

# RESPOSTA HARMÓNICA DE UMA CAMADA VISCOELÁSTICA

## Harmonic response of a viscoelastic layer

Jaime A. Santos\*

**RESUMO** – Este trabalho apresenta o desenvolvimento teórico sobre a resposta harmónica de uma camada viscoelástica em corte simples. Analisam-se vários modelos de amortecimento em sistemas lineares. Estuda-se e compara-se a resposta da camada para vários tipos de amortecimento.

**SYNOPSIS** – This paper presents the theoretical approach for the assessment of the harmonic response of a viscoelastic layer in simple shear. Various damping models in linear systems are analysed. The layer response for several types of damping are studied and compared.

### 1 - INTRODUÇÃO

A quantificação dos movimentos sísmicos do terreno constitui um dos problemas clássicos da engenharia sísmica geotécnica. Este problema assume particular relevância, quando as condições locais forem favoráveis à ocorrência de amplificação das ondas sísmicas pelo terreno.

Os efeitos de amplificação das ondas sísmicas têm sido largamente estudados recorrendo a análises unidimensionais em que o terreno é discretizado em camadas horizontais. O modelo constitutivo de Kelvin-Voigt com amortecimento histerético é talvez o modelo mais utilizado para descrever o comportamento do solo em corte cíclico simples.

Na análise do problema de equilíbrio dinâmico linear, é também usual recorrer-se ao amortecimento viscoso em vez do amortecimento histerético, dada as vantagens que aquele tipo de amortecimento proporciona em termos de eficiência computacional.

A consideração de amortecimento viscoso permite evitar o recurso a variáveis complexas e a solução do problema, em regime linear, pode ser obtida recorrendo ao bem conhecido método de sobreposição modal. Este método é particularmente adequado para resolver problemas com um grande número de graus de liberdade e com acções relativamente prolongadas. Neste método, propõe-se uma transformação do sistema inicial numa outra forma de resolução mais eficiente. Esta transformação pode ser realizada, quer no domínio do tempo, quer no domínio da frequência. Para certos casos particulares, o problema de equilíbrio dinâmico pode ser resolvido de uma forma muito eficiente, devido ao total desacoplamento do sistema inicial. Quando isto sucede, o problema inicial da resolução de um sistema de  $n$  graus de liberdade pode ser reduzido à sobreposição das soluções de  $n$  sistemas de um grau de liberdade.

Porém, a natureza histerética do amortecimento do solo da forma como é definida no modelo de Kelvin-Voigt acaba por esvanecer, passando-se a definir coeficientes de amortecimento modal para cada modo de vibração. Suscita assim o interesse em investigar qual o tipo de amortecimento modal a considerar de modo a conduzir a uma dissipação de energia equivalente ao amortecimento histerético.

---

\* Professor Auxiliar do Instituto Superior Técnico, e-mail: jaime@civil.ist.utl.pt

Neste trabalho, apresenta-se o desenvolvimento teórico que permite analisar a resposta harmónica de uma camada viscoelástica, para vários tipos de amortecimento.

## 2 - MODELOS VISCOELÁSTICOS APLICADOS AOS SOLOS

No estudo de problemas em que o solo é sujeito a acções cíclicas é necessário o estabelecimento de uma lei constitutiva que descreva fundamentalmente a relação entre as tensões de corte e as distorções (relação  $\tau - \gamma$ ). Essa relação depende sobretudo do nível de distorção envolvido.

No domínio das pequenas distorções, a utilização de modelos elásticos é plenamente justificável, sendo o módulo de distorção o parâmetro principal a determinar. O seu valor é praticamente constante, sendo nesta situação denominado por módulo de distorção máximo ou inicial,  $G_0$ . Para a grande maioria dos solos, nesta gama das pequenas distorções, a energia que é dissipada durante a aplicação de ciclos de carga repetitivos é bastante pequena (amortecimento desprezável). Apenas alguns solos especiais, com elevado índice de vazios, tal como as turfas, apresentam amortecimento não desprezável, mesmo para níveis de distorção da ordem de  $10^{-5}$  (Santos, 1999).

