0,48	26° 00'
Perpendicular às fibras	0,54	28° 00'	0,32	18° 00'
Teflon	0,04	2° 10'	0,04	2° 10'

Quadro 1 – Valores dos coeficientes de fricção estática e cinemática para alguns materiais deslizando sobre eles mesmos, segundo o American Institute of Physics Handbook (1957) e valores dos respectivos ângulos de fricção, calculados de (12) e (13).

Mantendo constante a força normal N e aumentando progressivamente a força tangencial T , atinge-se um valor desta para o qual uma partícula ou bloco desliza sobre o outro. A força T desenvolvida no contacto entre as faces e que se opõe a esse deslizamento, designa-se por força friccional. A relação entre a máxima força friccional desenvolvida e a respectiva força normal é o que se chama coeficiente de fricção estática μ_s , dado pela relação:

$$\mu_s = \frac{T_{\text{máx.}}}{N} \quad (11)$$

Uma vez iniciado o deslizamento, a força friccional geralmente diminui, diminuindo também o respectivo coeficiente, que passa a chamar-se coeficiente de fricção cinemática μ_k ou de fricção de deslizamento.

Aos coeficientes de fricção estática μ_s e de fricção cinemática μ_k , correspondem por (11) ângulos de fricção que se designarão respectivamente Φ_s e Φ_k e serão tais que:

$$\mu_s = \text{tg } \Phi_s \quad (12)$$

e

$$\mu_k = \text{tg } \Phi_k \quad (13)$$

Os valores destes coeficientes de fricção dependem de muitos factores, tais como a natureza dos materiais em contacto, a irregularidade das superfícies em contacto, a sua humidade, a contaminação por outras substâncias, a velocidade do deslizamento, a temperatura e as vibrações. Para se ter ideia das diferenças entre as forças friccionais estáticas e cinemáticas, apresenta-se no Quadro 1 valores dos coeficientes de fricção estática e cinemática para alguns materiais deslizando sobre eles mesmos, segundo o American Institute of Physics Handbook, (1957) bem como os valores dos ângulos de fricção correspondentes deduzidos de (12) e (13).

O diagrama de variação da obliquidade em função do deslocamento u terá o andamento esquematizado na Fig. 3. Para iniciar o deslizamento é necessário que α alcance o valor Φ_s e, imediatamente após alcançado esse ponto, cai para o valor Φ_k , mantendo-se nele ao longo do deslocamento. Se, após um certo deslocamento u_1 se suspender a força T , o deslizamento cessa imediatamente, sem qualquer reversibilidade. Para que o movimento seja reiniciado, é necessário que a força T alcance novamente o valor que resulta numa obliquidade igual a Φ_s , que atingida, cairá para Φ_k , como já se referiu.

Durante o deslizamento, a força T realiza um trabalho que é dado pelo produto $T \times u$ que, não havendo dilatância, é dissipado sob a forma de calor ou eventualmente consumido na produção de deformações permanentes nas superfícies de contacto.

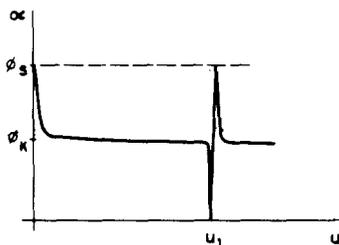


Fig. 3 – Diagrama de variação do ângulo de fricção com o deslocamento

ATRITO POR EFEITO DE CUNHA

Considerem-se agora duas partículas ou blocos de terreno, submetidos a um ensaio de corte nas condições esquematizadas na Fig. 4-a. Neste caso,

em vez do corte ocorrer pelo plano AB, paralelo ao plano de aplicação da força de corte, ocorre pelo plano A'B, de menor resistência, inclinado de um ângulo β em relação a AB.

