

# APLICAÇÕES DA TEORIA FRACTAL À GEOTECNIA

## Application Examples of the Fractal Theory to Geotechnics

por  
JOSÉ MURALHA\*

RESUMO — O presente artigo começa por apresentar uma introdução à teoria e à geometria fractal, sendo dado, nesse domínio, particular destaque à determinação da dimensão fractal de um conjunto. Seguem-se alguns exemplos de aplicação dos conceitos desta teoria a questões do domínio da Geotecnia. Serão tratados a percolação em descontinuidades, a caracterização da rugosidade de diaclases, a compartimentação e fracturação de maciços rochosos e o desenvolvimento de falhas.

SYNOPSIS — The present article begins by presenting an introduction to the fractal theory and geometry, with a particular importance to the evaluation of the fractal dimension of sets. It is followed by some examples that use the ideas from this theory to problems in the geotechnical area. The percolation through discontinuities, the characterization of the roughness of joints, the discontinuities network and fragmentation in rock masses and the extent of faults will be overviewed.

### 1 — INTRODUÇÃO AOS FRACTAIS

Este trabalho surge na sequência da comunicação apresentada pelo autor ao 4.º Congresso Nacional de Geotecnia (Muralha, 1991) e do interesse que ela suscitou.

Pretende-se, pois, complementar a apresentação das potencialidades da teoria fractal nos domínios da Geologia de Engenharia e da Geotecnia e descrever de uma forma um pouco mais desenvolvida algumas aplicações, que no referido artigo foram unicamente citadas, sem que pudessem, por natural falta de espaço, ser devidamente explanadas.

Este primeiro capítulo tem um carácter introdutório e tem por finalidade apresentar os princípios básicos da teoria fractal de modo a permitir uma melhor compreensão dos pontos subsequentes. A descrição dos conceitos fundamentais dos fractais englobará a definição matemática de dimensão fractal, a exemplificação das propriedades mais relevantes dos conjuntos fractais e a tentativa de seguir caminho idêntico ao que Benoît B. Mandelbrot deve ter percorrido desde os “monstros” matemáticos da viragem do século até à formulação da sua teoria.

---

\*Assistente de Investigação do LNEC.

O segundo capítulo tratará, de uma forma o mais abrangente possível, das diversas formas para determinar a dimensão fractal de diversos conjuntos, com destaque para aquelas que serão utilizadas no ponto seguinte.

Aí serão apresentados exemplos de aplicação da teoria fractal no campo da Geotecnia: caracterização de falhas, rugosidade de diaclases, percolação em descontinuidades, compartimentação de maciços e fragmentação.

Por fim serão efectuadas algumas considerações onde serão apresentadas as linhas de futura investigação, que parecem ser mais promissoras neste domínio.

## 1.1 — Definição e conceitos gerais acerca dos fractais

A teoria fractal foi desenvolvida por Benoît B. Mandelbrot com o principal objectivo de preencher as lacunas que a geometria tradicional ou Euclidiana apresenta sempre que se torna necessário descrever ou representar formas da Natureza que exibem, regra geral, um grau de complexidade superior.

O propósito de Mandelbrot foi o de permitir aos cientistas das mais diversas áreas uma abordagem rigorosa e quantitativa de formas que eram descritas como estranhas, granulares, amarrotadas, tortuosas, ramificadas, do tipo de hidra ou de alga, etc. Os seus trabalhos ainda permitem aos matemáticos uma explicação para um grupo de conjuntos e funções estranhos, autênticos monstros, conhecidos desde o início do século: curvas de Peano ou de Weierstrass, poeira de Cantor, curva triádica de Von Koch, tapete de Sierpiński e esponja de Menger, por exemplo. Estes conjuntos evidenciam propriedades particulares, como serem contínuos e não diferenciáveis (sem tangente) em qualquer ponto ou possuírem comprimento infinito e área nula.

A palavra fractal, inventada pelo próprio Mandelbrot, a partir do latim *fractus* (fragmentado, irregular, partido), foi introduzida em 1975 no ensaio *Les objets fractales: forme, hasard et dimension* (Mandelbrot, 1975), que, posteriormente, deu lugar às duas referências fundamentais (Mandelbrot, 1977 e 1982) que são vulgarmente citadas em artigos desta matéria. A preocupação na formulação da palavra fractal, e de todas as restantes que Mandelbrot criou, proveniente do lema *nomen est numen* (nomear é conhecer), leva a que ela seja etimologicamente oposta a Álgebra (do árabe al'jabara), que significa unir.

A definição de fractal, avançada por Mandelbrot nos seus ensaios, não deixa transparecer as potencialidades que a sua teoria possui nos mais diversos ramos da Ciência, desde a Medicina à Economia, passando pela Física, Hidrologia e Geociências. Essa definição é a seguinte: fractais são os conjuntos cuja dimensão de Hausdorff-Besicovitch (ou simplesmente dimensão de Hausdorff),  $D_H$ , é estritamente superior à sua dimensão topológica,  $D_T$ .

Neste ponto poder-se-ia tomar a opção de deixar para os mais interessados a exploração desta definição, mas, tratando-se de uma apresentação introdutória acerca de fractais, pensa-se que será interessante dar uma ideia dos conceitos matemáticos que estão associados a estas dimensões agora referidas.

Começando pela mais simples, a dimensão topológica de um conjunto toma sempre um valor inteiro e é 0 se o conjunto for totalmente desconexo, isto é, formado por pontos; é 1 se cada ponto do conjunto possuir fronteiras de dimensão 0; é 2 se cada ponto do conjunto possuir fronteiras de dimensão 1 e assim por diante.

A definição de dimensão de Hausdorff é um pouco mais complexa. Lembrando que o diâmetro de um dado conjunto  $F$ , num espaço Euclidiano  $R^n$ , é a maior distância entre um par de pontos pertencentes ao conjunto

$$|F| = \sup \{ |x - y| : x, y \in F \} \tag{1}$$

e definindo a cobertura  $\delta$  do conjunto  $F$ ,  $\{U_i\}$ , como uma coleção de conjuntos de diâmetro menor ou igual a  $\delta$  de modo a que  $F$  esteja contido em  $\{U_i\}$

$$F \subset \bigcup_{i=1}^n U_i \text{ com } 0 < |U_i| \leq \delta \tag{2}$$

é possível definir  $H_\delta^s(F)$ , onde  $s$  é um real não-negativo inferior a  $n$ , da seguinte forma

$$H_\delta^s(F) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s \right\} \tag{3}$$

Pretende-se, pois, o valor do menor diâmetro elevado a  $s$  de todos os conjuntos de diâmetro menor ou igual a  $\delta$  e que contêm o conjunto  $F$ . À medida que  $\delta$  decresce, as coberturas de  $F$  possíveis também diminuem e, por isso, o ínfimo  $H_\delta^s(F)$  aumenta e tende para um limite quando  $\delta \rightarrow \infty$  definido por

$$H^s(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} H_\delta^s(F) \tag{4}$$

Este limite existe e toma, geralmente, os valores 0 e  $\infty$ . A dimensão de Hausdorff,  $D_H$ , corresponde ao valor crítico de  $s$  para o qual esse limite salta de  $\infty$  para 0, como se exemplifica na Fig. 1, e que, em linguagem matemática, pode ser escrito da seguinte forma

$$D_H = \inf \{ s : H^s(F) = 0 \} = \sup \{ s : H^s(F) = \infty \} \tag{5}$$

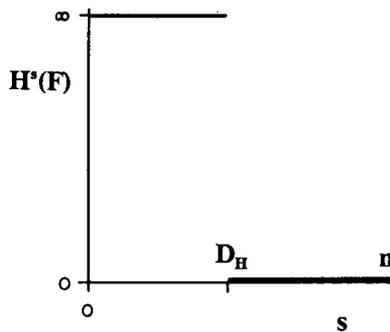


Fig. 1 — Dimensão de Hausdorff. Adaptado de Falconer (1990)

Esta dimensão possui as vantagens de ser definida para qualquer conjunto e de se basear em medidas fáceis de manipular. Por outro lado, a desvantagem de ser dificilmente calculada é óbvia. Para os que pretenderem estudar com maior profundidade os fractais, a compreensão destes conceitos é fundamental; para aqueles cujo propósito é, somente, estabelecer um primeiro contacto com a geometria fractal, convém afirmar que uma das suas principais vantagens é a simplicidade, que estas noções são as mais complexas das apresentadas neste trabalho e que a sua leitura cuidada é dispensável.

Uma conclusão importante a reter é a de que a medida de Hausdorff generaliza outras medidas habituais como o comprimento, a área ou o volume. Sabendo que o volume de uma esfera de diâmetro unitário, num espaço  $R^n$ , é dado por

$$C_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{2^n \left(\frac{n}{2}\right)!} \quad (6)$$

se  $F^3$  é um conjunto que define um volume suave,  $H(F^3)$  é  $(\pi/6) \times \text{vol}(F^3)$ ; se  $F^2$  é um conjunto que define uma área regular,  $H(F^2)$  é  $(\pi/4) \times \text{area}(F^2)$ ; se  $F^1$  é um conjunto que define uma curva,  $H(F^1)$  é o comprimento de  $F^1$ ; por fim, se  $F^0$  é um conjunto de pontos,  $H(F^0)$  é o número de pontos de  $F^0$ . Generalizando, pode escrever-se

$$H(F_n) = C_n \text{vol}_n(F_n) \quad (7)$$

Medidas como o comprimento, a área e o volume apresentam a propriedade de, face a uma transformação do conjunto definida por um factor de escala  $\lambda$ , aparecerem multiplicadas por, respectivamente  $\lambda^1$ ,  $\lambda^2$  e  $\lambda^3$ . Por um raciocínio paralelo, a medida de Hausdorff de dimensão  $s$ ,  $H^s$ , aparece escalada por um factor  $\lambda^s$ . Esta ideia de escala encontra-se indissociavelmente ligada ao conceito de dimensão fractal, como se verá mais adiante.

É possível, a partir deste ponto, perceber que os conceitos da teoria fractal generalizam a noção da geometria Euclidiana que estipula que os espaços onde se trabalha sejam inteiros (0 no caso de pontos, 1 se se tratar de curvas, 2 para superfícies, 3 para volumes ou, generalizando,  $n$  para volumes ou superfícies a  $n$  dimensões, que já escapam à nossa capacidade de visualização). Assim, aparece uma das características mais divulgadas da geometria fractal que define, para certos conjuntos, uma dimensão não inteira na qual a sua interpretação é possível. Entre estes conjuntos encontram-se os “monstros” matemáticos já mencionados. A Fig. 2 apresenta exemplos de alguns deles: i) a construção do conjunto de Cantor do terço central, ii) a curva triádica de Von Koch, iii) a construção da “carpete” de Sierpiński, iv) a esponja de Menger. No primeiro caso, ao retirar-se o terço central de um segmento de recta e repetindo, de uma forma virtual, este processo indefinidamente, o conjunto que se obtém deve possuir uma dimensão inferior ao de uma recta, mas, por ser sempre formado por segmentos de recta, tem que ter uma dimensão superior ao de um conjunto de pontos; assim, é legítimo esperar que a dimensão de um conjunto deste tipo deva ter uma dimensão entre 0 e 1. Nos casos iii) e iv) pode seguir-se uma via idêntica e reconhecer que as suas dimensões devem encontrar-se entre 1 e 2 e entre 2 e 3, respectivamente. No caso da curva de Von Koch, que é uma função

contínua e não diferenciável em todos os pontos e possui comprimento infinito e área nula, a sua irregularidade coloca-a acima das curvas diferenciáveis usuais, mas, por não preencher totalmente uma área, a sua dimensão deve encontrar-se entre 1 e 2.

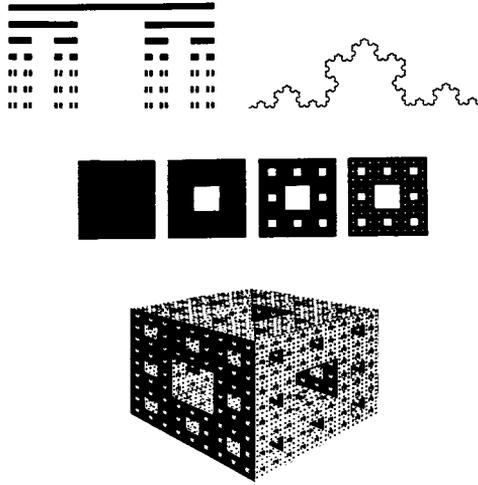


Fig. 2 — Exemplos de fractais

A teoria fractal, por ser mais geral e por incluir de uma forma coerente e consistente a geometria Euclidiana, apresenta-se como um importante passo em frente na Matemática e, em especial, nas novas abordagens que pode permitir a diversas áreas de outras Ciências. Refira-se que, nesta apresentação, se tem nomeado a teoria fractal em letra minúscula, em contraposição com a teoria Euclidiana, em maiúscula. Tal facto deve-se à idade, relativamente recente, que estas novas propostas têm (cerca de 30 anos), que não permite a sua aceitação incondicional. Para quem se dedica a matérias ligadas às Geociências, habituado que está à escala geológica dos tempos, a ideia de que esta teoria não se pode considerar totalmente sedimentada é perceptível.