Para a zona intermédia, com valores da distorção entre  $10^{-4}$  e  $10^{-3}$ , o comportamento do solo é elastoplástico e o módulo de distorção secante  $G$  decresce com o aumento do nível de distorção. Ao mesmo tempo, a energia que é dissipada quando o solo é sujeito a carregamentos cíclicos aumenta com o nível de distorção. Consta-se experimentalmente que essa energia dissipada é praticamente independente da frequência da excitação. Neste tipo de amortecimento, de natureza histerética, o coeficiente de amortecimento,  $\xi$ , é o parâmetro que pode ser utilizado para modelar a capacidade de dissipação de energia do solo. Como o nível de distorção envolvido ainda não é o suficiente para provocar a degradação e a alteração progressiva das propriedades iniciais do solo, o módulo de distorção e o coeficiente de amortecimento não variam significativamente ao longo dos sucessivos ciclos de carregamento. Nestas condições, é ajustada a aplicação de modelos viscoelásticos, em que aqueles dois parâmetros ( $G$  e  $\xi$ ) são expressos em função do nível de distorção. É usual a aplicação do método linear equivalente que consiste, por sucessivas iterações, em achar uma solução do problema compatível com o nível de distorção envolvido.

Para níveis de distorção da ordem de  $10^{-2}$  ou superiores ocorrem alterações significativas nas características mecânicas do solo, dependendo não só do nível de distorção mas também do número de ciclos de carregamento. O módulo de distorção secante e o amortecimento variam com o número de ciclos e dependem essencialmente da forma como ocorre a alteração das tensões efectivas quando um solo saturado é sujeito a uma história irregular de tensões de corte no tempo. Deste modo, é necessário estabelecer uma lei constitutiva que descreva a relação  $\tau - \gamma$  em sucessivas fases de carga, descarga ou recarga, tendo em consideração as variações da pressão da água intersticial. Neste domínio, onde estão envolvidos elevados níveis de distorções incorrendo plastificação do solo, é necessário aplicar métodos incrementais com integrações numéricas passo a passo no tempo.

Para a zona intermédia, o modelo constitutivo de Kelvin-Voigt é o modelo teórico mais utilizado para descrever o comportamento dos solos em corte cíclico simples. A relação  $\tau - \gamma$  é descrita pela equação seguinte:

$$\tau = G\gamma + \mu \frac{d\gamma}{dt} \quad (1)$$

em que  $\tau$  é a tensão de corte,  $G$  é o módulo de distorção,  $\gamma$  é a distorção,  $\mu$  é o coeficiente de viscosidade e  $t$  é o tempo.

Neste modelo, a dissipação de energia do sistema deve-se unicamente à componente de amortecimento, e mostra-se que o trabalho dissipado  $\Delta W$  num ciclo de carga harmónico é definido pela equação seguinte:

$$\Delta W = \pi \mu \omega \gamma_A^2 \quad (2)$$

em que  $\omega$  é a frequência de vibração e  $\gamma_A$  é a amplitude da distorção.

A equação 2 evidencia claramente como o trabalho dissipado depende da frequência de excitação: trata-se do modelo de Kelvin-Voigt com amortecimento viscoso.

No estado actual do conhecimento, constata-se experimentalmente que o amortecimento é afectado pela frequência e (ou) pela taxa de distorção. No entanto, para a gama de frequências com interesse para os estudos sísmicos, isto é, entre 0,1Hz e 10Hz, pode-se considerar com razoável que o amortecimento é independente da frequência (Taksuoka et al., 1997; Lo-Presti et al. 1997; Cavallaro et al., 2001).

Estes estudos mais recentes estão de acordo com o trabalho de Hardin (1965). Aquele autor realizou, para vários tipos de areia, um conjunto de ensaios de coluna ressonante com vibração em regime permanente e vibração em regime livre, e também ensaios cíclicos de torção, para amplitudes de distorção entre  $10^{-6}$  e  $10^{-4}$  e frequências variáveis até 600 Hz. Os resultados dos ensaios revelaram que o modelo de Kelvin-Voigt pode ser utilizado para descrever adequadamente o comportamento cíclico dos solos no domínio das pequenas a médias deformações, desde que se considere que a viscosidade do solo decresça proporcionalmente com a frequência de excitação, de tal forma que o produto de  $\mu$  por  $\omega$  se mantenha constante. A verificar-se esta condição, o trabalho dissipado será independente da frequência de vibração, como se pode constatar da equação 2: trata-se, neste caso, do modelo de Kelvin-Voigt com amortecimento histerético.