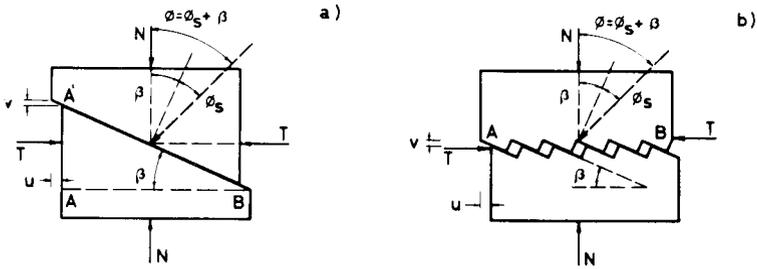


Fig. 4 – Efeito de cunha. – a)-Esquema do ensaio de corte directo ao longo de uma superfície inclinada de β com respeito à direcção da força de corte; b)-Esquema do ensaio de corte directo em blocos com superfícies dentadas.

Sendo Φ_s o ângulo de fricção estático entre os blocos na face A'B, uma vez atingida a rotura, terá que verificar-se por razões de equilíbrio estático, a seguinte relação:

$$\operatorname{tg} \Phi_s = \frac{T \cos \beta - N \operatorname{sen} \beta}{N \cos \beta + T \operatorname{sen} \beta}, \quad (14)$$

em que se tem no numerador as componentes de T e N na direcção do plano A'B e no denominador as componentes das mesmas forças segundo a normal ao mesmo plano.

Resolvendo a equação (14) em relação a $\frac{T}{N}$, obtem-se:

$$\frac{T_R}{N} = \operatorname{tg} (\Phi_s + \beta) \quad (15)$$

e como, por definição:

$$\frac{T_R}{N} = \operatorname{tg} \Phi, \quad (16)$$

tem-se que:

$$\Phi = \Phi_s + \beta \quad (17)$$

Vê-se assim que o ângulo de atrito interno do terreno cortado da maneira indicada é igual à soma do ângulo de fricção estática das respectivas faces em contacto com o ângulo que essas faces formam com o plano de aplicação da força de corte. Se o corte for realizado no sentido inverso ao esquematizado na Fig. 4-a, β será negativo e o valor de Φ será igual a $\Phi_s - \beta$.

Esta condição de equilíbrio será válida também para o caso em que o contacto entre blocos se fizer pela superfície dentada AB, constituída por pequenas rampas, como mostrado na Fig. 4-b, desde que a inclinação destas seja também β .

As componentes do deslocamento de um bloco em relação ao outro, são agora não apenas o deslocamento u na direcção da força de corte mas também o deslocamento v na direcção ortogonal. Daí concluir-se que a cinemática desta deformação implica uma dilatância cujo valor, conforme se deduz da Fig. 4-a, é dado por:

$$v = u \cdot \text{tg } \beta \quad (18)$$

Se o corte for no sentido inverso, a dilatância será negativa, como é óbvio.

Na Fig. 5-a, esquematiza-se o diagrama de variação de α com o desloca-

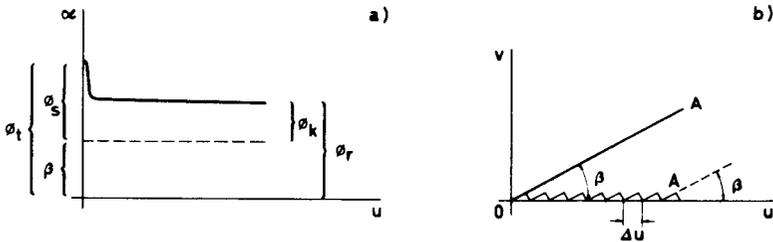


Fig. 5 - Efeito de cunha. - a)-Diagrama de variação do ângulo de atrito interno com o deslocamento; b)-Curvas de dilatância para os casos apresentados nas Figs. 4-a e 4-b

mento de corte u , notando-se que no início do corte, quando a fricção é estática, obtem-se o valor do ângulo de atrito interno de pico, Φ_t , que é:

$$\Phi_t = \Phi_s + \beta \quad (19)$$

Depois de iniciado o deslizamento, alcança-se o valor do ângulo de atrito interno residual, Φ_r , dado por:

$$\Phi_r = \Phi_k + \beta \quad (20)$$

O diagrama da Fig. 5-b representa as curvas da dilatância para os casos apresentados nas Figs. 4-a e 4-b. No primeiro caso ela é a recta OA', inclinada de β sobre o eixo dos uu, e no segundo é dada pela linha dentada OA. Se o comprimento das cunhas, Δu , for muito pequeno, a amplitude da dilatância será pequena também, sugerindo que quando Δu tende para zero, a dilatância também o tende.