Tentando ultrapassar as dificuldades que a definição de fractal comporta, apresenta-se na Fig. 3 a base que permite uma compreensão mais acessível e atractiva acerca dos fractais. A figura permite visualizar o seguinte raciocínio: uma medida de um volume pode ser dada pelo número de cubos,  $N_3$ , de lado  $r$  que compõem o volume multiplicado por  $r$  elevado ao cubo ( $V=N_3.r^3$ ); uma medida de uma área pode ser determinada pelo número de quadrados,  $N_2$ , que cobrem essa área multiplicada por  $r$  elevado ao quadrado ( $A=N_2.r^2$ ); uma medida do comprimento de uma linha pode ser dada pelo número de segmentos de recta,  $N_1$ , de comprimento  $r$  que a aproximam multiplicado pelo comprimento de cada segmento ( $L=N_1.r^1$ ); para todos os casos em que as curvas (ou as áreas ou os volumes) forem regulares e suaves a sua medida mantém-se sensivelmente constante qualquer que seja o comprimento  $r$  escolhido (desde que não seja excessivamente grande em relação ao comprimento total a medir); contudo, se a curva (ou a área ou o volume) for uma entidade fractal a sua medida,  $L=N.r$ , aumentará indefinida-

mente à medida que os segmentos usados forem menores; pela sua parte o que se mantém constante é o produto  $N_i r_i^D$ , onde  $D$  é a dimensão fractal. Para o fractal apresentado, se se considerar a medida do seu comprimento como unitária, podemos escrever

$$N_i r_i^D = 1 \tag{8}$$

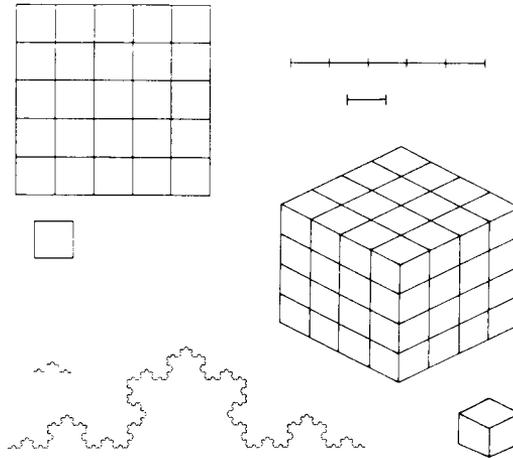


Fig. 3 — Conceito de dimensão fractal

Se considerarmos a curva de Von Koch (Fig. 3) dividida em quatro partes ( $N_1=4$ ), verificamos que o comprimento de cada uma dessas partes é três vezes mais pequeno que o comprimento total ( $r_1=1/3$ ); por outro lado se considerarmos a divisão seguinte,  $N_2=16$ , o comprimento de cada divisão é nove vezes mais reduzido que o comprimento total ( $r_2=1/9$ ). A partir da equação anterior (8) podemos calcular a dimensão fractal  $D$

$$D = \frac{\log \left( \frac{n_1}{n_2} \right)}{\log \left( \frac{r_2}{r_1} \right)} = \frac{\log 4}{\log 3} = 1,2619... \tag{9}$$

Considerando o caso geral, número de partes  $N$  e razão  $r$ , a partir de (8) pode-se escrever a fórmula para a determinação da dimensão fractal

$$D = \frac{\log N}{\log \frac{1}{r}} \tag{10}$$

Para terminar este ponto serão efectuados os passos necessários para a determinação das dimensões dos fractais da Fig. 2. No primeiro caso, por se retirar em cada iteração o terço central de cada segmento de recta, o número de partes é 2 tendo cada uma  $1/3$  do comprimento inicial, por isso,  $D=\log 2/\log 3=0,6309$ . O segundo já foi analisado e nos restantes o raciocínio é semelhante. Para a “carpete” de Sierpiński, um quadrado inicial é substituído por 8 (9-1) quadrados com  $1/9$  da sua área, isto é, com uma relação entre os seus lados de 1 para 3; assim,

$D=\log 8 / \log 3=1,8928$ . No último caso, um cubo é transformado retirando-lhe 7 cubos com lados 3 vezes menores que o cubo inicial, pelo que o seu volume é formado por 20 partes e  $D=\log 20 / \log 3=2,7268$ .

Passando, agora, à aplicação destes conceitos a formas que podem ser encontradas na Natureza, têm particular relevância, em termos históricos, os trabalhos de Richardson (1961). As preocupações deste autor, referidas por Mandelbrot (1967, 1977 e 1983) sob a designação *How long is the coast of Britain ?*, reflectem a dificuldade de medir o comprimento de costas e fronteiras, por exemplo, através da sua aproximação por linhas quebradas formadas por segmentos de recta de comprimento constante. A principal conclusão de Richardson encontra-se subentendida na Fig. 4: à medida que se aproxima a curva a medir por segmentos de recta de comprimento cada vez menor, o comprimento que assim é obtido vai aumentando indefinidamente e a linearidade, em escala bilogarítmica, entre o comprimento total e o comprimento do segmento de recta respectivo aponta para uma relação do tipo da equação (8), em que o número de segmentos multiplicado pelo comprimento desses segmentos elevado a um expoente, neste caso um número fraccionário, é que se mantém constante e se pode considerar uma medida do comprimento total da curva.

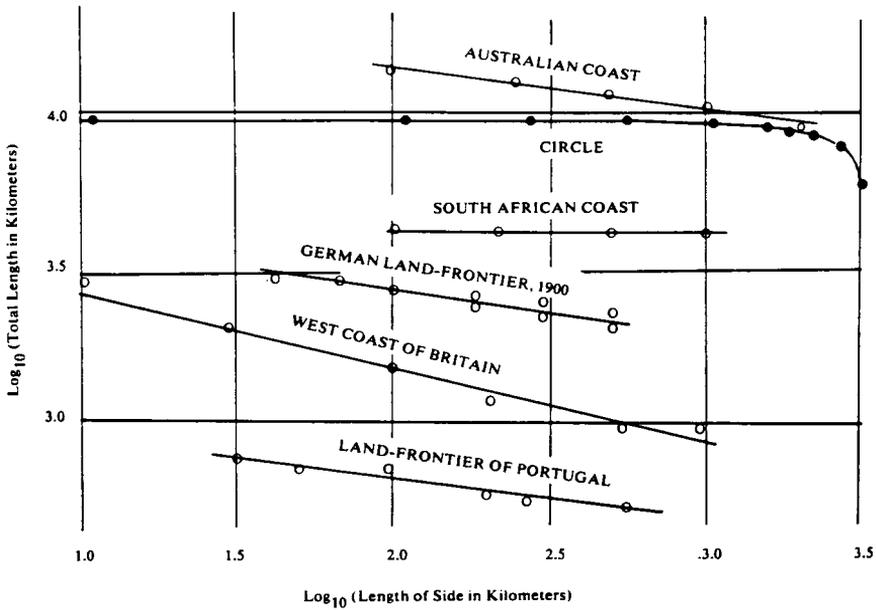


Fig. 4 — Reprodução das medidas experimentais de Richardson

## 1.2 — Propriedades dos fractais

As propriedades inovadoras dos fractais são um dos principais motivos da sua actual popularidade visto que permitiram um conjunto de aplicações nos mais variados ramos de diversas Ciências e novas abordagens de questões e problemas. Neste ponto serão apresentadas

as importantes propriedades dos fractais e marcadas as suas diferenças em relação à geometria Euclidiana, optando-se pela apresentação de exemplos tendo em vista uma percepção mais intuitiva e fácil.

As propriedades mais relevantes dos fractais são: i) os fractais são de forma tão “irregular” que não podem ser descritos pela linguagem da geometria tradicional (Euclidiana), tanto de uma forma global como local; ii) em muitos casos, os fractais são definidos de uma forma bastante simples, por exemplo recursivamente; iii) os fractais têm uma estrutura “fina”, isto é, apresentam detalhe a qualquer escala; iv) muitas vezes os fractais apresentam características de auto-semelhança ou de auto-afinidade, mesmo aproximadas ou estatísticas; v) a dimensão fractal é diferente da dimensão topológica, sendo, geralmente, superior; vi) frequentemente, a intersecção de um fractal por um plano ou uma recta diminui-lhe a dimensão de uma unidade.

Deixando um pouco de lado a primeira característica, a segunda propriedade refere que a grande maioria dos fractais se pode definir ou gerar de uma forma recursiva, isto é, o ponto ou a forma seguinte pode ser obtida a partir da anterior por uma transformação, que pode ser definida matematicamente ou geometricamente, como é o caso dos fractais da Fig. 2. Esta versatilidade é uma das principais causas do seu desenvolvimento actual face à aptidão que formulações iterativas têm para ser implementadas em computador. Possivelmente, as primeiras aplicações que observamos de fractais foram bonitos desenhos gerados por computador de diversos conjuntos fractais.

Um exemplo extremamente simples de um processo iterativo deste tipo que conduz a um fractal é o sistema dinâmico conhecido como o mapa de Hénon (1976) definido por

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= 1 + y_n - Ax_n^2 \\ Y_{n+1} &= Bx_n\end{aligned}\tag{11}$$

em que, tomando os parâmetros de forma conveniente, por exemplo,  $A=1,4$  e  $B=0,3$ , o gráfico obtido num plano  $(x,y)$  não depende, em regra, do ponto inicial.

Os exemplos de construção de fractais que se encontram na Fig. 2 são aplicações de transformações geométricas de carácter recursivo, assim como a construção da curva de Von Koch, na Fig. 5.

As propriedades iii) e iv) introduzem a propriedade fundamental da teoria fractal - a auto-semelhança. Se considerarmos, de novo, a curva de Von Koch (Fig. 5), notamos que ela possui uma estrutura ou forma semelhante ou similar independentemente da escala a que a estejamos a observar. A auto-semelhança implica que um determinado conjunto tenha o mesmo aspecto, qualquer que seja a escala utilizada. Em termos matemáticos dizer que dois conjuntos são semelhantes corresponde a afirmar que um deles pode ser definido a partir do outro, e vice-versa, através de transformações que se caracterizam por ampliarem ou reduzirem as distâncias entre dois pontos quaisquer segundo uma mesma razão, sem depender da direcção que se esteja a considerar. Transformações deste tipo permitem que, se ampliarmos ou reduzirmos um conjunto, de uma forma fotográfica ou sem distorções, ele tenha sempre a mesma forma ou aspecto. Os fractais possuem pois a propriedade de manterem a mesma forma a diversas escalas como se uma pequena porção de um fractal se transformasse no próprio fractal mediante

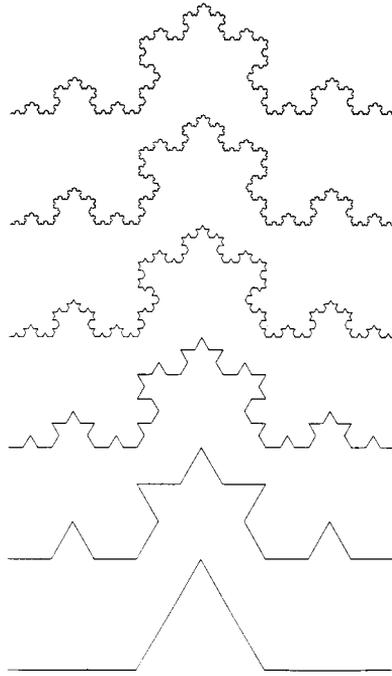


Fig. 5 — Construção da curva triádica de Von Koch

uma ampliação, sem distorções, conveniente e daí o termo auto-semelhança. Esta propriedade pode ser exacta, caso da curva de Von Koch da Fig. 5, ou ser verificada, somente, de uma forma estatística. Para esta última, o fractal ao ser ampliado (ao ser observado a escalas diferentes) mantém constante, somente, o seu aspecto geral. A Fig. 6 apresenta uma superfície fractal de dimensão 2,2 intersectada por um plano de modo a aparentar a superfície terrestre numa zona junto ao oceano; cada uma das 8 ampliações e a referência parecem-se de tal forma que, se as razões das ampliações não estivessem presentes, é possível afirmar que se trata da mesma costa apresentada à mesma escala.

