

# Uma solução analítica para a propagação de ondas em barras cónicas aplicável à medição da resistência à tracção dinâmica de materiais sólidos

*An analytical solution for wave propagation in conical bars applicable to the measurement of the dynamic tensile strength of solid materials*

**C. Dinis da Gama\***

**RESUMO** - Apresenta-se um estudo sobre a propagação de ondas elásticas de tensão em barras cónicas e tronco-cónicas de comprimento finito, com o objectivo de desenvolver uma solução analítica para os estados de tensão que se manifestam quando determinado impacto é aplicado sobre a base da barra, caminhando em direcção ao seu vértice.

O método é baseado na sobreposição de ondas longitudinais que se propagam no núcleo cilíndrico da barra e de ondas reflectidas (longitudinais e transversais) que são criadas junto à superfície lateral do cone, de modo a permitirem determinar o estado de tensão em qualquer secção circular do interior da barra.

Verifica-se que dessa sobreposição se geram tracções transientes susceptíveis de conduzir à ocorrência de fragmentos cónicos, cujas dimensões permitem determinar a resistência à tracção dinâmica do material que constitui a barra. Exemplifica-se a aplicação do método com resultados de ensaios laboratoriais.

**SYNOPSIS** - A study on the propagation of elastic stress waves in conical bars of finite length is presented, for the purpose of developing an analytical solution to the stress states created when a certain impact is applied to the base of the cone, traveling towards its apex. The method is based on the superposition of longitudinal waves propagating along the bar cylindrical core and reflected waves (longitudinal and transverse) which are created near the lateral surface of the cone, in order to allow the determination of the state of stress at any circular section inside the bar.

It was detected that such a superposition generate tensile stresses that may lead to failure by means of conical fragments, whose dimensions are useful for the measurement of the dynamic tensile strength of the material forming the bar. Application examples of the method in lab tests are provided.

\* Professor Catedrático,  
Departamento de  
Engenharia de Minas e  
Georrecursos, IST, Lisboa,  
E-mail:  
pcdinis@popsrv.ist.utl.pt

**Palavras-chave** – Resistência à tração dinâmica; ensaios laboratoriais; ondas elásticas.

## 1 - INTRODUÇÃO

As investigações científicas sobre a propagação de ondas em barras conheceram desenvolvimento durante a primeira guerra mundial (1914-18) dada a necessidade de determinar as formas das ondas de tensão produzidas pelo impacto de projecteis e pela explosão de detonadores. Apesar de alguns desenvolvimentos teóricos terem sido apresentados ainda no século XIX (Pochhammer, 1876; Bell, 1873) sobre a propagação de ondas em meios confinados, só em 1914 B. Hopkinson efectuou experiências laboratoriais com barras longas destinadas a medir a transmissão de impulsos em corpos sólidos. As barras tinham originalmente secção circular (Hopkinson, 1914) e mais tarde envolveram secções quadradas e rectangulares (Morse, 1948), não circulares (Barr, 1962) e variáveis (Gaines e Volterra, 1966).

As principais investigações que eram realizadas com tais barras incidiam sobre o estudo de problemas dinâmicos ligados ao comportamento de peças prismáticas de trens de aterragem de aviões e outros sistemas mecânicos, tendo sido auxiliadas consideravelmente pela invenção dos extensómetros eléctricos em 1930 e dos tubos de raios catódicos, também na mesma década.

Davies e Hunter (1963) deram conta dos progressos realizados até então, considerando a barra de Hopkinson como o processo mais adequado para efectuar ensaios dinâmicos sobre materiais sólidos.

Recentemente, a electrónica tem contribuído para a aquisição de dados dinâmicos a cada vez maiores velocidades de registo, sendo de destacar as investigações específicas sobre materiais polímeros (Hilling, 1985) e viscoelásticos (Zhao e Gary, 1995).

Em relação a barras de geometria cónica, as contribuições conhecidas não têm sido muitas, talvez por serem pouco utilizadas em construção metálica e devido à complexidade da modelação matemática da propagação ondulatória através das mesmas. A primeira análise conhecida sobre a propagação de um impulso longitudinal ao longo de uma barra cónica foi desenvolvida por Landon e Quinney em 1923, que usaram esse tipo de barra para medir as pressões libertadas pela detonação de explosivos. Kolsky (1963) no seu importante livro "Stress Waves in Solids", dedica quatro páginas à propagação de ondas longitudinais em barras cónicas, introduzindo as equações diferenciais do movimento, embora sem incluir a reflexão de ondas nas paredes laterais das barras, e considerando-as de comprimento infinito.

Entretanto, outras contribuições (experimentais, analíticas e numéricas) sobre aplicações das barras cónicas têm sido apresentadas, nomeadamente as seguintes:

- a) O impacto de projecteis cónicos e tronco-cónicos contra obstáculos sólidos (Graff, 1975).
- b) A vibração longitudinal de barras cónicas (Abrate, 1995).
- c) A utilização de modelos tronco-cónicos do terreno (Meek e Wolf, 1992), como equivalentes dinâmicos de estruturas circulares que transmitem vibrações às fundações, de modo a analisar o comportamento dinâmico destas, através de algoritmos mais simples do que os relacionados com o espaço semi-infinito.