ATRITO POR EFEITO DE ROTAÇÃO

Suponha-se uma camada de terreno a que se faz corresponder um modelo constituído por paralelepípedos iguais entre si, como se vê na Fig. 6. O modelo está carregado com uma força normal N e é submetido ao corte na direcção xx, por uma força T . Os paralelepípedos têm dimensões a de base e b de altura, definindo-se um ângulo pela relação:

$$\text{tg } \delta = \frac{a}{b} \quad (21)$$

Se um paralelepípedo isolado for colocado sobre um plano horizontal, apoiado pela base a e em seguida se inclinar esse plano, quando essa inclinação atingir o valor δ , o paralelepípedo entra em rotação em torno da aresta inferior e cai por derrubamento. Por esse facto, δ será chamado ângulo de derrubamento.

Tendo-se um conjunto de paralelepípedos dispostos paralelamente uns aos outros e afastados entre si, quando a obliquidade α atingir o ângulo de derrubamento δ , eles entrarão em rotação, o que equivale a iniciar-se uma rotura por rotação, que se distingue dos casos anteriores, em que elas são de translação. Este fenómeno ocorrerá quando α igualar δ , desde que o ângulo de fricção estática Φ_s seja superior ao ângulo de derrubamento δ .

Iniciada a rotação, a camada sofre uma distorção γ . Durante essa distorção, o ponto P passa para P' descrevendo um arco de círculo centrado

em O, cujo raio é a diagonal da face do paralelepípedo. A equação do referido círculo é:

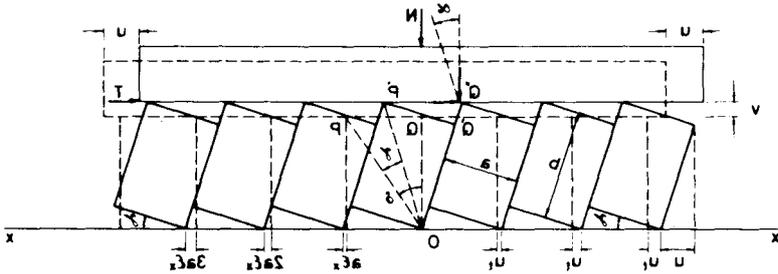


Fig. 6 - Distorção por efeito de rotação numa camada de paralelepípedos contíguos

$$(a - u)^2 + (b + v)^2 = a^2 + b^2, \quad (22)$$

onde u e v são as componentes do deslocamento PP' , segundo Ox e Oy . O ângulo da distorção γ é dado aproximadamente pela relação

$$\gamma = \frac{u}{b} \quad (23)$$

O valor da dilatância v , deduz-se de (22) e é:

$$v = \sqrt{b^2 + 2au - u^2} - b \quad (24)$$

Dividindo-se (24) por b e satisfazendo as relações (21) e (23), obtém-se a extensão normal ao plano de distorção ϵ_y , isto é, a extensão dilatante, que é:

$$\epsilon_y = \sqrt{1 + 2 \operatorname{tg} \delta \cdot \operatorname{tg} \gamma - \operatorname{tg}^2 \beta} - 1 \quad (25)$$