Outra forma equivalente e, por vezes, mais expedita de modelar o amortecimento histerético do solo, consiste na utilização de variáveis complexas. Esta abordagem equivale a considerar para o solo uma rigidez cuja parte complexa é independente da frequência de excitação, ou seja:

$$G^* = G + i 2 \xi \quad (3)$$

em que  $i$  é a unidade imaginária.

Com base na teoria elementar dos osciladores de um grau de liberdade, deduz-se a relação entre o coeficiente de viscosidade  $\mu$  e o coeficiente de amortecimento histerético  $\xi$  :

$$\xi = \frac{\mu \omega}{2G} = c^{te} \quad (4)$$

### 3 - RESPOSTA HARMÓNICA DE UMA CAMADA VISCOELÁSTICA

#### 3.1 - Descrição do problema

Suponha-se, então, uma camada de solo homogénea assente sobre estrato rígido. A camada é submetida a acções harmónicas na base e admita-se o estado de tensão em corte cíclico simples. Adoptando para o solo o modelo de Kelvin-Voigt, a equação diferencial que rege o comportamento da camada viscoelástica em regime de vibração livre é dada por:

$$\rho_s \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \mu \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial z^2} - G \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad (5)$$

em que  $\rho_s$  é a massa volúmica do solo,  $u$  é o deslocamento relativo na direcção horizontal e  $z$  é a altura contada a partir da base rígida.

Apresenta-se, a seguir, o desenvolvimento matemático para descrever a resposta da camada para vários tipos de amortecimento do solo.

### 3.2 - Amortecimento hysterético

Como já se viu anteriormente, no modelo de Kelvin-Voigt com amortecimento hysterético o coeficiente de viscosidade decresce proporcionalmente com a frequência de excitação  $\omega$ . Nesta situação, introduz-se o resultado da equação 4 na equação 5, e obtém-se, para o regime de vibração livre, a equação seguinte:

$$\rho_s \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{2\xi G}{\omega} \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial z^2} - G \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad (6)$$

Para o problema em estudo, a solução é obtida tendo em conta duas condições:

- superfície livre, ou seja, tensão de corte nula no topo da camada;
- fronteira rígida na base, onde se impõe a evolução temporal dos deslocamentos harmónicos.

A resolução do problema através da equação diferencial 6 é bastante trabalhosa (Santos, 1999). A utilização de variáveis complexas permite resolver o mesmo problema de uma forma muito mais expedita.

A solução exacta é bem conhecida da bibliografia. O factor de amplificação dinâmica definido como sendo a relação entre as amplitudes do deslocamento absoluto no topo e na base da camada, é dado por:

$$D = \frac{1}{\cos\left(\frac{\omega H}{V_s \sqrt{1 + 2i\xi}}\right)} \quad (7)$$

em que  $V_s$  é a velocidade de propagação das ondas de corte,  $H$  é a altura da camada de solo e  $\omega$  é a frequência de vibração da acção harmónica imposta na base.

### 3.3 - Amortecimento modal

#### 3.3.1 - Método de sobreposição modal

O método de sobreposição modal com grande aplicação na análise de sistemas discretos também pode ser aplicado para sistemas com massas distribuídas com infinitos graus de liberdade (Clough e Penzien, 1975). Para tal, uma vez obtidas as frequências próprias e os modos de vibração do sistema, basta considerar as amplitudes modais como coordenadas generalizadas e não como coordenadas locais em pontos discretos do sistema.

O método da sobreposição modal aplicado a um sistema com apenas uma coordenada generalizada  $z$  conduz à equação seguinte:

$$u(z, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(z) Y_i(t) \quad (8)$$

em que  $\phi_i(z)$  é o modo de vibração  $i$  expresso em função da coordenada  $z$  e  $Y_i(t)$  é a amplitude do modo de vibração  $i$  para o instante  $t$ .