Mais recentemente, Hu, Eberhard e Schielen (2000 e 2001) produziram avanços importantes no cálculo simbólico da propagação de ondas longitudinais em barras, assim como na experimentação destes fenómenos por meio de vibrómetros de "laser-doppler". Em especial, estes autores resolveram, com métodos de álgebra computacional, o problema clássico do impacto de uma barra tronco-cónica sobre o terreno rígido, efectuando a respectiva validação através da aplicação de técnicas numéricas (elementos finitos e elementos de contorno).

É interessante assinalar que Eberhard, Hu e Schiehlen (2000) afirmam textualmente que *"para uma barra cónica de comprimento finito, em que a reflexão de ondas deve ser considerada, não é do nosso conhecimento que existam resultados analíticos para a propagação de ondas"*.

O presente artigo pretende contribuir para uma solução dessa lacuna, ao mesmo tempo que sugere um método novo de ensaio de materiais frágeis (como betão e rochas) para determinar a sua resistência à tracção dinâmica.

## 2 – DESCRIÇÃO DO PROBLEMA

Considere-se uma barra cónica de secção circular formada por um material tipo CHILE (contínuo, homogéneo, isotrópico e linear elástico), e suspenso por dois fios de uma estrutura rígida (Fig. 1).

A forma geométrica da barra é caracterizada por um comprimento  $L$  e um ângulo no vértice  $\Omega$ , sendo o raio da base circular evidentemente dado por:

$$R_c = L \cdot \operatorname{tg} \frac{\Omega}{2} \quad (1)$$

As propriedades elásticas dinâmicas do material que constitui a barra são o módulo de Young  $E$ , o coeficiente de Poisson  $\nu$ , as velocidades de propagação das ondas longitudinais  $C_p$  e transversais  $C_s$ , além da massa volumica  $\rho$ .

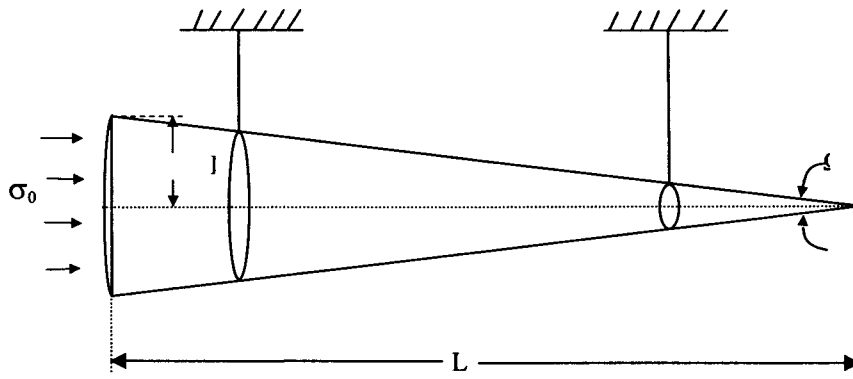


Fig. 1 – Representação esquemática de uma barra cónica suspensa e submetida a impacto longitudinal.

Supondo que a base do cone recebe um impacto que lhe transmite uma tensão dinâmica  $\sigma_0$ , procurar-se-á analisar a propagação dessa perturbação através do corpo cónico, sendo necessário adoptar um conjunto de aproximações, seguidamente enumeradas.

Consideram-se planas as secções transversais perpendiculares ao eixo de simetria do cone, assim se mantendo durante a passagem do impulso.

Admite-se que a tensão dinâmica incidente sobre qualquer secção transversal é uniforme.

Supõe-se ainda que a velocidade de propagação da onda incidente ao longo do cone é constante (e igual a  $C_p$ , que é uma propriedade característica do material que o constitui).

Também a forma da onda não se altera com a distância percorrida, ou seja, não se considera o fenómeno de dispersão durante a referida propagação<sup>(\*)</sup>, nem a atenuação<sup>(\*\*)</sup> da tensão associada à frente de onda, dada a reduzida trajectória que lhes permite o corpo de geometria cónica.

Assume-se ainda que a barra cónica não sofre vibrações transversais nem flexurais mas apenas longitudinais, em consequência do impulso recebido.

A natureza deste impacto deve garantir uma axialidade perfeita com a barra cónica, podendo ser aplicada de diversas maneiras: por meio de choque com um pêndulo, ou o disparo de um fulminante, por choque de um sólido cilíndrico, etc.