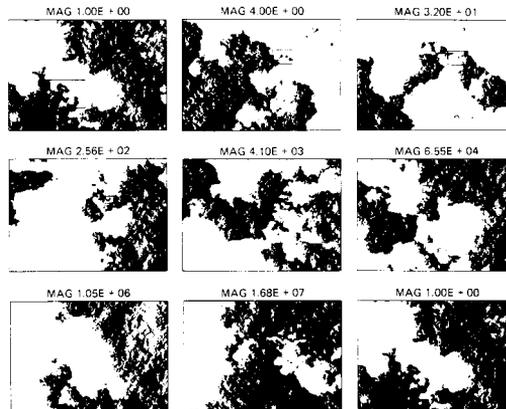


Fig. 6 — Exemplificação do conceito de auto-semelhança

A auto-afinidade corresponde a uma característica semelhante, mas que se baseia numa transformação em que as distâncias são ampliadas ou reduzidas segundo razões diferentes conforme a direcção, o que implica que se obtenha uma imagem distorcida em relação à inicial. Trata-se de um conceito a que estamos habituados, por exemplo, ao realizarmos cortes geológicos ou perfis longitudinais de estradas em que a direcção vertical se encontra, geralmente, sobre-elevada. Contudo, deve-se ter presente que se trata de uma transformação de uma parte de um conjunto sobre ele próprio, ou, por outras palavras, o conjunto objecto e o conjunto imagem são partes do mesmo. Tal como a auto-semelhança, também a auto-afinidade se pode considerar de uma forma exacta ou estatística. A Fig. 7 apresenta uma transformação afim baseada, novamente, na curva de Von Koch, onde o triângulo central da construção da curva deixa de ser equilátero para ser isósceles. Este exemplo foi conseguido em computador pela simples alteração da escala vertical do desenho, o que corresponde a uma transformação afim.

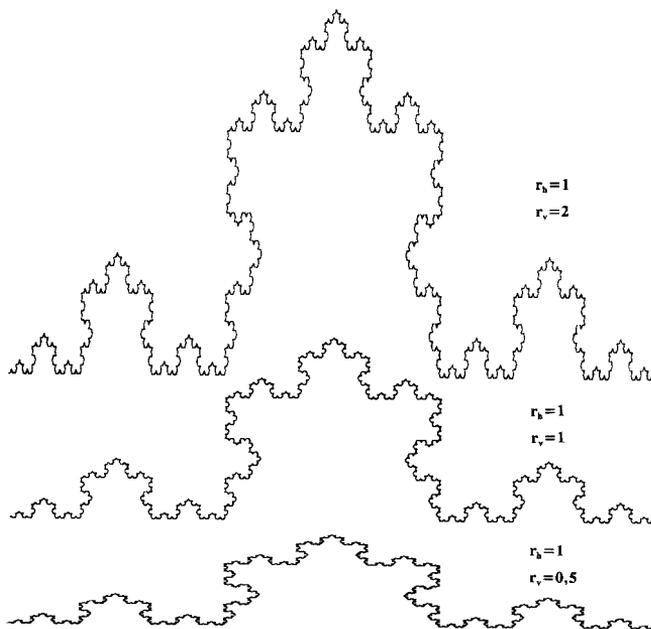


Fig. 7 — Exemplo de transformação afim

A última propriedade encontra-se referida com o intuito de chamar de novo a atenção para o facto de a geometria fractal incluir a geometria Euclidiana. A projecção e a intersecção de conjuntos, na geometria fractal, efectua-se de forma idêntica à que estamos habituados. Tomando como exemplo o fractal da Fig. 6 (dimensão fractal igual a 2,2), a sua intersecção com um plano, que corresponde à linha de costa representada, apresenta dimensão fractal de 1,2 (correspondente a diminuir de 1 a dimensão anterior) de forma paralela ao que se passa na geometria Euclidiana.

Para concluir, no que se refere às propriedades dos fractais, resumem-se as principais diferenças (vantagens) que a geometria fractal apresenta face à Euclidiana.

## Euclidiana

baseada numa escala característica  
serve os objectos construídos pelo Homem  
descrita por fórmulas  
só aceita dimensões inteiras

## fractal

sem escala específica  
apropriada para as formas da Natureza  
descrita por algoritmos recursivos  
aceita dimensões fraccionárias

## 2 — DETERMINAÇÃO DA DIMENSÃO FRACTAL

O principal objectivo deste capítulo é o de apresentar diversas formas de calcular a determinação fractal de diversos tipos de conjuntos, na medida em que a dimensão de Hausdorff é de aplicação difícil especialmente aos fractais naturais. Outra maneira de determinar a dimensão de fractais matemáticos foi já apresentada no capítulo anterior; baseia-se na auto-semelhança e faz uso da equação (10). A sua aplicação aos casos que mais nos interessam é, também, bastante restrita, visto que nas formas da Natureza não é fácil encontrar o número de partes semelhantes e a respectiva razão necessários ao seu cálculo.

O grande interesse que Mandelbrot tem pela aplicação da sua teoria a casos práticos levou-o a sentir estas dificuldades. Por isso, apresentou, logo desde o início (Mandelbrot, 1977), quatro métodos possíveis para a determinação da dimensão fractal, que serviram de base para a maioria dos métodos actualmente usados. Os processos apresentados tinham por finalidade determinar uma medida do comprimento de curvas irregulares e com pormenores a diferentes escalas como é o caso das linhas de costa.

O primeiro método (A) consiste na aproximação da curva que representa a costa por segmentos de recta de comprimento constante e o ponto 1.1 já lhe fez referência. A determinação de  $D$  é feita a partir do traçado do gráfico em escala bilogarítmica dos comprimentos totais obtidos em função dos comprimentos dos segmentos de recta que servem para os aproximar (Fig. 4). Neste caso,  $D$  é igual a 1 mais o declive das rectas, que facilmente se obtém por regressão linear, o que se traduz por

$$D = 1 - \frac{n \sum l_i L_i - \sum l_i \sum L_i}{n \sum l_i^2 - (\sum l_i)^2} \quad (12)$$

onde  $l_i$  é o comprimento dos segmentos de recta e  $L_i$  é o comprimento total respectivo, que se pode obter multiplicando o número de segmentos obtidos pelo seu comprimento ( $N_i l_i$ ), o que transforma a equação anterior em

$$D = 1 - \frac{n \sum N_i l_i^2 - \sum l_i \sum N_i l_i}{n \sum l_i^2 - (\sum l_i)^2} \quad (13)$$

Este modo de cálculo da dimensão fractal é vulgarmente conhecido como o método dos divisores (*yardstick*, *ruler* ou *divider*).

O método B é bastante parecido com o anterior e consiste em percorrer a curva a uma distância  $l$  desta, seguindo o caminho mais curto possível, e em seguida repetir as medições do comprimento total reduzindo o comprimento dos segmentos e a distância à curva. A determinação de  $D$  é feita, de novo, a partir de fórmulas semelhantes a (12) ou (13).

O método C remonta aos princípios do século e deve-se a Cantor. Consiste em transformar os pontos da curva em círculos de raio  $r$ , medir a área assim obtida e, em seguida, dividir esse valor por  $2r$  para obter uma medida do comprimento da curva. É fácil reparar que no caso de uma recta (dimensão 1) a razão entre a área obtida e o diâmetro dos círculos é constante e representa o comprimento real. Este método, em que as curvas são transformadas em superfícies com a forma de salsichas, costuma ser referido na literatura por método de Minkowski e a sua aplicação a uma curva irregular encontra-se representada na Fig. 8.

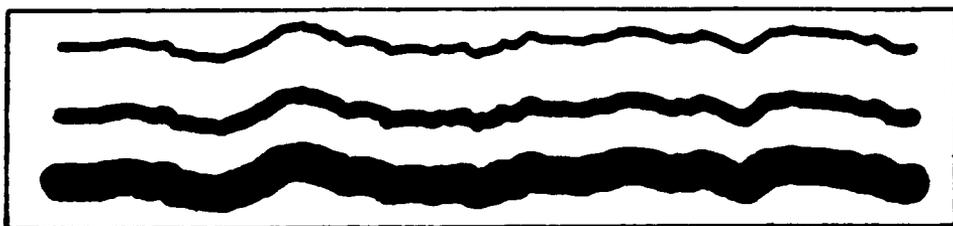


Fig. 8 — Método de Minkowski para a determinação da dimensão fractal de curvas irregulares

O último método apresentado por Mandelbrot corresponde a cobrir toda a curva com círculos de modo a que o seu número total seja o menor possível. A área total dos círculos dividida pelo diâmetro respectivo é outra medida do comprimento. Neste caso, bem como no anterior, a determinação de  $D$  é efectuada usando diferentes raios dos círculos e aplicando a equação (12).

Estes processos de determinar a dimensão fractal podem ser generalizados para conjuntos de espaços com dimensões superiores ( $R^n$ ), apesar de a grande maioria dos casos práticos ser de dimensão igual ou inferior a 3.

Em termos matematicamente mais formais, se  $F$  é um subconjunto de  $R^n$ , então a sua dimensão é dada por

$$D = n - \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log \text{vol}^n(F_\delta)}{\log \delta} \quad (14)$$

em que  $\text{vol}^n$  representa o hipervolume do conjunto na dimensão  $n$ . Para as dimensões mais familiares, sabemos que  $\text{vol}^n$  é um volume em  $R^3$ , uma área em  $R^2$  e um comprimento em  $R$ .

Esta equação apresenta, para além da generalização para espaços de dimensões superiores, a substituição dos somatórios, correspondentes ao declive da recta na escala log-log, das equações (12) e (13) pelo limite quando  $\delta \rightarrow 0$ . Tal prende-se com o facto de, na realidade, ser impossível chegar a esse limite, porque as medições que efectuamos para caracterizar a forma ou geometria do conjunto vêm sempre truncadas nessa zona devido a problemas de resolução da aparelhagem utilizada.

De entre os métodos cuja aplicação é simples de implementar devem ocupar lugar de destaque os que se baseiam no número de subconjuntos com um determinado raio  $\delta$ ,  $N_\delta$ , necessários para cobrir um conjunto  $F$  do qual se pretende determinar  $D$ . Estas determinações são vulgarmente referidas como métodos das caixas ou das bolas mas a expressão inglesa é bastante mais sugestiva: *box-counting methods*. A dimensão fractal é por eles obtida a partir de

$$D = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} \tag{15}$$

e existem várias variantes que dependem da forma como  $N_\delta$  é definido. Falconer (1990) apresenta as seguintes:

- (i) menor número de bolas de raio  $\delta$  que cobrem  $F$
- (ii) menor número de cubos de lado  $\delta$  que cobrem  $F$
- (iii) número de cubos de uma grelha de lado  $\delta$  que intersectam  $F$
- (iv) menor número de conjuntos com o diâmetro máximo  $\delta$  que cobrem  $F$
- (v) maior número de bolas disjuntas de raio  $\delta$  com centros em  $F$ .

Tanto no caso dos cubos como das bolas estes devem ser entendidos como existentes no espaço a  $n$  dimensões em que se está a trabalhar. Por exemplo, em  $R^1$  um cubo e uma bola são um intervalo, mas em  $R^2$  um cubo corresponde a um quadrado e uma bola a um círculo. Exemplos de aplicação dos cinco casos de possíveis coberturas encontram-se na Fig. 9.