Aplicado agora para o estudo da resposta da camada viscoelástica sujeita a acções harmónicas na base, introduz-se na equação diferencial 5 o resultado da equação 8 e considera-se para o segundo membro da equação diferencial 5 uma força específica fictícia aplicada na base dada por:

$$a_b = \rho_s \omega_n^2 u_b \text{sen}(\omega t) \quad (9)$$

As frequências próprias e os modos de vibração normalizados são obtidos aplicando o método de separação das variáveis para a resolução da equação diferencial 5. Estes valores são bem conhecidos da literatura, sendo dados por:

$$\omega_n = (2n-1) \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{G}{\rho_s H^2}} \quad , \quad \text{sendo } n = 1, 2, \dots \quad (10)$$

e

$$\phi_n = \text{sen} \left[ (2n-1) \frac{\pi}{2} \frac{z}{H} \right] \quad , \quad \text{sendo } n = 1, 2, \dots \quad (11)$$

Para avaliar a contribuição de cada modo de vibração na resposta global da camada multiplica-se ambos os membros da equação diferencial por  $\phi_n(z)$  e integra-se ao longo da espessura da camada:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{\infty} \ddot{Y}_i(t) \rho_s \int_0^H \phi_i(z) \phi_n(z) dz - \sum_{i=1}^{\infty} \dot{Y}_i(t) \mu \int_0^H \frac{\partial^2 \phi_i(z)}{\partial z^2} \phi_n(z) dz - \\ & - \sum_{i=1}^{\infty} Y_i(t) G \int_0^H \frac{\partial^2 \phi_i(z)}{\partial z^2} \phi_n(z) dz = \int_0^H \phi_n(z) a(z, t) dz \end{aligned} \quad (12)$$

Aplicando as condições de ortogonalidade dos vários modos de vibração com respeito à massa e à rigidez do solo, concluiu-se que todos os termos do somatório são nulos, com excepção do termo em  $n$ , isto é:

$$\begin{aligned} & \ddot{Y}_n(t) \rho_s \int_0^H \phi_n^2(z) dz - \dot{Y}_n(t) \mu \int_0^H \frac{\partial^2 \phi_n(z)}{\partial z^2} \phi_n(z) dz - \\ & - Y_n(t) G \int_0^H \frac{\partial^2 \phi_n(z)}{\partial z^2} \phi_n(z) dz = \int_0^H \phi_n(z) a(z, t) dz \end{aligned} \quad (13)$$

Definindo a massa generalizada  $M_n$  e a força generalizada  $P_n(t)$  por:

$$M_n = \rho_s \int_0^H \phi_n^2(z) dz \quad (14)$$

e

$$P_n = \int_0^H \phi_n(z) a(z, t) dz \quad (15)$$

e tendo em conta que:

$$-G \int_0^H \frac{\partial^2 \phi_n(z)}{\partial z^2} \phi_n(z) dz = \omega_n^2 M_n \quad (16)$$

$$-\mu \int_0^H \frac{\partial^2 \phi_n(z)}{\partial z^2} \phi_n(z) dz = \mu' \omega_n^2 M_n \quad (17)$$

a equação 5 dará assim lugar a:

$$\ddot{Y}_i(t) M_n + \dot{Y}_i(t) \mu' \omega_n^2 M_n + Y_i(t) \omega_n^2 M_n = P_n(t) \quad (18)$$

Esta equação escrita em termos de coordenadas generalizadas proporciona a resposta para cada modo de vibração  $n$ . Esta equação é em tudo semelhante à equação de movimento de um oscilador de um grau de liberdade em que a rigidez  $K_n$  e a constante do amortecedor  $C_n$  são dadas por:

$$K_n = \omega_n^2 M_n \quad (19)$$

$$C_n = \mu' \omega_n^2 M_n \quad (20)$$

Para o problema em análise, a massa e a força generalizada são dadas, respectivamente, por:

$$M_n = \rho_s \int_0^H \phi_n^2(z) dz = \frac{\rho_s H}{2} \quad (21)$$

e

$$P_n(t) = \int_0^H \phi_n(z) a(z, t) dz = \frac{\rho_s \omega^2 u_b}{(2n-1) \frac{\pi}{2H}} \text{sen}(\omega t) = P_n \text{sen}(\omega t) \quad (22)$$