Considerando a primeira hipótese, é possível estabelecer a ordem de grandeza da tensão aplicada ao cone, a partir do conhecimento da oscilação que sofre o pêndulo. Com efeito (ver Fig. 2) no momento do impacto a energia cinética do pêndulo iguala-se à energia potencial, de valor igual a :

$$U = G_1 r (\cos \beta - \cos \alpha) \quad (2)$$

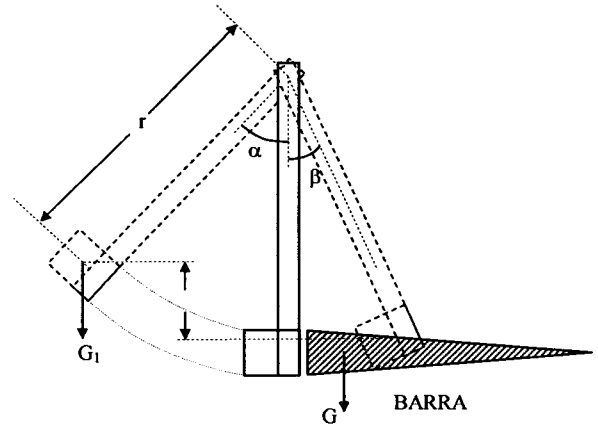


Fig. 2 – O impacto aplicado pelo pêndulo e os seus parâmetros (peso  $G_1$ , ângulo de queda  $\alpha$  e ângulo de subida  $\beta$ ) sobre uma barra cónica de peso  $G_2$ .

Em termos de tensões, é transmitida à barra cónica no momento do impacto uma velocidade de partícula igual a  $v$ , pelo que a tensão dinâmica correspondente será (Kolsky, 1963):

$$\sigma_0 = \rho C_p v \quad (3)$$

Para determinar  $v$ , utiliza-se a teoria do choque elástico entre dois sólidos, segundo a qual após o impacto ambos adquirem uma velocidade comum dada por:

<sup>(\*)</sup> Define-se *dispersão* como a mudança da forma de uma onda ao longo da sua propagação, pelo facto de as suas componentes de maior frequência possuírem maior velocidade que as de menor frequência.

<sup>(\*\*)</sup> Define-se *atenuação* como a redução da amplitude de um impulso ao propagar-se num sólido em face da distância percorrida ocasionar perdas de energia ondulatória, devidas aos seus mecanismos de atrito interno.

$$v = \frac{G_1 v_1 + G_2 v_2}{G_1 + G_2} \quad (4)$$

onde  $v_1$  e  $v_2$  são as velocidades iniciais dos dois corpos (neste caso  $v_2=0$ ) e  $G_1$  e  $G_2$  os respectivos pesos. A velocidade do pêndulo é determinada por:

$$v_1 = [2gr(\cos \beta - \cos \alpha)]^{0.5} \quad (5)$$

e assim a velocidade vibratória transmitida à barra será:

$$v = \frac{G_1 [2gr(\cos \beta - \cos \alpha)]^{0.5}}{G_1 + G_2} \quad (6)$$

Deste modo, a força total aplicada sobre a base do cone é, portanto:

$$F = \rho C_p v A \quad (7)$$

onde  $A$  é a respectiva área ( $A = \pi R_c^2$ ).

Os efeitos da propagação desse impulso sobre a barra cónica são analisados seguidamente.

### 3 – PROPAGAÇÃO DE ONDAS NA BARRA CÓNICA

Como qualquer corpo sólido que sofre a acção de uma solicitação súbita (ou de intensidade variável com o tempo) a barra cónica será percorrida por vibrações que transportam tensões dinâmicas.

Dada a simetria axial e supondo ser essa a direcção do impacto recebido, considera-se que as primeiras vibrações serão longitudinais, ou seja, com as partículas da barra a vibrarem na mesma direcção da propagação ondulatória.

De acordo com a teoria destas propagações, vão ocorrer reflexões sucessivas na superfície lateral da barra cónica, para as tensões dinâmicas que estão associadas aos raios de onda mais periféricos. Numa dada secção intermédia da barra, situada à distancia  $L_a$  da sua base (ver Fig. 3), onde se supõe estar a frente da onda incidente, a que corresponde uma secção de raio  $R_a$ , poder-se-á dividir o volume da barra em duas partes:

- o núcleo central da barra, onde se propaga o que resta da onda longitudinal, suposta com tensão igual a  $\sigma_0$  e que se designa por *zona cilíndrica de propagação*;
- a superfície lateral da barra, formada pela coroa circular de área  $\pi (R_c^2 - R_a^2)$  denominada *zona cónica de propagação*.

Na zona cónica assim definida ocorre o fenómeno da reflexão das ondas aí incidentes, o qual dá origem a duas ondas reflectidas, respectivamente uma longitudinal (RL) e outra transversal ou de corte

(RT). Face à geometria da barra cónica o ângulo de incidência é:

$$\alpha_1 = 90^\circ - \frac{\Omega}{2} \quad (8)$$

e os ângulos de reflexão são  $\alpha_2$  para RL e  $\beta$  para RT.