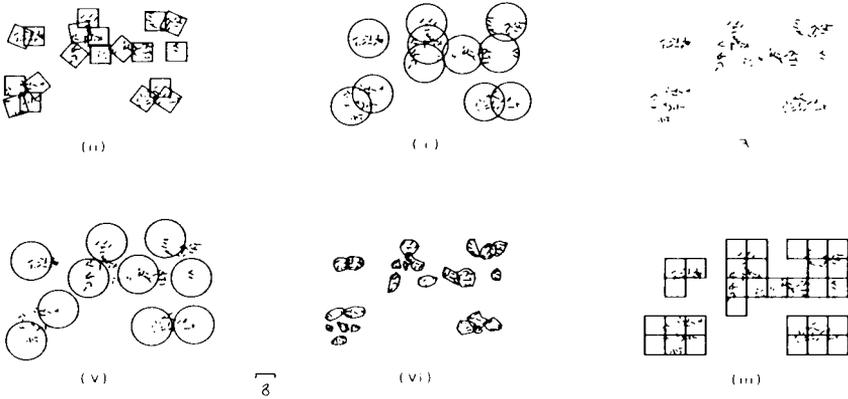


Fig. 9 — Determinação da dimensão fractal por diversos métodos do tipo *box-counting*

Um outro grupo, referido como medidas de Mandelbrot por Voss, em Peitgen e Sauper (1988), e que serve de base ao conceito de multifractal, baseia-se na probabilidade normalizada  $P(m,L)$  de existirem  $m$  pontos a uma distância menor ou igual a  $L$  de um ponto arbitrário do conjunto. Assim, para qualquer valor de  $L$

$$\sum_{m=1}^n P(m,L) = 1 \tag{16}$$

As medidas da dimensão fractal são obtidas a partir das expressões (17), que definem os momentos,  $M_q$ , de ordem  $q$  dessa probabilidade, e onde o somatório se efectua para todos os  $n$  pontos do conjunto.

$$M_q = \sum_{m=1}^n m^q P(m, L) \quad (q \neq 0) \tag{17}$$

$$M_0 = \sum_{m=1}^n \log m P(m, L) \quad (q=0)$$

Esta expressão toma, para diversos valores de  $q$ , significados físicos importantes:  $q=1$  corresponde à dimensão de massa,  $q=0$  à entropia e  $q=-1$  ao número de esferas de raio  $L$  que cobrem o conjunto. A determinação da dimensão fractal pode fazer-se a partir de qualquer valor de  $q$ , com base em diversos valores do raio  $L$  e recorrendo às expressões seguintes, onde  $k$  é uma constante de proporcionalidade

$$(M_q)^{1/q} = k L^D \quad (q \neq 0) \tag{18}$$

$$e^{M_0} = k L^D \quad (q=0)$$

O cálculo de  $D$  é, mais uma vez, feito com base em gráficos bilogárítmicos, como se exemplifica na Fig. 10 para a curva de Von Koch. Contudo, se para diferentes valores de  $q$  se determinarem diferentes valores da dimensão fractal, referidos em consequência como  $D_q$ , está-se na presença de um multifractal. Este conceito será referido nas considerações finais, visto que trabalhos recentes apontam para o emprego deste novo conceito no domínio da Geotecnia e da Geofísica (Mandelbrot, 1990).

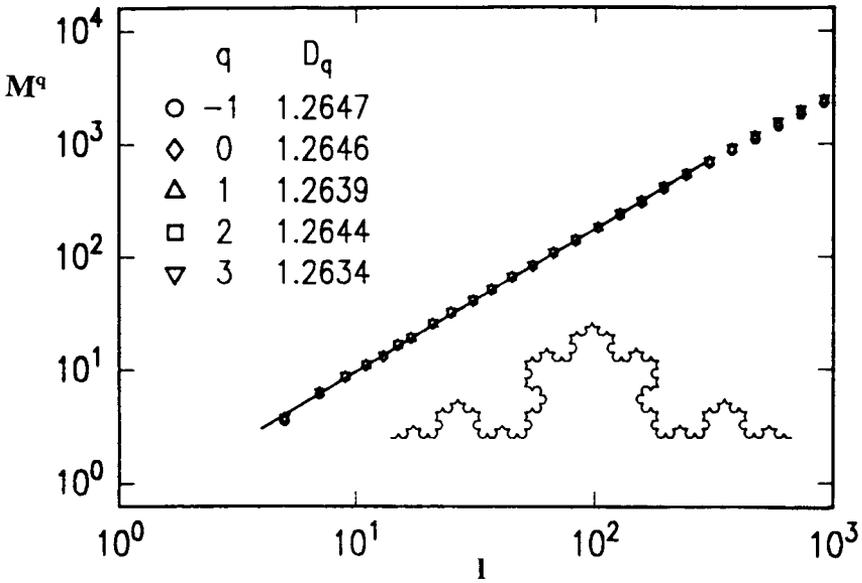


Fig. 10 — Aplicação das medidas de Mandelbrot para determinar a dimensão fractal

Apesar de os métodos já referidos serem de carácter geral, existem outros que se podem utilizar para a determinação da dimensão fractal de conjuntos particulares, como, por exemplo, no caso de curvas fechadas. Para estas é possível determinar  $D$  a partir da relação entre a área e o perímetro, que pode ser escrita como

$$P_i = k A_i^{D/2} \quad (19)$$

onde  $P_i$  é o perímetro medido com uma régua de comprimento  $l_i$  e  $A_i$  a área definida por esse perímetro.

O capítulo seguinte fará uso das fórmulas e definições agora apresentadas e explicadas, através de exemplos de aplicação a casos concretos. Tal deve permitir um melhor entendimento de alguns processos aqui descritos.

### 3 — APLICAÇÕES DOS FRACTAIS À GEOTECNIA

A maioria dos materiais que são objecto de estudo na Geologia, na Geotecnia e em outras Ciências afins, por serem materiais Naturais, em oposição aos que são “construídos” pelo Homem que lhes introduz sempre um qualquer tipo de estrutura ou de ordem, apresentam-se como um campo preferencial para a aplicação da teoria e da geometria fractal.

Uma das ideias a que os fractais vieram dar particular ênfase tem que ver com a importância da escala a que se está a trabalhar e que leva ao conceito de auto-semelhança. Esta ideia encontra-se assimilada de uma forma intuitiva pelas pessoas que trabalham em Geotecnia; tal encontra-se demonstrado pelo hábito de todas as fotografias terem uma referência clara à escala ou à dimensão, muitas vezes pela colocação de uma pessoa, de um martelo, de um protector de objectiva ou de uma moeda junto do objecto a retratar. Existem mesmo casos extremos de fotografias de minas e pedreiras, por exemplo, em que o enquadramento não é o melhor, mas sim aquele que permite captar uma camioneta ou uma máquina que permitem dar a dimensão da obra em causa. Em contraposição, existem casos noutros domínios em que a mera referência de um número é suficiente para definir uma dada dimensão, não sendo necessário sequer dizer as unidades que se estão a utilizar, dado que a exiguidade da escala a que nos encontramos é suficiente. Tal reflecte-se no facto de determinadas obras, como edifícios, não serem alvo das preocupações atrás mencionadas.

Como já foi dito, as formulações provenientes da geometria Euclidiana, mesmo as de definição mais complexa (por exemplo, séries de Fourier), não permitem, a quem estuda os materiais das Ciências da Terra, mais do que uma primeira aproximação para as formas naturais que é necessário caracterizar. Esta dificuldade na descrição dos objectos, formas ou fenómenos poderia levar a cair no extremo oposto, ou seja, numa tentativa de descrição caótica, que corresponde à ausência total de qualquer definição quantitativa e, portanto, à total aleatoriedade. A geometria fractal vem preencher a lacuna existente entre a ordem, descrita cabalmente pela geometria Euclidiana, e o caos. Os fractais conseguem, pois, descrever fenómenos que não são totalmente ordenados (o conhecimento dos fenómenos anteriores não permite

definir cabalmente os seguintes), nem caóticos (o fenómeno seguinte é completamente independente dos que o precedem). Nestas considerações enquadram-se os raciocínios que se seguem e revelam a importância que os fractais podem assumir na Geotecnia.

Os materiais da crosta terrestre evidenciam, com maior ou menor predominância, acidentes ou descontinuidades a todas as escalas de observação a que os estejamos a observar, desde a dimensão dos continentes até à dos cristais. A distinção entre todas estas descontinuidades pode ser feita segundo diversas perspectivas, mas o facto de, implicitamente, a nomes como falhas continentais, falhas regionais, fracturas, diaclases, fissuras e microfissuras se encontrar associada uma determinada dimensão é particularmente significativo. De uma forma paralela, pode dizer-se que uma falha sísmica possui uma complexidade crescente à medida que vai sendo estudada mais de perto. Estes são exemplos simples e evidentes que apontam para a existência de auto-semelhança ou, pelo menos, auto-afinidade para uma variada amplitude de escalas, o que leva a considerar que estes acontecimentos podem ser descritos, de uma forma favorável, pela geometria fractal.

Outro raciocínio prende-se com a formação de descontinuidades. Estas são devidas a fenómenos complexos que passam pela tectónica e pelo estado de tensão, bem como pela meteorização, quer física quer química. A génese de uma diaclase aparece associada a um fenómeno aleatório de existência de um ponto fraco em que se inicia uma rotura; em contrapartida, a alteração que as descontinuidades já existentes introduzem no estado de tensão influencia, porventura de forma determinante, a localização das diaclases seguintes. Da mesma forma, a formação de cristais ou a deposição de minerais também pode ser olhada segundo um ponto de vista idêntico.

Seguem-se exemplos de aplicação da teoria fractal em diversos campos da Geotecnia que pareceram interessantes ao autor e que se encontram dentro da sua área específica de actividade.

### 3.1 — Percolação em descontinuidades e em rochas porosas

As potencialidades da aplicação da geometria fractal aos problemas de percolação através de descontinuidades e de rochas porosas foram imediatamente evidenciadas por Mandelbrot (1982). Aí, eram apresentadas duas vias de reproduzir ou modelar a percolação: uma, através de curvas que são geradas por iniciadores que exibem pontos de contacto e reproduzem os caminhos de percolação e a sua conhecida tortuosidade; a outra, por fractais do tipo da “carpete” de Sierpiński, em que se modelam os contactos da rocha das duas faces da descontinuidade.

O primeiro exemplo de aplicação refere-se aos trabalhos de Jacquin (1989), que se baseiam na análise de lâminas de rochas carbonatadas porosas para a determinação da porosidade intergranular e da sua fronteira com a rocha. A partir das imagens destas duas ocorrências, Jacquin determina a dimensão fractal da fronteira pelo método referido como *yardstick* e a da porosidade intergranular a partir do diagrama, em escala log-log, da área porosa encontrada dentro de um quadrado de lado  $r$ , em função da dimensão  $r$  do quadrado. As conclusões extraídas deste trabalho pretendem relacionar estes gráficos com a existência de um Volume Elementar

Representativo (vulgarmente designado por REV) que é necessário ter em atenção em estudos que visem a percolação.

Os trabalhos de Nolte et al. (1989) e Pyrak-Nolte et al. (1990) referem-se à modelação dos contactos e, complementarmente, dos caminhos de percolação de uma descontinuidade, através de fractais baseados na construção da tapete de Sierpiński, mas onde a posição dos diversos quadrados que vão sendo retirados (tremas) é definida de uma forma aleatória. Estes vazios que vão sendo introduzidos correspondem às áreas de contacto entre ambas as faces da diaclase. A comparação da Fig. 2 com a Fig. 11 permite visualizar este modelo; nesta última são visíveis o quadrado correspondente à primeira iteração com área nove vezes menor  $(1/3)^2$  que a inicial, os 8 quadrados seguintes e ainda, mas já com dificuldade, os 64 seguintes. A determinação da dimensão fractal é feita contando o número de quadrados,  $N$ , de uma malha de lado  $r$  que não se encontram ocupados, na sua maior parte (50 %), por tremas. O cálculo da dimensão fractal é feito a partir do declive do gráfico  $\ln N$  vs.  $\ln r$ . Este método foi aplicado a diaclases naturais as quais foram submetidas a tensões normais diferentes (3, 33 e 85 MPa) e a dimensão fractal das áreas em que existe fluxo varia de 1,996 e 1,997, para a tensão normal mais baixa, a 1,964 e 1,955, respectivamente, para a mais alta, parecendo ter uma assíntota horizontal de cerca de 1,95.

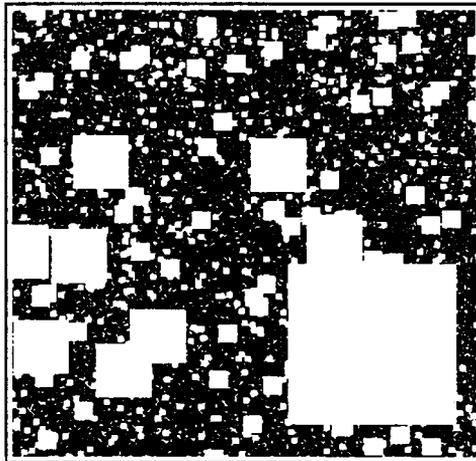


Fig. 11 — Modelo de áreas de contacto entre superfícies baseado na construção da tapete de Sierpiński

Brown (1987) utilizou o método da subdivisão recursiva, proposto por Fournier et al. (1982), para gerar a rugosidade das superfícies das diaclases, conhecedor que era da linearidade em escala bilogarítmica dos espectros de potência de perfis de rugosidade (Brown e Scholz, 1985b), facto que indicia a existência de um fractal. Com o suporte teórico e prático de outros trabalhos dos mesmos autores (1985a, 1986), a simulação continuava, depois de obter as superfícies de rugosidade, colocando duas superfícies diferentes, mas com o mesmo valor de  $D$  (entre 2 e 3), em contacto e estudando os caminhos de fluxo que ocorriam para diferentes aberturas. Este trabalho pretendia estudar as diferenças entre a lei cúbica de Reynolds para o escoamento entre planos paralelos e o que de facto existe em fracturas rugosas. As conclusões

apontam para que o caudal numa descontinuidade real seja inferior àquele que se obtém considerando a lei cúbica aplicada à mesma diaclase e considerando a sua abertura constante e igual à respectiva abertura média.