A amplitude modal  $Y_n(t)$  obtém-se recorrendo à solução em regime de vibração permanente de um oscilador de um grau de liberdade com coeficiente de amortecimento modal  $\xi_n$ , sujeito a uma excitação harmónica simples:

$$Y_n(t) = \frac{P_n(t)}{M_n \omega_n^2} \left[ \frac{(1 - \beta_n^2) \text{sen}(\omega t) - 2 \xi_n \beta_n \text{cos}(\omega t)}{(1 - \beta_n^2)^2 + (2 \xi_n \beta_n)^2} \right] \quad (23)$$

em que:

$$\beta_n = \frac{\omega}{\omega_n} \quad (24)$$

e o coeficiente de amortecimento modal  $\xi_n$  é dado por:

$$\xi_n = \frac{C_n}{2 M_n \omega_n} = \frac{\mu' \omega_n}{2} \quad (25)$$

O deslocamento relativo no topo da camada obtém-se combinando agora as equações 5, 21, 22 e 23, o que, após algumas manipulações matemáticas, conduz à série:

$$u(H, t) = \frac{4}{\pi} u_b \sum_{i=1}^n \pm \left[ \frac{\beta_n^2}{(2n-1)} \right] \left[ \frac{(1 - \beta_n^2) \text{sen}(\omega t) - 2 \xi_n \beta_n \text{cos}(\omega t)}{(1 - \beta_n^2)^2 + (2 \xi_n \beta_n)^2} \right] \quad (26)$$

Os termos de ordem ímpar e de ordem par desta série tomam, respectivamente, o sinal positivo e negativo.

Esta equação geral permite obter a resposta da camada viscoelástica para diferentes tipos de amortecimento modal.

O factor de amplificação dinâmica  $D$  obtém-se através da relação entre as amplitudes dos deslocamentos absolutos no topo e na base da camada. Para isso, agrupam-se os termos em seno e co-seno e, após eliminação da variável  $u_b$ , obtém-se:

$$D = \sqrt{D1^2 + D2^2} \quad (27)$$

em que:

$$D1 = 1 + \frac{4}{\pi} \sum_{i=1}^n \pm \left[ \frac{\beta_n^2}{(1 - \beta_n^2)^2 + (2 \xi_n \beta_n)^2} \right] \left[ \frac{1 - \beta_n^2}{(2n-1)} \right] \quad (28)$$

$$D2 = \frac{4}{\pi} \sum_{i=1}^n \pm \left[ \frac{\beta_n^2}{(1 - \beta_n^2)^2 + (2 \xi_n \beta_n)^2} \right] \left[ -\frac{2 \xi_n \beta_n}{(2n-1)} \right] \quad (29)$$

Estas equações permitem determinar a resposta da camada para diferentes tipos de amortecimento modal. Analisam-se, neste trabalho, quatro tipos de amortecimento modal:

- amortecimento modal constante,
- amortecimento tipo Rayleigh,
- coeficiente de viscosidade constante,
- amortecimento proporcional à massa.

### 3.3.2 - Amortecimento modal constante

Este caso corresponde a considerar  $\xi_n = \xi$  para todos os modos de vibração. O coeficiente de viscosidade decresce proporcionalmente com as frequências próprias de vibração e não com a frequência de excitação tal como sucede no amortecimento histerético, ou seja:

$$\mu' = \frac{2\xi}{\omega_n} \quad (30)$$

### 3.3.3 - Amortecimento tipo Rayleigh

Na análise modal o desacoplamento do sistema de equações diferenciais inicial é possível desde que o amortecimento seja igualmente ortogonalizável pelos modos de vibração, tal como sucede em relação à massa e à rigidez.