Além da distorção γ e da extensão ϵ_y , os paralelepípedos sofrem uma translação correspondente ao aumento de comprimento segundo o eixo xx , dada por:

$$P'Q'' - PQ = \frac{a}{\cos \gamma} - a \quad (26)$$

a que corresponde a extensão

$$\varepsilon_x = \frac{1}{\cos \gamma} - 1 \quad (27)$$

A translação u_t de um paralelepípedo a uma certa distância x do eixo de simetria da camada, será:

$$u_t = \varepsilon_x \cdot x \quad (28)$$

O deslocamento de um ponto na face inferior da camada será apenas a translação dada por (28), enquanto que o dum ponto da face superior, será a soma daquela translação com o deslocamento distorcional u , ou seja:

$$u_s = u_t + u \quad (29)$$

Durante a rotação, o equilíbrio dos paralelepípedos afastados implicará a condição:

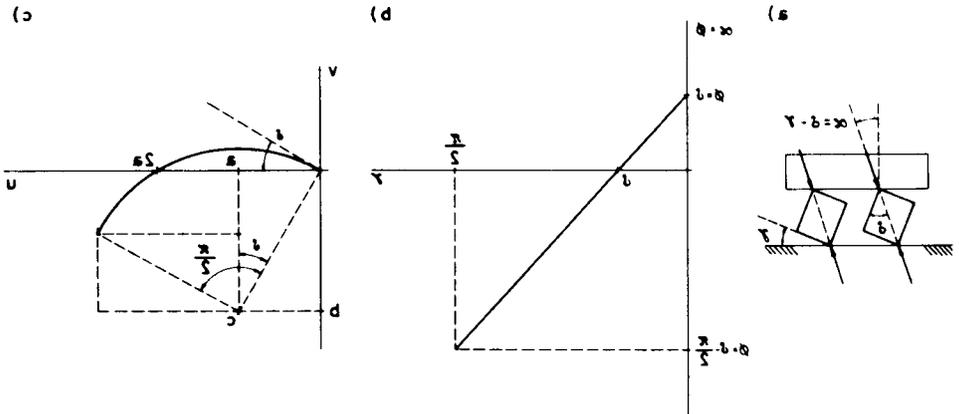


Fig. 7 - Modelo com paralelepípedos afastados entre si. - a)-Distorção devida à rotação; b)-Variação do ângulo de atrito interno devida à rotação; c)-Curva da dilatação devida à rotação

$$\alpha = \delta - \gamma, \quad (30)$$

e como a camada está em rotura, a obliquidade é igual ao ângulo de atrito interno, pelo que se tem:

$$\Phi = \delta - \gamma \quad (31)$$

Na Fig. 7-a está representado o modelo com os paralelepípedos afastados e na Fig. 7-b, a recta que representa a condição expressa em (31).

Na posição inicial, quando $\gamma = 0$, o ângulo de atrito interno é máximo e igual ao ângulo de derrubamento, $\Phi = \delta$, Fig. 7-b. À medida que a distorção aumenta, o ângulo de atrito interno vai diminuindo linearmente até que se anula quando $\gamma = \delta$, isto é quando a diagonal da face dos paralelepípedos fica paralela ao eixo dos yy . Durante essa distorção, a dilatância v varia com u , segundo o diagrama circular da Fig. 7-c. O ponto de $\Phi = 0$ corresponde à dilatância máxima e tem lugar quando $u = a$. Depois de alcançado esse ponto, o ângulo de atrito interno torna-se negativo, isto é, a força T é de tracção. Quando $\gamma = \frac{\pi}{2}$, os paralelepípedos passam a apoiar-se sobre seu lado maior.

Quando os paralelepípedos estão encostados uns aos outros, as condições de equilíbrio estático de cada elemento já não são tão simples quanto expresso em (30), visto que as forças de encosto dos elementos uns contra os outros variam, variando consequentemente a resistência que eles oferecem à respectiva rotação. Com efeito, no elemento extremo da Fig. 6, é nula a força de encosto na face exterior mas não na face interior, onde ela é igual à força friccional desenvolvida nas faces superior e inferior. Nos elementos contíguos, a força de encosto na face exterior é igual à do elemento extremo, enquanto que na face interior é aquela mais a força friccional que o próprio elemento desenvolve nas faces superior e inferior. Isto prossegue, até que no elemento central, as forças de encosto são, em ambas as faces, interna e externa, iguais à soma das forças friccionais desenvolvidas nas faces superiores e inferiores de todos os elementos, em metade da extensão da camada.