A relação entre estes ângulos é dada pela conhecida lei de Snell:

$$\frac{\sin \alpha_1}{C_p} = \frac{\sin \alpha_2}{C_p} = \frac{\sin \beta}{C_s} \quad (9)$$

sendo obviamente  $\alpha_1 = \alpha_2$  e o ângulo  $\beta$  dado por:

$$\beta = \arcsin \left( \frac{C_s}{C_p} \cos \frac{\Omega}{2} \right) \quad (10)$$

Por outro lado, relação entre as amplitudes das 3 ondas ( $A_1$  para incidente,  $A_2$  para RL e  $A_3$  para RT) é proveniente das duas equações (Kolsky, 1963):

$$2(A_1 - A_2) \cos \alpha \sin \beta - A_3 \cos 2\beta = 0 \quad (11)$$

$$(A_1 + A_2) \cos 2\beta \sin \alpha - A_3 \sin \beta \sin 2\beta = 0 \quad (12)$$

Eliminando  $A_3$  entre as duas, obtém-se a relação:

$$A_2 = A_1 \frac{2 \cos \alpha \sin^2 \beta \operatorname{tg} 2\beta - \sin \alpha \cos 2\beta}{2 \cos \alpha \sin^2 \beta \operatorname{tg} 2\beta + \sin \alpha \cos 2\beta} \quad (13)$$

envolvendo as tensões associadas à onda reflectida longitudinal  $A_2$  e a da onda incidente  $A_1$ .

A amplitude da onda reflectida transversal obtém-se também a partir da amplitude da onda incidente  $A_1$ , através da relação:

$$A_3 = \frac{2}{\frac{\cos 2\beta}{2 \cos \alpha \sin \beta} + \frac{\sin \beta \sin 2\beta}{\sin \alpha \cos 2\beta}} A_1 \quad (14)$$

Face à citada divisão de zonas (cilíndrica e cónica) atribui-se o seguinte valor à amplitude da onda incidente:

$$A_1 = \pi R^2 \sigma_0 \quad (15)$$

que integra toda a propagação até à distância  $L_a$  da base do cone.

A relação entre os dois raios é simplesmente:

$$R_a = R_c \frac{L - L_a}{L} \quad (16)$$

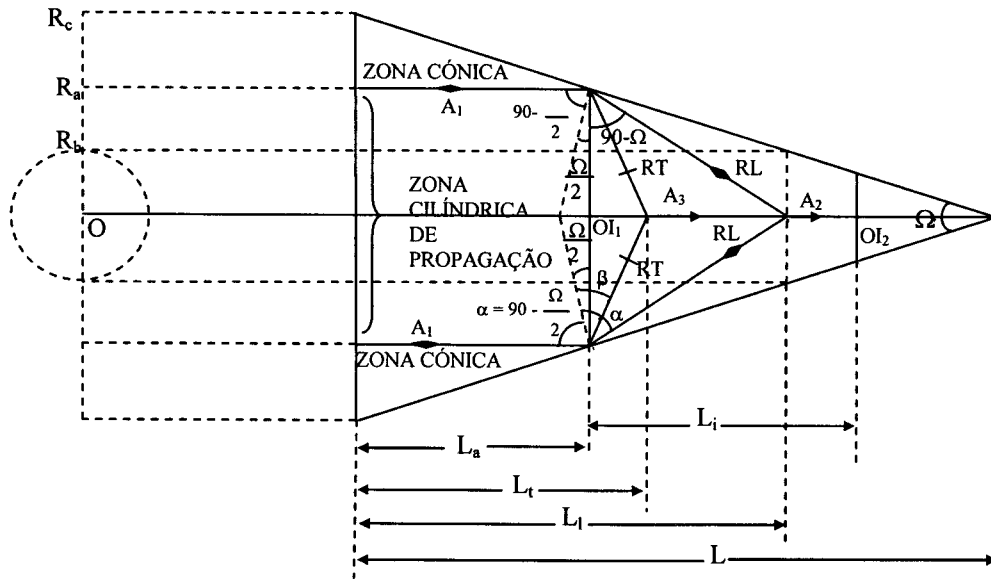


Fig. 3 – Situação correspondente à distância  $L_a$  da base de divisão da barra em duas zonas (a cilíndrica e a cônica).  
 $OI_1$  – Frente da onda incidente (amplitude  $A_1$ , no instante  $t_1$ )  
 $OI_2$  – Frente da onda incidente quando o raio RL atinge o eixo do cone (instante  $t_2$ )  
 $RL$  – Raio da onda reflectida longitudinal ( $A_2$ , no instante  $t_2$ )  
 $RT$  – Raio da onda reflectida transversal ( $A_3$ , no instante  $t_3$ )

$$t_2 = t_1 + \frac{L_i}{C_p}$$

Quanto às trajetórias das ondas reflectidas, elas convergem em pontos diferentes situados sobre o eixo de simetria do cone. Por relações trigonométricas simples determina-se (ver Fig. 3) que a onda reflectida longitudinal converge para a distância:

$$L_1 = L_a + R_a \cotg \Omega \quad (17)$$

e a onda reflectida transversal para:

$$L_1 = L_a + R_a \tg \left( \beta - \frac{\Omega}{2} \right) \quad (18)$$

Entretanto, a onda incidente que continua a propagar-se no núcleo central da barra possui uma frente mais adiantada do que a RL, a uma distância desta dada por:

$$L_i = \frac{L_1 - L_a}{\cos \Omega} = \frac{R_a}{\sin \Omega} \quad (19)$$

Para além das posições relativas das frentes de ondas, interessa também determinar as respectivas separações em função do tempo.