Os modos de vibração são ortogonais em relação a qualquer função que seja uma combinação linear da massa e da rigidez. Trata-se do amortecimento Rayleigh habitualmente utilizado em análises dinâmicas em que:

$$C_n = a_0 M_n + a_1 K_n \quad (31)$$

donde se pode deduzir que,

$$\xi_n = \frac{a_0}{2\omega_n} + \frac{a_1\omega_n}{2} \quad (32)$$

As constantes  $a_0$  e  $a_1$  podem ser determinadas se forem conhecidos os valores do coeficiente de amortecimento para dois modos de vibração  $m$  e  $n$  quaisquer:

$$\begin{Bmatrix} \xi_m \\ \xi_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\omega_m} & \frac{\omega_m}{2} \\ \frac{1}{2\omega_n} & \frac{\omega_n}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{Bmatrix} \quad (33)$$

Se efectuar o ajustamento para o 1º e o 3º modo de vibração, considera-se então  $\xi_1 = \xi_3 = \xi$  para  $\omega_1$  e  $\omega_3 = 5\omega_1$ , respectivamente. Nestas condições mostra-se que:

$$\begin{cases} a_0 = \frac{5}{3}\xi\omega_1 \\ a_1 = \frac{1}{3}\frac{\xi}{\omega_1} \end{cases} \quad (34)$$

e o coeficiente  $\mu'$  é dado por:

$$\mu' = \frac{5}{3}\xi\frac{\omega_1}{\omega_n^2} + \frac{1}{3}\frac{\xi}{\omega_1} \quad (35)$$

e

$$\frac{\xi_n}{\xi} = \frac{5}{6}\left(\frac{\omega_1}{\omega_n}\right) + \frac{1}{6}\left(\frac{\omega_n}{\omega_1}\right) \quad (36)$$



### 3.3.4 - Coeficiente de viscosidade constante

Faz-se notar que este caso corresponde à situação em que o amortecimento é proporcional à rigidez. É assim um caso particular do amortecimento tipo Rayleigh em que  $a_0 = 0$  e  $a_1 = \mu'$ . Efectuando o ajustamento para o 1º modo de vibração tem-se:

$$\mu' = \frac{2\xi}{\omega_1} \quad (37)$$

e

$$\frac{\xi_n}{\xi} = \frac{\omega_n}{\omega_1} \quad (38)$$

donde se conclui que o amortecimento modal cresce com o número de ordem do modo de vibração variando proporcionalmente com a relação  $\omega_n / \omega_1$ .

### 3.3.5 - Amortecimento proporcional à massa

Constitui o outro caso particular do amortecimento tipo Rayleigh em que  $a_1 = 0$ . Efectuando o ajustamento para o 1º modo de vibração obtém-se:

$$a_0 = 2\xi\omega_1 \quad (39)$$

$$\mu' = \frac{2\xi\omega_1}{\omega_n^2} \quad (40)$$

$$\frac{\xi_n}{\xi} = \frac{\omega_1}{\omega_n} \quad (41)$$

Neste caso, o amortecimento modal decresce com o número de ordem do modo de vibração, conduzindo a valores de  $\xi_n$  praticamente nulos para os modos altos. Este caso foi eliminado nas análises subsequentes.

## 3.4 - Análises comparativas

Ilustra-se nas Figuras 1, 2 e 3 a comparação dos factores de amplificação dinâmica,  $D$ , obtidos para os diferentes tipos de amortecimento e correspondentes aos casos com  $\xi = 5\%$ ,  $10\%$  e  $20\%$ , respectivamente. Nas análises modais, consideraram-se os primeiros 21 termos da série: equações 27, 28 e 29.