Para evitar as dificuldades inerentes ao ensaio de corte directo como esquematizado na Fig. 6, aborde-se então o problema por meio do ensaio biaxial representado na Fig. 8-a, cujo círculo de Mohr das tensões está dado na Fig. 8-b. Como se vê, a tensão nas faces xx dos paralelepípedos é representada pelo ponto Q_x , tal que PQ_x é paralelo às ditas faces. A inclinação

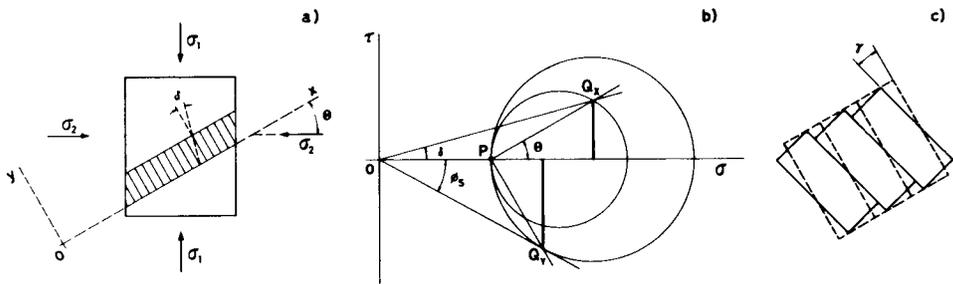


Fig. 8 – Efeito de rotação. – a) -Esquema de um ensaio biaxial; b) -Círculo de Mohr das tensões; c) -Deslizamento dos blocos uns sobre os outros devido à rotação

da recta OQ_x tem que ser igual ao ângulo de derrubamento δ no início da rotação, quando os paralelepípedos estão afastados entre si. Como eles estão em contacto, nas faces paralelas a yy , existe uma tensão adicional representada pelo ponto Q_y , mantido o mesmo valor de σ_2 .

A cinemática da rotação dos paralelepípedos implica, como mostra a Fig. 8-c, que eles necessariamente deslizem uns sobre os outros. Para que esse deslizamento possa ocorrer é necessário que nas faces yy , a obliquidade da tensão atinja o respectivo ângulo de fricção estática ϕ_s . Portanto, para que se inicie a rotura por rotação, é necessário que se sobreponham duas condições:

i) Que a obliquidade da tensão resultante nas faces xx atinja o ângulo de derrubamento, sendo este menor que o respectivo ângulo de fricção estática dessas faces e,

ii) Que a obliquidade da tensão resultante nas faces yy atinja o ângulo de fricção estática dessas faces.

Parece portanto, que o ângulo de atrito interno dum terreno nas condições consideradas, será:

$$\Phi = \Phi_s + \delta \quad (32)$$

A curva de corte correspondente ao ensaio esquematizado na Fig. 8-a, está representada na Fig. 9-a e a curva da dilatância é do tipo apresentado na Fig. 9-b.

Note-se que para distorções superiores a δ , correspondentes a deslocamentos de cortes superiores a a , a dilatância será decrescente.