Um trabalho de investigação semelhante foi efectuado por Wang et al. (1988). Estes autores estudaram as aberturas de descontinuidades geradas por um método idêntico ao anterior, mas, neste caso, a descontinuidade era obtida usando a mesma superfície gerada para modelar ambas as faces. Em seguida, a abertura era conseguida por intermédio de um deslocamento relativo das superfícies mantendo os seus planos médios paralelos. O trabalho prossegue com o estudo da relação entre as aberturas, assim obtidas, e o afastamento introduzido. A Fig. 12 apresenta dois exemplos de superfícies e das respectivas aberturas: uma, sem qualquer deslocamento entre ambas as faces, produz uma abertura nula e constante; a outra já apresenta uma variação da abertura de ponto para ponto devido a um movimento de cisalhamento introduzido. Este trabalho encontra-se referido neste ponto, apesar de nenhuma consideração quanto à percolação ser efectuada, porque as analogias com o anterior são importantes: a abertura é um parâmetro determinante para a avaliação do fluxo e a modelação efectuada parece corresponder melhor à realidade, visto não ser de esperar que as duas faces da mesma descontinuidade não sejam de algum modo correlacionáveis.

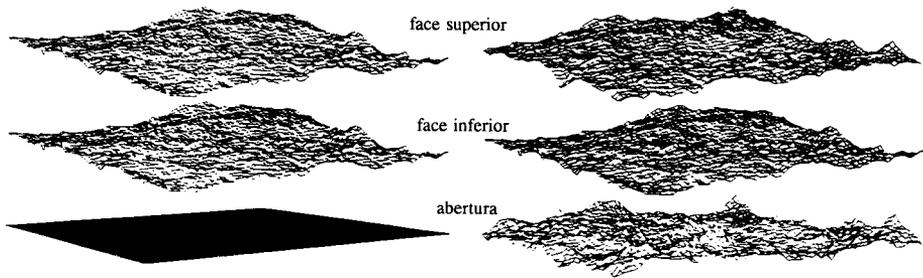


Fig. 12 — Simulação da rugosidade e abertura de descontinuidades em rocha

### 3.2 — Compartimentação e fragmentação

A possibilidade de a compartimentação de maciços rochosos ser um fenómeno que pode ser melhor entendido à luz da teoria fractal já foi referida, tal como as razões físicas que suportam essa hipótese. Esta opinião encontra-se em confronto com a ideia de a existência de descontinuidades ser um processo de Poisson. Isso implicaria que o fenómeno teria que ser estacionário, não-multiplicativo e independente (Grossmann, 1987). Se as duas primeiras condições são facilmente aceitáveis, face ao conhecimento que temos da realidade (a probabilidade de ocorrência de uma descontinuidade é constante para qualquer ponto do maciço e não é possível existirem duas descontinuidades paralelas no mesmo local), a independência da localização das diaclases pode não ser sempre verificada.

O carácter fractal da compartimentação pode ser reconhecido e foi explorado em diversos trabalhos. Começa-se por referir o estudo sobre os espaçamentos e as aberturas de diaclases, efectuado por Barton e Zoback (1990), a partir de dados obtidos de um furo de sondagem.

A frequência do espaçamento entre todas as diaclases observadas por intermédio de um endoscópio (câmara de TV) seguia uma lei do tipo exponencial com um declive igual a 1,03, o que leva a sugerir a existência de uma dimensão não-inteira, mas fractal, para definir esse parâmetro. Contudo, em relação a este trabalho, algumas críticas podem ser feitas na parte que se refere ao conceito de espaçamento e, em função disso, à forma como ele é determinado.

Num dos possíveis locais escolhidos pelas autoridades americanas como repositório para os seus detritos nucleares, um maciço de tufos no deserto do Nevada conhecido por Yucca Mountain, para além de muitos outros trabalhos, foi efectuado um estudo da compartimentação em três áreas planas com cerca de 250 m<sup>2</sup> em que foram mapeadas todas as descontinuidades com intersecções superiores a 20 cm (Barton e Larsen, 1985). A distribuição do comprimento das intersecções (*trace lengths*) foi definida como log-normal, mas as diaclases não se agrupavam, de forma clara, em famílias. Foi então determinada a dimensão fractal dessas intersecções, que se baseou na contagem manual do número de elementos de diversas malhas nos quais se podiam encontrar intersecções de descontinuidades com a superfície de observação.

O declive da recta dos mínimos quadrados do gráfico do logaritmo de base 2 do número de quadrados *versus* a dimensão do lado da malha é a dimensão fractal, que, nos três casos, varia pouco (entre 1,12 e 1,16), apesar de estes valores terem sido obtidos em três zonas distintas da mesma unidade geológica. Este trabalho conclui que a fracturação é fractal dentro de uma gama de dimensões entre 0,20 e 25 m. O valor mais baixo corresponde ao limite inferior com que foram medidos os *trace lengths* e o superior ao lado da malha mais aberta utilizada; contudo, os gráficos  $\log_2(N)$  vs.  $r$  apresentados só mostram a existência de 3 dimensões de malhas em cada superfície, pelo que se pensa que as conclusões retiradas devem ser melhor fundamentadas.

La Pointe (1988) compara os seus resultados com os dos autores anteriores, mediante o acesso que teve a uma comunicação pessoal de Barton, em que este recalcula a dimensão fractal usando uma maior gama de tamanhos para a grelha. O trabalho de La Pointe estuda a densidade de fracturação e estabelece que ela pode ser modelada por uma formulação fractal. O método utilizado começa por determinar o número de fracturas dentro de cada célula de uma malha de lado  $r$  colocada sobre a área em estudo. Em seguida, pode-se determinar o histograma de densidades, do qual se vai determinar a dimensão fractal como se de uma superfície rugosa se tratasse. A densidade de fracturação aparece, neste caso, associada a uma dimensão fractal entre 2 e 3.

Os estudos anteriores pretendiam, somente, caracterizar a compartimentação de modo a obter um parâmetro que possa ser correlacionável com outras propriedades, hidráulicas ou mecânicas, do maciço em questão. Chilès (1988), para além de apresentar resultados que evidenciam o carácter fractal da fracturação, passa para a geração de conjuntos de descontinuidades com base em modelos fractais, do tipo de poeiras de Cantor. A determinação da dimensão fractal foi efectuada por um método idêntico ao descrito nos dois exemplos de aplicação anteriores e que se representa na Fig. 13. Os dados em que este exemplo se baseia foram obtidos da parede de uma galeria com uma área de 80 m × 2 m e só considera as intersecções de diaclases subverticais com mais de 20 cm, perpendiculares ao eixo da galeria. Os modelos usados para gerar as descontinuidades baseiam-se em construções do tipo da poeira de Cantor

(Figura 2), mas em que a dimensão pode ser qualquer, o que é conseguido com a variação do comprimento do segmento retirado, e em que a localização é definida de uma forma aleatória. Construções deste tipo podem ser generalizadas para 2 e 3 dimensões e, assim, gerar, por completo, a fracturação.

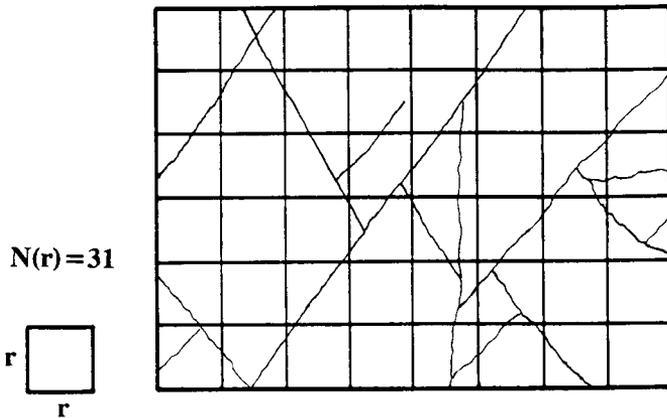


Fig. 13 — Exemplo do método de *box-counting* aplicado a estudos de compartimentação

A fragmentação está ligada a um grande número de fenómenos geológicos, desde a utilização de explosivos até aos impactos que produzem a ejeção de fragmentos, passando pela compartimentação de maciços. Neste domínio é habitual estabelecer uma relação exponencial para a percentagem do número de fragmentos de dimensão superior a um dado valor que, mediante uma escolha apropriada das constantes, corresponde a uma relação fractal (Turcotte, 1986 e 1989).

### 3.3 — Falhas

O estudo da dimensão fractal das intersecções de falhas com a superfície do terreno foi uma das áreas em que a geometria fractal foi vista como uma nova via de investigação dos fenómenos sísmicos. Os trabalhos que irão agora ser referidos constam do cálculo da dimensão fractal de troços e zonas de falhas. Os trabalhos mais divulgados sobre este assunto, talvez devido a estudarem a conhecida falha de Santo André na Califórnia, são os de Aviles et al. (1987) e de Okubo e Aki (1987), apresentados de forma consecutiva no mesmo número de uma revista de Geofísica.

O primeiro apresenta um estudo da dimensão fractal de segmentos considerados característicos da falha e conclui que  $D$  varia entre valores muito próximo da unidade (1,0008 e 1,0191), o que é reflexo da suavidade da falha principal. Uma conclusão interessante que estes autores apresentam prende-se com a correlação entre a localização dos valores de  $D$  mais elevados da falha principal e as zonas ou segmentos em que a complexidade das falhas secundárias é maior. O método utilizado para calcular a dimensão fractal foi o de medir a falha com régua de diferentes dimensões (*yardstick* ou *ruler method*). Este processo apresenta

algumas dificuldades no tratamento a dar ao resto que sobra de aproximar a curva representativa da falha por segmentos de recta de comprimento predeterminado. Neste trabalho são definidas três formas de proceder: a primeira, que foi a seguida, resume-se a escolher segmentos com comprimentos tais que o resto seja inferior a uma dada tolerância; a segunda considera que a distância entre o último segmento de recta e o final deve ser somado ao comprimento total, e foi aquele seguido por Richardson no seu trabalho pioneiro (1961); o terceiro arredonda essa distância final em falta. Esta duas últimas formas de proceder não devem ser utilizadas, visto que a alteração do sentido em que os segmentos se vão aproximando à curva leva a valores diferentes do comprimento total. A primeira, apesar de menos afectada por este aspecto, afigura-se como bastante restritiva em relação aos comprimentos dos segmentos a utilizar. A forma mais simples de toroar esta questão corresponde a não considerar, à partida, segmentos de recta de comprimento definido, mas sim determinar qual o comprimento que um número predefinido de segmentos deve ter para aproximar o desenvolvimento total da curva (Muralha e Charrua Graça, 1990).

O trabalho de Okubo e Aki chama a atenção para o facto de a complexidade da geometria da falha ser um parâmetro importante na definição do tipo de mecanismo a esperar nessa zona. Assim, nas zonas em que a geometria da falha, não só à superfície mas também em profundidade, é suave ou pouco complexa, a energia tectónica acumulada é libertada por deslocamentos relativos de fluência ou por sismos de fraca intensidade; pelo outro lado, nas zonas que apresentam uma geometria complexa, tanto em termos da falha principal como na existência de muitas zonas de falhas secundárias, geralmente, a sismicidade é reduzida e não se verificam movimentos da falha, pelo que se tratam de zonas bastante mais perigosas em que a energia se está a acumular e onde pode vir a ocorrer um sismo de maiores proporções. O método usado por estes autores para determinar  $D$  foi o *box-counting* cobrindo os segmentos da falha com círculos. Os valores obtidos foram significativamente superiores aos já referidos: variaram conforme os segmentos, apresentando um valor de 1,12, valores à volta de 1,22 para as zonas com maior actividade sísmica e valores de 1,42 para as zonas de mais fraca actividade e onde os riscos são maiores.