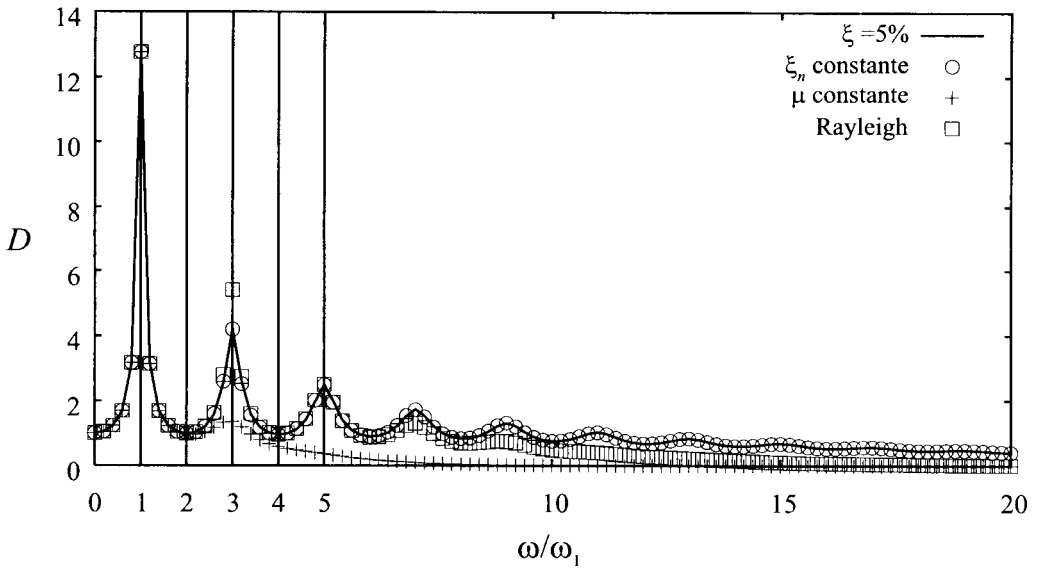


Figura 1 – Factor de amplificação dinâmica. Caso:  $\xi = 5\%$ .

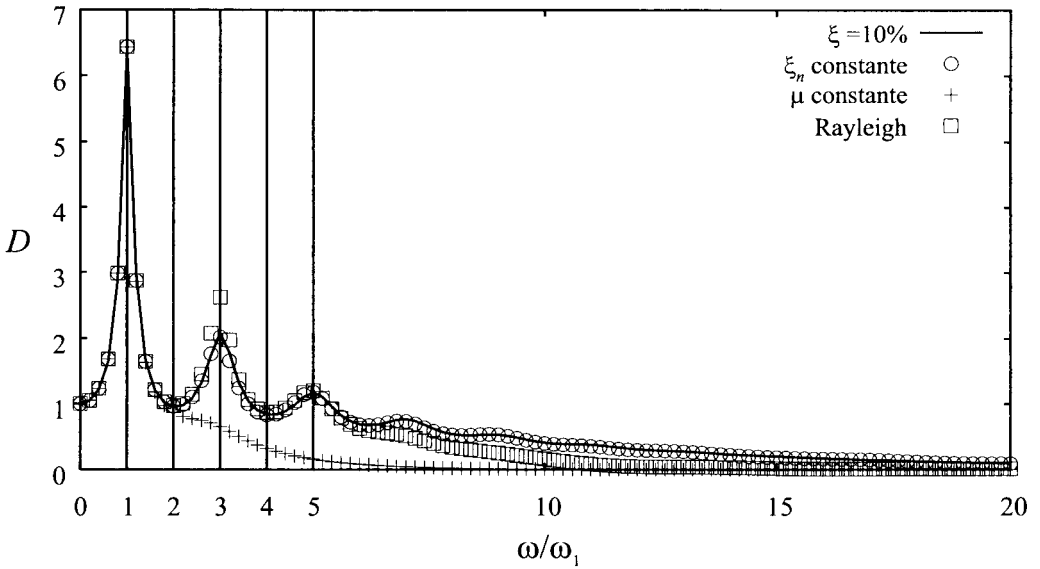


Figura 2 – Factor de amplificação dinâmica. Caso:  $\xi = 10\%$ .