Assim, supondo que o impacto inicial na base da barra cônica ocorreu no instante  $t_0$ , a frente de onda longitudinal atinge a distância  $L_a$  no instante:

$$t_1 = t_0 + \frac{L_a}{C_p} \quad (20)$$

Após fenómenos de reflexão, a onda RL atinge o eixo do cone no instante:

$$t_2 = t_1 + \frac{L_i}{C_p} \quad (21)$$

por se propagar à mesma velocidade de onda incidente, embora na barra esteja atrasada do factor  $\cos \Omega$ .

Já a onda RT, por se propagar à velocidade  $C_s < C_p$ , chegará ao eixo de simetria no instante:

$$t_3 = t_1 + \frac{\sin \Omega}{\cos \left( \beta - \frac{\Omega}{2} \right) C_s} \cdot L_i \quad (22)$$

A Figura 4 esquematiza as posições relativas das frentes de onda.

A importância das posições relativas é essencial para a determinação das tensões resultantes ao longo da propagação ondulatória, assumindo particular importância a sobreposição entre a onda incidente (de compressão) e a RL (de tracção).

#### 4 – TENSÕES DINÂMICAS NA BARRA

De acordo com a já referida separação de propagações na barra cónica, admite-se que no núcleo central se desloca a onda longitudinal incidente e após ela as ondas reflectidas (longitudinal e transversal) provenientes da zona cónica periférica da barra.

Devido á geometria cónica do corpo, a onda incidente central vai diminuindo de intensidade á medida que se aproxima do vértice do cone. Em contrapartida, as ondas reflectidas aumentam de importância com a propagação, atingindo valores máximos junto do referido vértice.

As energias associadas às duas propagações reproduzem a energia inicial recebida pelo impacto na base do cone. Com efeito, considerando a amplitude da onda incidente:

$$A_i = \pi R_a^2 \sigma_0 \quad (23)$$

e a da onda da zona cónica:

$$A_c = \pi (R_c^2 - R_a^2) \sigma_0 \quad (24)$$

as suas variações ao longo do eixo do cone dispõem-se de acordo com a representação que consta da Figura 5.

Através da mesma verifica-se que a onda incidente de compressão se extingue ao atingir o vértice do cone.

A condição de igualdade das energias é dada por:

$$\pi (R_c^2 - R^2) = \pi R^2 \quad (25)$$

ou seja, para um raio da barra cónica de:

$$R = \frac{R_c}{\sqrt{2}} \quad (26)$$

correspondente a uma distância à base do cone de:

$$L_0 = \frac{R_c}{\sqrt{2}} \cotg \frac{\Omega}{2} \quad (27)$$

Em termos de tensões dinâmicas, a sobreposição permite determinar o somatório entre a tensão de compressão associada à onda incidente e as tensões associadas às duas ondas reflectidas que lhe sucedem no tempo e no espaço.

Para tal é necessário determinar as respectivas amplitudes  $A_2$  e  $A_3$ , em especial  $A_2$  (da onda RL) por transportar tracções. Já a onda reflectida transversal (RT) não é directamente sobreponível à onda incidente, por se propagar mais atrasada no tempo, e para tal é necessário determinar as respectivas amplitudes  $A_2$  e  $A_3$ , em especial  $A_2$  (da onda RL) por transportar tracções. Já a onda reflectida transversal (RT) não é directamente sobreponível à onda incidente, por se propagar mais atrasada no tempo e no espaço, além de ocasionar vibrações transversais distintas das longitudinais que caracterizam as outras duas ondas.

DISTÂNCIAS:

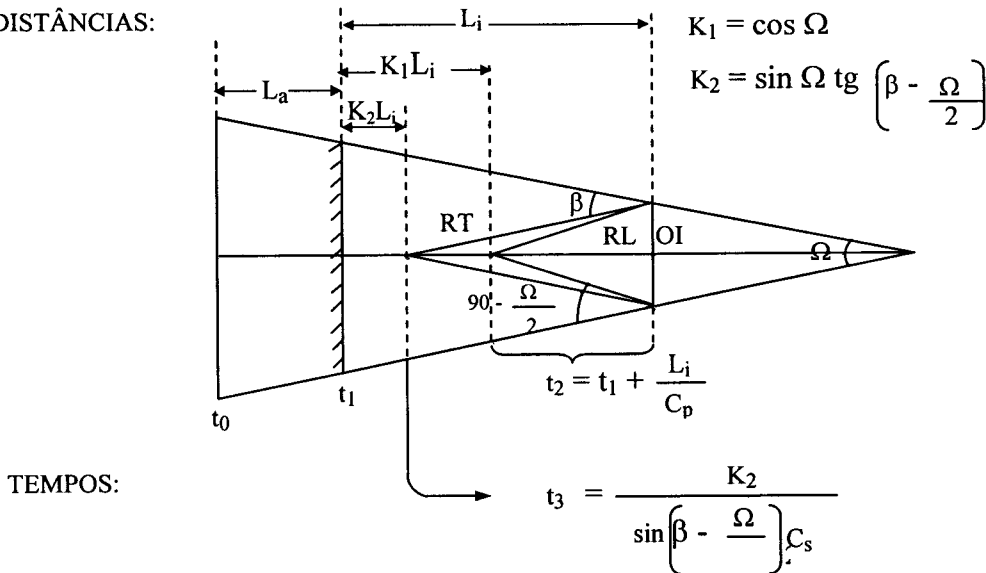


Fig. 4 - Distâncias percorridas e tempos de trajecto das várias frentes de ondas que se propagam na barra cónica (OI – onda incidente, RL – onda reflectida longitudinal e RT – onda reflectida transversal).

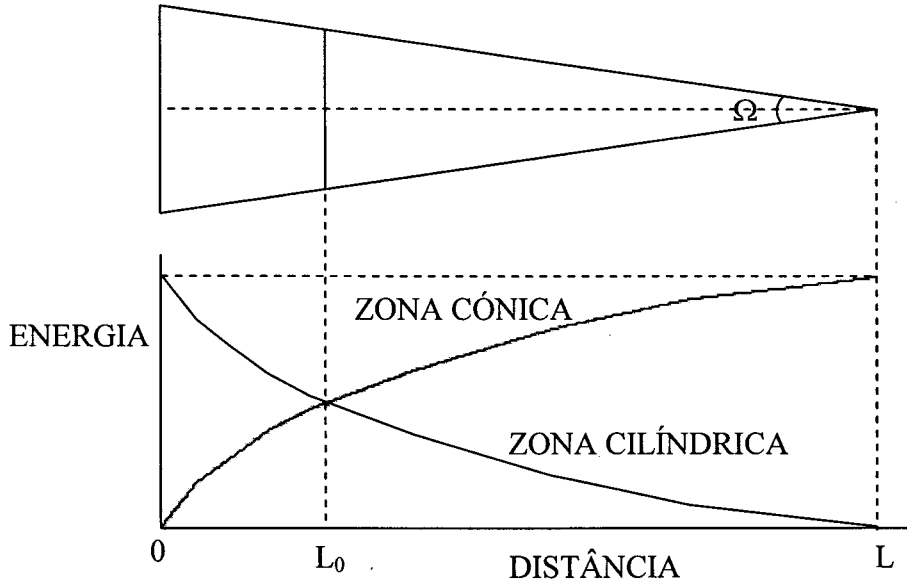


Fig. 5 – Variação das energias associadas à propagação, segundo a divisão da barra em zona cilíndrica e zona cónica.

Assim, expressando de forma mais simples as amplitudes em função de  $A_1$ , tem-se:

$$A_2 = k_2 A_1 \quad (28)$$

$$A_3 = k_3 A_1 \quad (29)$$

As grandezas  $k_2$  e  $k_3$  incluem o ângulo de reflexão da onda transversal,  $\beta$ , que, como foi referido, é dado por:

$$\beta = \arcsin\left(\frac{C_s}{C_p} \cos \frac{\Omega}{2}\right) \quad (30)$$

O quociente entre as velocidades das ondas S e P é obtido (Kolsky, 1963) a partir do coeficiente de Poisson  $\nu$ , por:

$$\beta = \arcsin\left(\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (31)$$

Nestas condições, apresenta-se na Figura 6 as variações das amplitudes das ondas reflectidas com o coeficiente de Poisson do material da barra e para várias geometrias do cone, dadas pelo seu ângulo no vértice.

O gráfico da Figura 6 permite extrair importantes conclusões, que se podem resumir nos pontos seguintes.

- As ondas reflectidas pela superfície lateral da barra cónica dependem consideravelmente da forma geométrica desta ( $\Omega$ ) e do coeficiente de Poisson  $\nu$  do material que a constitui.

- Enquanto que as amplitudes da onda reflectida transversal não mudam de sinal, as de onda reflectida longitudinal podem transportar compressões ou tracções, conforme os valores de  $\Omega$  e  $\nu$ .
- As tracções associadas à onda RL ocorrem para valores elevados do coeficiente de Poisson (geralmente para  $\nu > 0,25$ ), embora possam gerar-se para valores menores que esse, quando o ângulo do vértice do cone assume valores pequenos (inferiores a  $10^\circ$ ).
- Para fins de experimentação destinados a determinar a resistência à tracção dinâmica de materiais sólidos, é conveniente preparar provetes cónicos com reduzidos valores do ângulo no vértice, devendo ser previamente conhecido o respectivo coeficiente de Poisson.