Ribeiro et al. (1990) realizaram um trabalho semelhante. Aplicado à falha da Vilariça no Nordeste português, que evidencia comportamento activo desde o Quaternário, o método das réguas utilizado, em três zonas, deu valores de  $D$  entre 1,0062 e 1,0171, da mesma ordem de grandeza que os determinados para a falha de Santo André pelo mesmo método. Apesar do diminuto número de zonas investigadas, verificou-se uma relação entre a dimensão fractal e o deslocamento ao longo da falha. Mateus (1989), referido neste artigo, determinou a dimensão fractal da zona da falha pelo método *box-counting*, integrando, assim, toda a complexidade das falhas secundárias para além da falha principal, chegando a valores entre 1,0254 e 1,1667 para as mesmas zonas. Uma das conclusões retiradas desta comparação refere que falhas de menores dimensões localizadas numa zona dentro de uma placa tectónica devem apresentar uma complexidade, que pode ser expressa em termos de dimensão fractal, menor que falhas de maiores dimensões localizadas nas fronteiras das placas. A outra conclusão vem confirmar a relação entre a dimensão fractal e a complexidade da falha com zonas de maior ou menor movimento e, por complementaridade, zonas onde existe menor ou maior acumulação de energia e risco

potencial. Conclusões semelhantes podem ser encontradas em Main et al. (1990), que estudou, para além de zonas de falhas, a fissuração provocada por ensaios de corte.

Um trabalho de Hirata (1989) apresentava a dimensão fractal de sistemas de falhas no Japão. O autor seguiu um processo semelhante ao utilizado para estudar a compartimentação (contagem dos quadrados de uma grelha onde se encontram falhas), mas desta feita aplicado a mapas de falhas. Este trabalho mostra que a auto-semelhança se mantém para escalas de 2 a 20 km e refere valores da dimensão fractal, para diversos locais, variando entre 1,05 e 1,60. A uma escala mais reduzida (entre 0,625 e 10 km), para um grupo de falhas particular, a dimensão fractal encontrada foi 1,49. Esta citação poderia encontrar-se no ponto anterior, mas foi englobada aqui por se tratar de mais um estudo relativo a falhas.

Este último estudo vem fortalecer, de uma forma prática, a ideia atrás expressa de que a compartimentação que os maciços evidenciam apresenta uma semelhança desde a escala das falhas até à dimensão das microfissuras, passando pela compartimentação à escala das obras fundadas ou inseridas em maciços rochosos.

### 3.4 — Rugosidade de superfícies de descontinuidade

A modelação da rugosidade de diaclases rochosas apresentada no ponto 3.2 referia-se a estudos dirigidos para a modelação do comportamento hidráulico ou hidromecânico de diaclases em rocha. Neste ponto, vão ser referidos os trabalhos que tratam da descrição da rugosidade, com a finalidade de a descrever e modelar sem se importarem em transpor essa informação para o domínio da abertura.

É habitual o uso de perfis, intersecções da superfície da diaclase com planos, geralmente paralelos à direcção do deslizamento, na caracterização das asperezas, rugosidades e ondulações das faces das diaclases. O parâmetro que, usualmente, se estuda é a altura de um conjunto de pontos alinhados e espaçados de uma forma constante ao longo da superfície. A distribuição das alturas de um perfil costuma apresentar um aspecto bimodal. A análise destes diagramas é feita com base em variogramas e funções de autocorrelação e os parâmetros habituais podem ser encontrados em Gentier (1986) ou em Gentier e Riss (1990).

Os primeiros trabalhos, que tinham por finalidade correlacionar uma descrição da rugosidade de perfis por intermédio da geometria fractal com parâmetros de resistência ao deslizamento de diaclases, fundamentavam-se na determinação de  $D$  dos perfis de rugosidade elaborados por Barton e Choubey (1977) para a avaliação do parâmetro JRC (Joint Roughness Coefficient) do seu modelo de rotura de descontinuidades. Este último parâmetro pode ser determinado por comparação visual de superfícies de descontinuidades com perfis tipo e pode, por isso, ser utilizado para descrever, de uma forma expedita e fácil, a rugosidade de uma diaclase. Por outro lado, faz parte integrante da lei não-linear que estabelece a resistência ao deslizamento do modelo de Barton

$$\frac{\tau}{\sigma_n} = \text{tg} \left( JRC \log_{10} \frac{JCS}{\sigma_n} + \phi_b \right) \quad (20)$$

Este parâmetro possui a vantagem de quantificar a reconhecida influência do aumento da resistência com o aumento da rugosidade, mas a sua determinação por comparação com perfis é bastante perigosa, devido ao seu carácter subjectivo, pelo que a sua determinação deve ser feita por outros processos, baseados em ensaios de deslizamento progressivo e sem força normal aplicada. Hoje em dia, este parâmetro é entendido mais como uma constante numa lei de rotura, tal como um ângulo de atrito ou uma coesão, mas cujo forte significado físico pode servir como verificação ou previsão inicial.

Os trabalhos de Turk et al. (1987) começam por referir a influência da rugosidade na resistência ao deslizamento de diaclases e estudam o ângulo de dilatação e a dimensão fractal de perfis para caracterizar a rugosidade. Por intermédio da determinação da dimensão fractal dos perfis tipo de JRC, indicados por Barton e Choubey (1977), pretendiam relacionar a rugosidade com a dimensão fractal. O método utilizado foi o dos divisores, tendo sido utilizados unicamente 4 comprimentos diferentes de segmentos de recta para cada um dos 10 perfis tipo. Os valores calculados encontram-se no quadro que acompanha a Fig. 14.

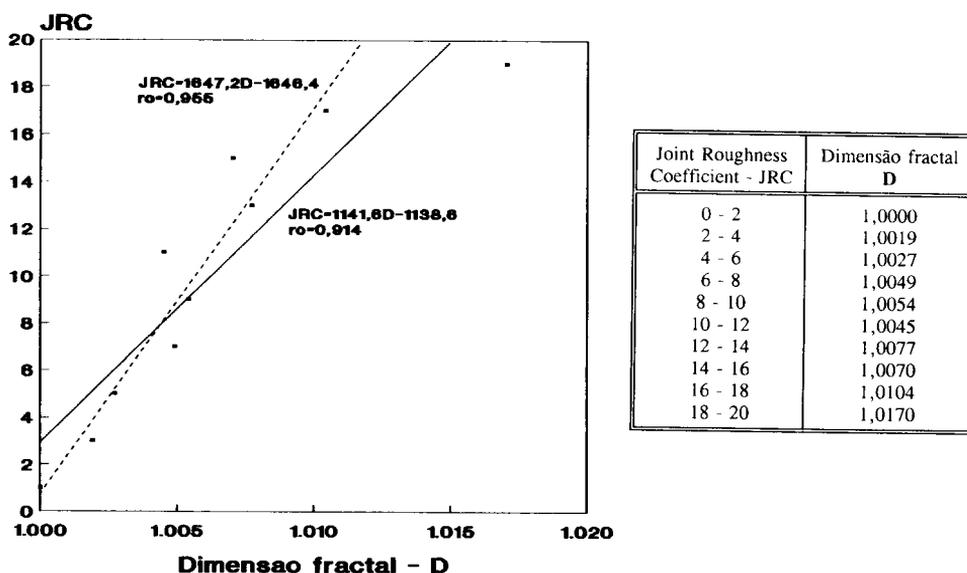


Fig. 14 — Relação entre a dimensão fractal e JRC dos perfis tipo de rugosidade, a partir dos valores de Turk et al.

O gráfico evidencia um esperado aumento dos valores da dimensão fractal face ao aumento da rugosidade. Os valores de  $D$  obtidos voltam a aproximar-se de uma forma significativa da unidade, e a sua variação com os valores do JRC pode considerar-se linear, apesar de o perfil de rugosidade mais elevada (JRC 18-20) parecer poder indicar uma relação mais do que linear. A flutuação que se encontra no gráfico deve advir das dificuldades de aplicação do método dos divisores, já referidas no ponto anterior, e que, neste caso, se encontram agravadas pelo emprego de um número extremamente limitado (4) de comprimentos para os segmentos de recta. As rectas, obtidas por regressão linear com todos os valores e com excepção do perfil de JRC 18-20,

apresentam coeficientes de correlação relativamente baixos, respectivamente, 0,914 e 0,955. Esta quantificação apoia a conclusão qualitativa que se obtém pela análise visual do gráfico da Fig. 14. As equações das rectas são as seguintes

$$JRC = 1141,6 D - 1138,6 \quad (\text{todos os valores}) \quad (21)$$

$$JRC = 1647,2 D - 1646,4 \quad (\text{sem o valor mais alto})$$

ou no caso de se pretender a relação inversa

$$D = 0,99883 = 73,182 \times 10^{-5} JRC \quad (\text{todos os valores}) \quad (22)$$

$$D = 0,99996 + 55,417 \times 10^{-5} JRC \quad (\text{sem o valor mais alto})$$

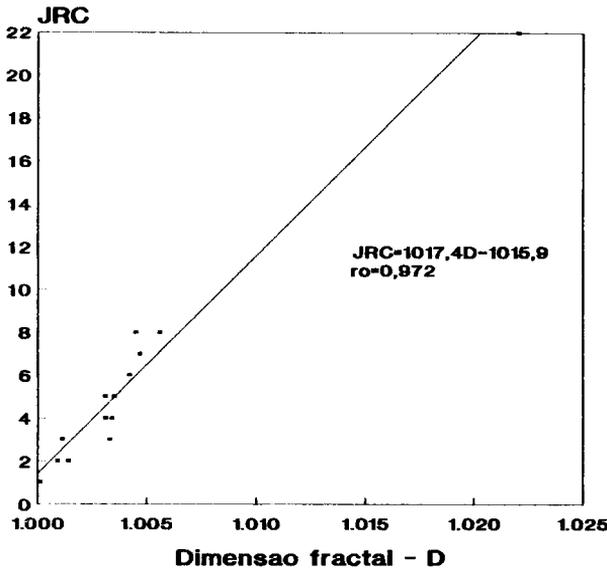
A variação pouco significativa dos valores da dimensão fractal obtidos por este método (o máximo foi somente 1,0170) face aos desvios que lhe estão inerentes parece ser uma desvantagem para uma abordagem deste tipo. Por outro lado, a diminuição de  $D$ , que ocorre em dois casos, entre perfis tipo consecutivos vem salienta a necessidade de uma reformulação destes, já sentida por todos aqueles que efectuaram determinações de JRC de diaclases neles baseadas.

Os estudos de Carr e Warriner (1987) pretendem, também, estabelecer uma correlação entre a dimensão fractal e a rugosidade, descrita por intermédio do parâmetro JRC. Contudo, começam por referir que secções verticais de relevo e superfícies de rugosidade são, teoricamente, entidades auto-afins, como Mandelbrot (1985) faz notar. A aplicação da técnica dos divisores só é, assim, possível se não foram aplicadas quaisquer sobrelevações das escalas verticais. A linha seguida por estes autores difere da explicada anteriormente pelo facto de se terem baseado em 15 perfis de rugosidade, com comprimentos que variavam entre cerca de 5 e 30 m, aos quais atribuíram um valor de JRC, por análise visual comparativa com os perfis tipo, e um valor de  $D$  calculado pela técnica dos divisores (*yardstick*), usando 4 comprimentos distintos para estes (0,5; 1,0; 1,5 e 2,0 m). As críticas quanto à exiguidade deste número e ao tratamento dos restos anteriormente efectuadas mantêm-se. Na Fig. 15 apresentam-se, em tabela, os valores dos parâmetros  $D$  e JRC para os 15 perfis e um gráfico que permite visualizar a recta mais provável obtida a partir deles considerando desvios segundo ambas as variáveis e com um coeficiente de correlação de 0,972, dada pela expressão seguinte

$$JRC = 1017,41 D - 1015,93 \quad (23)$$

Considerando que uma diaclase plana ou polida deve ter JRC nulo ao que corresponde uma dimensão fractal unitária, os autores propõem uma equação simplificada que obriga a respeitar esta condição

$$JRC = 1000 (D - 1) \quad (24)$$



Perfil	Joint Roughness Coefficient - JRC	Dimensão fractal D
1	3	1,0011
2	2	1,0009
3	4	1,0031
4	1	1,0001
5	4	1,0034
6	5	1,0035
7	3	1,0033
8	7	1,0047
9	8	1,0045
10	5	1,0031
11	2	1,0014
12	8	1,0056
13	13	1,0086
14	22	1,0220
15	6	1,0042

Fig. 15 — Relação entre a dimensão fractal e JRC, a partir dos valores de Carr e Warriner (1987)

As considerações feitas em relação ao exemplo anterior mantêm-se válidas, servindo este caso para reforçar a ideia de que a determinação de JRC baseada na dimensão fractal de perfis de rugosidade calculada pelo *yardstick method*, apesar das dificuldades associadas à dispersão com que  $D$  é calculado face ao seu valor absoluto (neste caso a variação de  $D$  foi de 0,022 e no caso anterior de 0,017). Este processo parece poder ser empregue com algum sucesso, visto que os desvios que pode provocar são de uma ordem de grandeza inferior aos que afectam os valores de JRC avaliados por comparação visual com os perfis tipo por diversos observadores. Contudo, não se deve deixar de ter em conta o objectivo primeiro que levou ao estabelecimento do JRC e não elaborar teorias acerca da sua determinação.