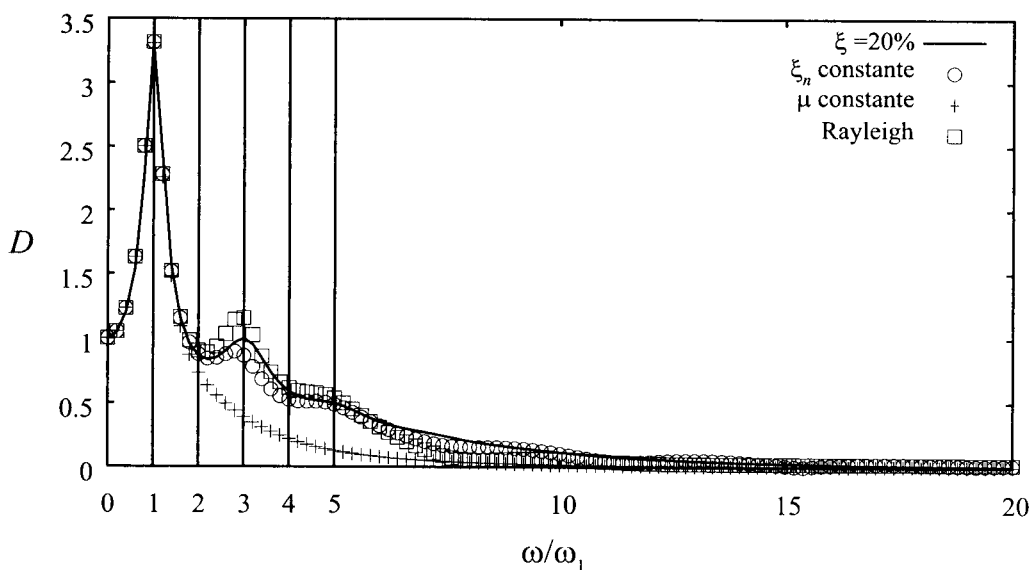


Figura 3 – Factor de amplificação dinâmica. Caso:  $\xi = 20\%$ .

Estes resultados evidenciam os aspectos seguintes:

- todos os tipos de amortecimento conduzem a resultados próximos para frequências inferiores a duas vezes a frequência fundamental da camada;
- o modelo com coeficiente de amortecimento modal constante é aquele que mais se aproxima do amortecimento hysterético;
- o amortecimento tipo Rayleigh conduz a resultados sobrestimados sobretudo para frequências próximas à do 2º modo de vibração e a tendência inverte-se para frequências superiores à do 3º modo; no entanto, o ajustamento global é bastante aceitável; estes resultados estão de acordo com a forma de ajustamento adoptada, conforme expressa pela equação 34;
- o modelo com coeficiente de viscosidade constante conduz a resultados subestimados para as frequências mais altas, como seria de esperar pela equação 38.

#### 4 - CONCLUSÕES

Neste trabalho apresentou-se o desenvolvimento teórico sobre a resposta harmónica de uma camada viscoelástica em corte simples. Analisou-se a resposta da camada para vários tipos de amortecimento e os estudos comparativos permitiram tirar as conclusões seguintes:

- em terreno homogéneo, o modelo com coeficiente de amortecimento modal constante é aquele que mais se aproxima do amortecimento hysterético do solo; o amortecimento tipo Rayleigh conduz a um ajustamento global que se pode considerar aceitável;
- em terreno estratificado, o nível de amortecimento varia com a profundidade o que torna difícil a escolha de um único valor representativo para o coeficiente de amortecimento modal; nesta situação, a modelação através de amortecimento tipo Rayleigh poderá constituir uma alternativa particularmente interessante e fácil de incorporar num algoritmo de resolução no domínio do tempo;

- o modelo com coeficiente de viscosidade constante poderá ser útil em situações em que se pretende filtrar a resposta nas altas frequências.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Cavallaro, A.; Fioravante, V.; Lanzo, G.; Lo Presti, D.; Pallara, O.; Rampello, S.; Onofrio, A.; Magistris, F.S.; Silvestri, F. (2001), "Report on the current situation of laboratory stress-strain testing of geomaterials in Italy and its use in practice". Advanced Laboratory Stress-Strain Testing of Geomaterials. Balkema.
- Clough, R.W.; Penzien, J. (1993), "Dynamics of structures". McGraw Hill, Inc.
- Hardin, B.O. (1965), "The nature of damping in sands". Journal of Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE, vol. 91, no. SM1, pp. 63-97.
- Lo Presti, D; Pallara, O.; Cavallaro, A. (1997), "Damping ratio of soils from laboratory and in situ tests". Seismic Behaviour of Ground and Geotechnical Structures, Balkema.
- Santos, J.A. (1999), "Caracterização de Solos através de Ensaio Dinâmicos e Cíclicos de Torção. Aplicação ao Estudo do Comportamento de Estacas sob Acções Horizontais Estáticas e Dinâmicas". Dissertação submetida ao Instituto Superior Técnico da Universidade Técnica de Lisboa para obtenção do grau de Doutor em Engenharia Civil.
- Taksuoka, F.; Jardine, R.J.; Lo Presti, D.; Di Benedetto, H.; Kodaka, T. (1997), "Characterising the pre-failure deformation properties of geomaterials". Theme lecture for the plenary session no. 1, XIV ICSMFE, Hamburg.