Na mesma linha de interpretação do fenómeno é interessante determinar os valores da tensão resultante que actua no eixo de simetria da barra cónica, tensão essa que resulta da sobreposição da componente incidente que percorre o núcleo central da peça e a componente reflectida longitudinal.

Esta sobreposição depende fundamentalmente das duas variáveis já citadas (o ângulo no vértice do cone e o coeficiente de Poisson).

Graficamente essa variação é apresentada na Figura 7, através de quatro diagramas (um para cada valor do coeficiente de Poisson) que traduzem a propagação das ondas através da barra (eixo das abcissas) e a tensão resultante (de compressão ou tracção), para diversos valores do ângulo no vértice.

Verificam-se conclusões similares às já referidas a propósito da Figura 6, assinalando as combinações de variáveis que poderão conduzir o corpo à rotura por tracção.

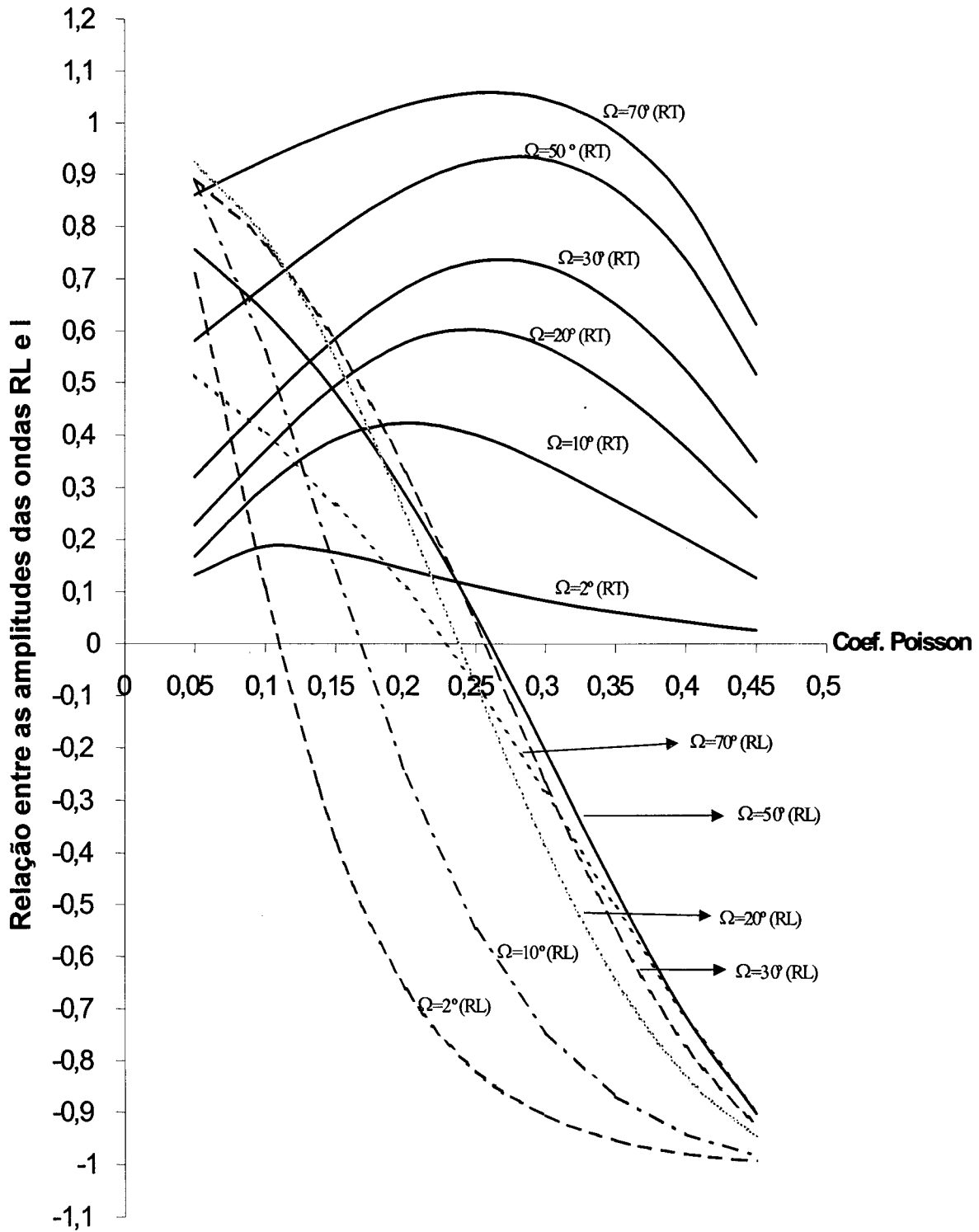


Fig. 6 – Variação da relação entre as amplitudes das ondas reflectida longitudinal (RL) e reflectida transversal (RT) com a amplitude da onda incidente (I)', para vários coeficientes de Poisson do material que constitui a barra e ângulos no vértice do cone,  $\Omega$ .