Em trabalho posterior, Carr (1989) estudou mais 11 perfis de rugosidade aplicando dois métodos distintos para calcular a sua dimensão fractal: o método dos divisores e um método baseado na determinação do espectro de potência tomando como variável a altura do perfil. Esta última técnica determina  $D$  a partir da fórmula seguinte

$$D = 2,5 - \frac{B}{2} \quad (25)$$

onde  $B$  é valor absoluto do declive do espectro de potência em escala bilogarítmica. A rugosidade era definida a partir de valores de JRC obtidos da fórmula de Tse e Cruden (1979)

$$JRC = 32,2 + 32,47 \log Z_2 \quad (26)$$

em que  $Z_2$  é o somatório das raízes quadradas do quadrado dos declives do perfil.

Os resultados obtidos reflectem uma boa relação entre os valores de JRC e os da dimensão fractal calculados pelo método dos divisores, com um coeficiente de correlação de 0,908 para a relação seguinte

$$JRC = 706,01 D - 702,04 \quad (27)$$

Os valores de  $D$  calculados pelo método dos divisores continuam, como nos exemplos anteriores, a variar pouco (entre 1 e 1,0315); mas, no que concerne os valores da dimensão fractal obtidos do espectro de potência, eles variam significativamente, entre 0,880 e 1,467, apresentando uma baixa dependência em relação aos valores calculados com os divisores, que se traduz por um coeficiente de correlação de 0,325, e uma incapacidade de se correlacionarem com JRC (coeficiente de correlação de 0,046).

Ainda neste domínio particular, Lee et al. (1990) apresentam a seguinte lei não linear para relacionar JRC e a dimensão fractal, calculada pelo método dos divisores com 5 comprimentos (2, 4,..., 10 cm) para os perfis tipo digitalizados com 10 cm de comprimento entre os pontos extremos

$$JRC = -0,87804 + 37,7844 \left( \frac{D-1}{0,015} \right) - 16,9304 \left( \frac{D-1}{0,015} \right)^2 \quad (28)$$

Esta equação foi aplicada em vez de uma simples relação linear unicamente por, em termos numéricos, apresentar vantagens. Uma simples análise visual do gráfico JRC-D, apresentado no artigo, permite concluir que, excepção feita ao valor correspondente ao perfil de maior rugosidade, os restantes pontos se podem aproximar por uma recta, com um coeficiente de correlação de 0,9965, dada por

$$JRC = 1820,08 D - 1819,92 \quad (29)$$

Ambas as equações apresentam a incompatibilidade física de fornecerem valores de JRC diferentes de 0 para perfis de rugosidade polidos, ou seja, para  $D=1$  obtêm-se valores de JRC de -0,88 e de 0,16, respectivamente.

Este trabalho apresentava em seguida os resultados de ensaios de deslizamento, em termos de tensão tangencial de pico, de discontinuidades obtidas de fracturas de calcário e as relações com a dimensão fractal de perfis de rugosidade obtidos dessas superfícies. Os gráficos evidenciam um aumento da tensão resistente com um aumento da dimensão fractal. O número reduzido de ensaios (3 ensaios para cada uma das 2 tensões normais aplicadas) não permite estabelecer correlações de índole matemática.

Um método dos divisores modificado é apresentado por McWilliams et al. (1990), que consiste na divisão da distância horizontal em comprimentos idênticos e na medição do comprimento total obtido da aproximação por segmentos de recta que possuem, por isso, a mesma projecção horizontal. Este procedimento traz vantagens, mas continua a não resolver a questão do resto que é deixado sempre que o comprimento dos divisores vezes um determinado número inteiro não acerta com o final do perfil. Estes autores realizaram ensaios de deslizamento de 6 provetes com diaclases de rochas distintas (basalto, gneiss e quartzito) e traçaram 10 perfis de rugosidade segundo cada direcção com os quais calcularam valores médios da dimensão fractal, do parâmetro  $Z_2$  e, ainda, da intersecção com o eixo vertical ( $I$ ), do gráfico bilogarítmico que usaram para calcular  $D$ . Tendo considerado a tensão tangencial de pico relacionada com a tensão normal segundo a seguinte lei

$$\tau = A \sigma_n^B \quad (30)$$

estabeleceram as relações seguintes, que permitem estimar a resistência ao deslizamento de diaclases a partir dos referidos parâmetros que quantificam a rugosidade das superfícies

$$A = 4,295 - 1,022 D - 0,201 I - 1,352 Z^2 \quad (31)$$

$$B = - 1,499 + 0,568 D + 0,412 I + 0,076 Z_2$$

Uma conclusão importante tirada por estes autores refere-se à baixa correlação que perfis paralelos contíguos mostravam, tanto em termos da dimensão fractal como de estatística de declives  $Z_2$ .

No artigo de Muralha e Charrua Graça (1990) são apresentados 3 exemplos de aplicação de diferentes métodos de cálculo da dimensão fractal de perfis de rugosidade. As 3 técnicas usadas foram: i) o método de Minkowski (Fig. 8), ii) *box-counting* com uma malha quadrangular, iii) método dos divisores. Os dois primeiros foram utilizados à curva triádica de Von Koch e todos eles a um dos perfis tipo de Barton, correspondente a JRC 18-20. No que se refere à curva de Von Koch ( $D = \log 4 / \log 3 = 1,2619$ ), o método de Minkowski conduziu a um valor para  $D$  de 1,2698 e o método da grelha a um valor de 1,2351. No quadro seguinte apresentam-se os valores de  $D$  calculados por diferentes métodos para a curva de Von Koch, bem como o desvio absoluto,  $\Delta$ , e os erros relativos,  $\epsilon$  e  $\epsilon'$ , em que  $\Delta$  e  $\epsilon$  são determinados da forma usual e  $\epsilon'$  é obtido, com a finalidade de aumentar a sensibilidade, retirando uma unidade aos valores de  $D$  calculados e correcto

### QUADRO 1

Comparação de valores de  $D$  calculados por diferentes métodos

Método	$D_{\text{calc}}$	$\Delta$	$\epsilon$ (%)	$\epsilon'$ (%)	Referência
Minkowski	1,2698	0,0079	0,6	3,0	Muralha e Charrua Graça (1990)
malha	1,2351	0,0268	2,1	10,2	Muralha e Charrua Graça (1990)
divisores	1,248	0,0139	1,1	5,3	Aviles et al. (1987)
momentos, $M_{-1}$	1,2647	0,0028	0,2	1,1	Voss em Peitgen e Sauper (eds.) (1987)
$M_0$	1,2646	0,0027	0,2	1,0	
$M_1$	1,2639	0,0020	0,2	0,8	
$M_2$	1,2644	0,0025	0,2	1,0	
$M_3$	1,2634	0,0015	0,2	0,6	

O perfil tipo de JRC 18-20 foi digitalizado em 209 pontos com espaçamento horizontal constante de 1 mm. O método de Minkowski conduziu a um valor para  $D$  de 1,0141 tendo sido utilizados círculos com raios de 5, 10, 15, ..., 40 mm, que levaram a um coeficiente de correlação de 0,9941 para a regressão linear a partir do gráfico  $\log(2r)$  vs.  $\log(A/2r)$ . O método de

*box-counting* com uma malha quadrada forneceu um valor de 1,0632 para  $D$ . O método dos divisores foi efectuado usando o processo já referido para resolver o problema referente aos restos: em vez de se considerarem segmentos de um dado comprimento,  $l_i$  determina-se o valor do comprimento do divisor que corresponde a aproximar a curva com um determinado número de segmentos,  $N_i$ . Por exemplo, se o perfil em causa fosse dividido em 68 partes iguais o comprimento correspondente deveria ser de 3,01449 mm. Neste caso, o valor de  $N$  variou entre 3 e 100, como pode ser visto na Figura 16. A principal conclusão que se pode tirar do gráfico é que a escolha dos divisores é de tal forma importante que pode fazer variar de forma apreciável o valor calculado para  $D$ . Assim, tomando todos os pontos o valor obtido foi 1,0165 com um coeficiente de correlação de 0,9835; mas, para 10 grupos diferentes de cerca de 10 pares de valores cada, os valores obtidos para  $D$  variaram entre 1,0142 e 1,0193.

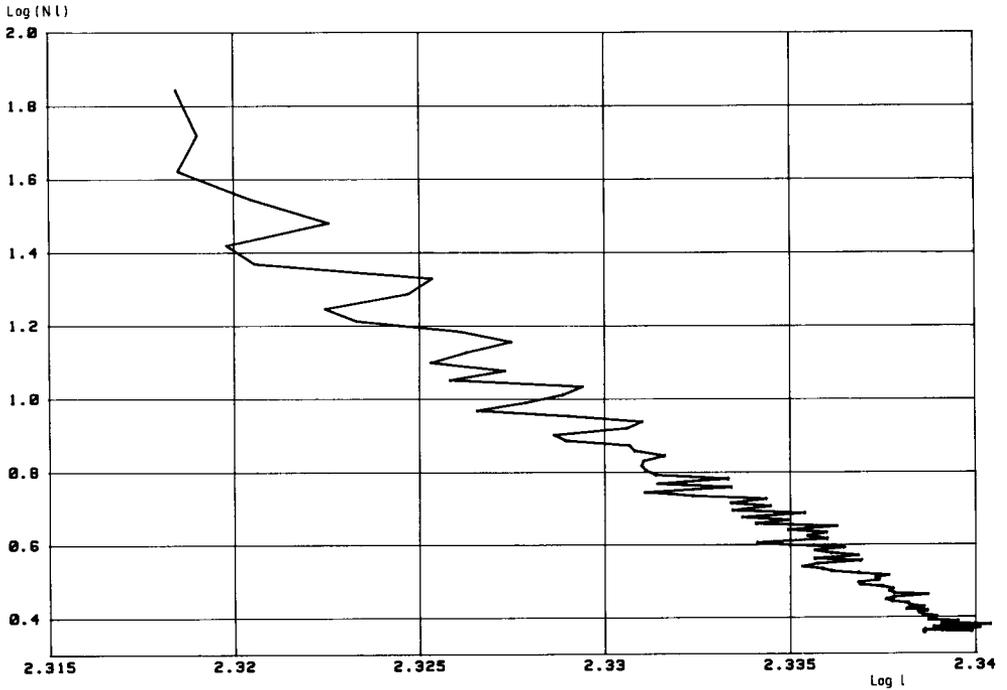


Fig. 16 — Gráfico  $\log NL$  vs.  $\log l$  para o perfil tipo de JRC 18-20

Como se pode constatar a utilização de métodos diferentes conduz a resultados diversos; o mesmo método pode ser empregue com pequenas variantes e conduzir ao mesmo efeito. Além disso, os valores muito próximos da unidade que se obtêm para os perfis de rugosidade levam a pensar ser preferível determinar a dimensão fractal das superfícies de rugosidade, em vez de se calcular a dimensão fractal de um número de perfis retirados dessa superfície.

Os métodos que se podem utilizar para determinar a dimensão fractal de superfícies são generalizações de técnicas apresentadas no ponto anterior. O método mais directo, referido como método dos prismas triangulares, é uma extensão do método dos divisores. Parte da discretização da superfície conseguida pela definição de cotas em pontos de uma malha

quadrangular e consta da aproximação da superfície por triângulos apoiados nessa malha. A relação entre a área da superfície aproximada vai aumentando à medida que a malha aumenta de resolução, ou seja, à medida que o lado da quadrícula diminui. A dimensão fractal pode ser determinada a partir da equação (14), através do cálculo de diversas áreas correspondentes a diferentes malhas. Tal como todas as determinações anteriores, baseadas nos declives de diagramas bilogárítmicos, também esta deve ser efectuada usando potências sucessivas, por exemplo de 2, para se obter uma resolução uniforme segundo o eixo horizontal (Clarke, 1986). O paralelismo entre este método e o dos divisores, especialmente a variante apresentada por McWilliams et al. (1990), é evidente, bastando considerar a superfície intersectada por um plano para um método redundar no outro.