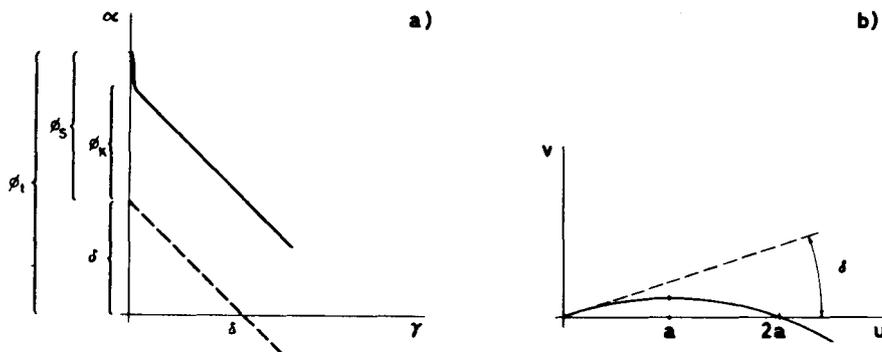


Fig. 9 - Efeito de rotação. - a)-Variação do ângulo de atrito interno com a distorção; b)-Curva da dilatância.

ATRITO DE ROLAMENTO

À medida que o ângulo de derrubamento δ de uma partícula vai diminuindo, menor vai sendo também o atrito interno que lhe está associado. Essa diminuição pode dar-se de duas maneiras: numa delas, as partículas do terreno tem secções assimiláveis a polígonos com todos os seus n lados iguais, tendo então um ângulo de derrubamento que será:

$$\delta = \frac{180^\circ}{n} \quad (33)$$

Aumentando o número de faces da partícula, esta tenderá para a forma esférica, tendendo assim para zero o valor de δ . Quando essa forma é atingida, mostra contudo a experiência, que mesmo em esferas muito perfeitas, subsiste uma certa resistência ao derrubamento, o que se designa por atrito de rolamento Φ_R e é expresso por:

$$\mu_R = \frac{T}{N} = \text{tg } \Phi_R, \quad (34)$$

onde μ_R é o coeficiente de atrito de rolamento.

Os valores de μ_R e Φ_R são geralmente muito pequenos. Segundo o American

Institute of Physics Handbook, (1957), tem-se para cilindros de diversos materiais rolando sobre planos de materiais semelhantes, os valores que estão apresentados no Quadro 2.

Material	μ_R	Φ_R
Madeira dura	0,02	1° 8' 45''
Ferro fundido ou aço	0,002	0° 6' 53''
Aço duro polido	0,0004	0° 1' 23''

Quadro 2 – Valores de coeficientes e ângulos de atrito de rolamento segundo o American Institute of Physics Handbook, (1957).

A outra via de diminuição do ângulo de derrubamento reside na diminuição da dimensão do paralelepípedo básico, de forma a tornar as partículas lamelares, como o que ocorre com as micas nos solos ou com os xistos nas rochas.

AGRADECIMENTO

Ao Engenheiro José B. Folque, Invesstigador e Chefe da Divisão de Fundações do Serviço de Geotecnia do Laboratório Nacional de Engenharia Civil, pelos seus valiosos comentários após a leitura do texto.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- American Institute of Physics Handbook, McGraw-Hill Book Co. Inc., New York, 1957.
- BOWDEN, F. P. – Friction, Science News 4, pp. 139-171, London, 1947.
- BOWDEN, F. P. and D. Tabor – The Friction and Lubrification of Solids, Part II, Clarendon Press, Oxford, 1964.
- FLOM, D. G. e A. M. Bueche – Theory of Rolling Friction of Spheres, Journal of Applied Physics, v. 30, n. 11, pp. 1725-1730, New York, 1959.
- HAYASHI, M. and Y. Fujiwara – A. Mechanism of Anisotropic Dilatancy and Shear Failure of Laminated Jointed Rock Masses, Central Research Institute of Electric Power Industry, Tec. Rept. C. 67006, Tokyo, 1968.

- MENCL, V. – Dilatancy of Rocks, *Rock Mechanics and Engineering Geology*, v. III/2, pp. 58-61, New York, 1965.
- PATTON, F. D. – Multiple Modes of Shear Failure in Rock and Related Materials, Ph. D. Thesis, University of Illinois, Urbana, 1966.
- RABINOWICZ, E. – The Nature of Static and Kinetic Coefficients of Friction, *Journal of Applied Physics*, v. 22, n. 11, pp. 1373-1379, New York, 1951.