Face às dificuldades sentidas na determinação de perfis de rugosidade, Muralha (1991) estudou a relação entre a área e o perímetro de linhas de nível de superfícies de rugosidade, com a finalidade de determinar a dimensão fractal destas. Para um total de 25 diaclases estudadas, com base numa malha de pontos quadrada de 25 mm de lado, apenas dois forneceram resultados para  $D$  inferiores a 2, os coeficientes de correlação dos diagramas log-log foram sempre superiores a 0,93 (sendo mesmo 92% superiores a 0,95 e 68% superiores a 0,99), o que demonstra as potencialidades desta técnica. Na Fig. 17, apresenta-se um exemplo de aplicação deste método.

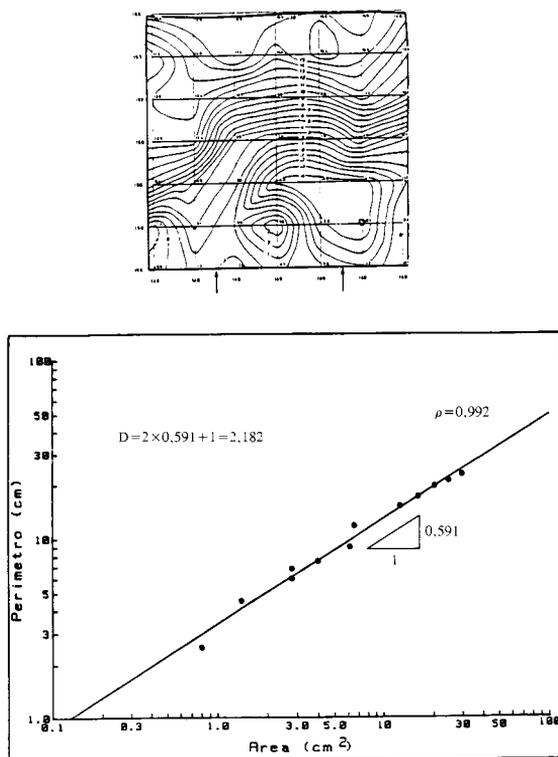


Fig. 17 — Dimensão fractal de superfície de descontinuidade

O presente artigo procurou chamar a atenção para os novos caminhos e possibilidades que a geometria fractal abre a outras perspectivas sobre problemas e ao desenvolvimento de modelos nos domínios da Geotecnia. Os exemplos de aplicação apresentados, mais voltados para as áreas da Mecânica das Rochas e da Geologia de Engenharia, servem para demonstrar este ponto de vista.

As grandes vantagens que a teoria fractal apresenta para descrever fenómenos naturais encontram-se, também, devidamente patenteadas. Assim como a possibilidade de descrever e modelar esses fenómenos, muitas vezes complexos e com múltiplas influências, por um único parâmetro — a dimensão fractal  $D$ .

O trabalho refere, também, as dificuldades que se podem encontrar. A maior tem que ver com a hipótese, cada vez mais fundamentada (Mandelbrot, 1989), de que a maioria dos fenómenos desta área são melhor representados por multifractais. Estes podem ser vistos como uma generalização dos conjuntos fractais e como a passagem de objectos matemáticos caracterizados por um número para objectos definidos por uma função. Esta dificuldade encontra-se subentendida em muitos trabalhos que referem a existência de limites, inferiores definidos pela resolução dos aparelhos de medida e superiores função da dimensão dos objectos, dentro dos quais a definição de uma única dimensão fractal se pode efectuar. Esta limitação é, logo à partida, referida por Mandelbrot (1977) na diferenciação entre fractais matemáticos e teóricos.

A relativa juventude da geometria fractal e as suas grandes vantagens permitem prever um aumento do número das suas aplicações. Contudo, chama-se a atenção para a necessidade de criar normas para a determinação da dimensão fractal ou, pelo menos, revelar detalhadamente a forma como esse valor é obtido, incluindo a descrição do método, as suas variações e, mesmo, os valores usados para raio dos círculos, comprimento dos divisores, lado da malha, etc..

#### REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- AVILES, C.A.; SCHOLZ, C.H. e BOATWRIGHT, J. (1987) — *Fractal analysis applied to characteristic segments of the San Andreas fault*. J. Geoph. Res., vol. 92, nº B1, pp. 331-344.
- BARTON, C.A. e ZOBACK, M.D. (1990) — *Self-similar distribution of macroscopic fractures at depth in crystalline rock in the Cajon Pass scientific drillhole*. Rock Joints, Loen, Barton & Stephansson (eds), Balkema, Roterdão.
- BARTON, C.C. e LARSEN, E. (1985) — *Fractal geometry of two-dimensional fracture networks at Yucca Mountain, southwestern Nevada*. Proc. Int. Symp. Fundamentals of Rock Joints, Bjorkliden, Centek, Lulea.
- BARTON, N. e CHOUBEY, V. (1977) — *The shear strength of rock joints in theory and practice*. Rock Mechanics, vol. 10, pp. 1-54.

- BROWN, S.R. e SCHOLZ, C.H. (1985a) — *Closure of random elastic surfaces in contact*. J. Geoph. Res., vol. 90, nº B7, pp. 5531-5545.
- BROWN, S.R. e SCHOLZ, C.H. (1985b) — *Broad bandwidth study of the topography of natural rock surfaces*. J. Geoph. Res., vol. 90, nº B14, pp. 12575-12582.
- BROWN, S.R. e SCHOLZ, C.H. (1986) — *Closure of rock joints*. J. Geoph. Res., vol. 91, nº B5, pp. 4939-4948.
- BROWN, S.R. (1987) — *Fluid flow through rock joints: the effect of surface roughness*. J. Geoph. Res., vol. 92, nº B2, pp. 1337-1347.
- CARR, J.R. e WARRINER, J.B. (1987) — *Rock mass classification using fractal dimension*. 28<sup>th</sup> U.S. Symposium on Rock Mechanics, Tucson. Balkema, Roterdão.
- CARR, J.R. (1989) — *Fractal characterization of joint surface roughness in welded tuff at Yucca Mountain, Nevada*. 30<sup>th</sup> U.S. Symposium on Rock Mechanics, Khair (ed.). Balkema, Roterdão.
- CHILÈS, J.P. (1987a) — *Fractal and geostatistical methods for modelling a fracture network*. MGUS 87 Conf., Redwood and Mathematical Geology, Aug. 1988.
- CHILÈS, J.P. (1987b) — *Three-dimensional geometric modelling of a fracture network*. Proc.DOE/AECL 87 Conf., San Francisco.
- CLARKE, K.C. (1986) — *Computation of the fractal dimension of topographic surfaces using the triangular prism surface area method*. Computers & Geosciences, vol. 12, nº 5, pp. 713-722.
- FALCONER, K. (1990) — *Fractal geometry. Mathematical foundations and applications*. John Wiley, Chichester.
- GENTIER, S. (1986) — *Morphologie et comportement hydromécanique d'une fracture naturelle dans le granite sous contrainte normale*. Tese doutoramento, Univ. Orléans.
- GENTIER, S. e RISS, J. (1990) — *Quantitative description and modelling of joints morphology*. Rock Joints, Loen, Barton & Stephansson (eds), Balkema, Roterdão.
- GROSSMANN, N.F. (1987) — *As descontinuidades nos maciços rochosos*. Programa de investigação para Inv. Coord., LNEC, Lisboa.
- HÉNON, M. (1976) — *A two-dimensional mapping with a strange attractor*. Commun. Math. Phys. 50, pp. 69-77.
- HIRATA, T. (1989) — *Fractal dimension of fault systems in Japan*. Pure and applied geophysics, 131, nº 1/2, pp. 157-170. Birkhauser, Basileia.
- JACQUIN, C. (1989) — *Structures des réseaux poreux et propriétés pétrophysiques des roches*. Rev. Franç. Géotech., nº 49, pp. 25-42.
- LA POINTE, P.R. (1988) — *A method to characterize fracture density and connectivity through fractal geometry*. Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr., vol. 25, nº 6, pp. 421-429
- LEE, Y.-H.; CARR, J.R.; BARR, D.J. e HAAS, C.J. (1990) — *The fractal dimension as a measure of the roughness of rock discontinuity profiles*. Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr., vol. 27, nº 6, pp. 453-464
- MAIN, I.G.; PEACOCK, S. e MEREDITH, P.G. (1990) — *Scattering attenuation and the fractal geometry of fracture systems*. Pure and applied geophysics, 133, nº 2, pp. 283-304. Birkhauser, Basileia.
- MANDELBROT, B.B. (1967) — *How long is the coast of Britain? Statistical self-similarity and fractional dimension*. Science, 155, pp. 636-638.

- MANDELBROT, B.B. (1975) — *Les objets fractales: forme, hasard et dimension*. Flammarion, Paris.
- MANDELBROT, B.B. (1977) — *Fractals: form, chance and dimension*. Freeman, S. Francisco.
- MANDELBROT, B.B. (1983) — *The fractal geometry of Nature*. Freeman, N. York.
- MANDELBROT, B.B. (1985) — *Self-affine fractals and fractal dimension*. Physica Scripta, vol. 32, pp. 257-260.
- MANDELBROT, B.B. (1989) — *Multifractal measures for the geophysicist*. Pure and applied geophysics, 131, n° 1/2, pp. 5-41. Birkhauser, Basileia.
- MATEUS, A.M. (1989) — *Petrografia e micro-deformação das rochas da falha e litótipos encaixantes do troço transmontano do acidente Manteigas-Vilarica-Bragança*. Tese de mestrado da Fac. Ciências Lisboa.
- MCWILLIAMS, P.C.; KERKERING, J.C. e MILLER, S.M. (1990) — *Fractal characterization of fracture roughness for estimating shear strength*. Mechanics of jointed and faulted rock, Rossmanith (ed.), Viena. Balkema, Roterdão.
- MURALHA, J. (1991) — *Os fractais e a geotecnia*. 4º Cong. Nacional de Geotecnia. SPG, Lisboa.
- MURALHA, J. e CHARRUA GRAÇA, J.G. (1990) — *An experience on the application of fractal theory to basic shear strength studies*. Rock Joints, Loen, Barton & Stephansson (eds), Balkema, Roterdão.
- NOLTE, D.D., PYRAK-NOLTE, L.J. e COOK, N.G.W. (1989) — *The fractal geometry of flow paths in the natural fractures in rock and the approach to percolation*. Pure and applied geophysics, 131, n° 1/2, pp. 111-138. Birkhauser, Basileia.
- OKUBO, P.G. e AKI, K. (1987) — *Fractal geometry in the San Andreas fault system*. J. Geoph. Res., vol. 92, n° B1, pp. 345-355.
- Peitgen, H.O. e Sauper, D. (eds.) — *The science of fractal images*. Springer, N. York, 1988.
- PYRAK-NOLTE, L.J., NOLTE, D.D., MYER, L.R. e COOK, N.G.W. (1990) — *Fluid flow through single fractures*. Rock Joints, Loen, Barton & Stephansson (eds), Balkema, Roterdão.
- RIBEIRO, A.; MATEUS, A.; MOREIRA, M.C. e COUTINHO, M.F. (1990) — *The fractal geometry of an active fault (Vilarica strike-slip fault, NE Portugal) and its implications on earthquake generation*. 1º IFIP Conference on Fractals, Lisboa.
- RICHARDSON, L.F. (1961) — *The problem of contiguity: an appendix of statistics of deadly quarrels*. General Systems Yearbook, 6, pp. 139-187.
- TURCOTTE, D.L. (1986) — *Fractals and fragmentation*. Journal Geophysical Research, vol. 91, n° B2, pp. 1921-1926.
- TURCOTTE, D.L. (1989) — *Fractals in Geology and Geophysics*. Pure and applied geophysics, 131, n° 1/2, 1989, pp. 111-138. Birkhauser, Basileia.
- TURK, N.; GREIG, M.J.; DEARMAN, W.R. e AMIN, F.F. (1987) — *Characterization of rock joint surfaces by fractal dimension*. 28th U.S. Symposium on Rock Mechanics, Tucson.
- TSE, R. e CRUDEN, D.M. (1979) — *Estimating joint roughness coefficients*. Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr., vol. 16, pp. 303-307.
- WANG, J.S.Y., NARASIMHAN, T.N. e SCHOLZ, C.H. (1988) — *Aperture correlation of a fractal fracture*. J. Geoph. Res., vol. 93, n° B3, pp. 2216-2224.