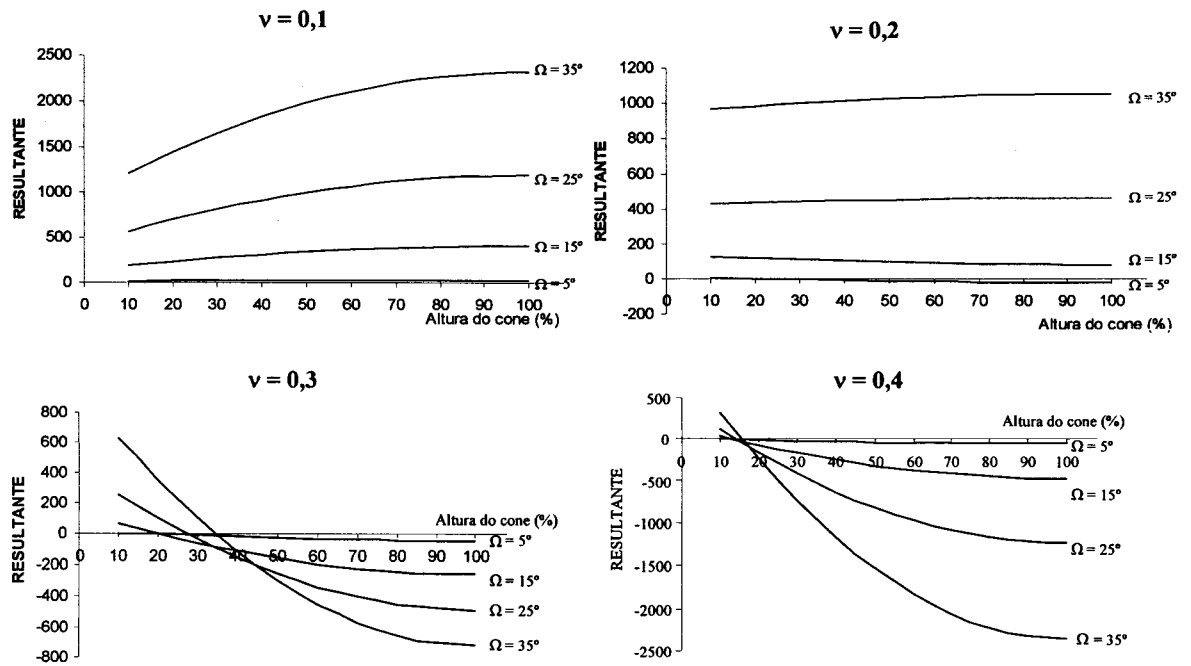


Fig. 7 – Representação gráfica dos valores da tensão resultante sobre o eixo da barra cónica com a distância percorrida, para quatro coeficientes de Poisson e vários ângulos no vértice.

## 5 – APLICAÇÃO À DETERMINAÇÃO DA RESISTÊNCIA À TRACÇÃO DINÂMICA

Uma vez preparados exemplares cónicos do material que se pretende ensaiar e submetendo-os à aplicação de um impacto, conforme indicado na Figura 2, obtêm-se fragmentos cónicos que se destacam da zona próxima do vértice (ver fotografias da Figura 8).

Após cada ensaio devem ser registados os valores da energia de impacto inicial e as dimensões da barra cónica e do fragmento destacado (sua altura e seu diâmetro). O coeficiente de Poisson do material deve ser determinado, de preferência por métodos dinâmicos (ultra-sons, por exemplo), ou, em alternativa, ser conhecida a relação entre as velocidades de propagação das ondas S e P, para o material sob ensaio.

A Figura 9 mostra as distâncias relativas e dimensões dos componentes da barra cónica que permitem calcular a resistência dinâmica procurada.

A marcha de cálculo envolve os seguintes passos:

- Determinar a distância entre o plano da fractura e a frente de onda incidente que provocou a onda reflectida longitudinal responsável pela rotura.

Essa distância corresponde ao segmento  $L_1 - L_a$  representado na Figura 3 e é fornecida pela seguinte relação:

$$L_1 - L_a = R_a \cotg \Omega \quad (32)$$

Como, por outro lado, o raio  $R_a$  da secção circular do cone à distância  $L_a$  é dado por

$$R_a = (L - L_a) \tg \frac{\Omega}{2} \quad (33)$$

substituindo na primeira expressão e simplificando obtém-se :

$$L_a = \frac{2L_1 - L \left( 1 - \tg^2 \frac{\Omega}{2} \right)}{1 + \tg^2 \frac{\Omega}{2}} \quad (34)$$

Uma vez determinado  $L_a$  calcula-se  $R_a$  pela segunda expressão acima, ficando assim a conhecer-se as dimensões das zonas cilíndrica e cónica que originaram a rotura observada.

- Em seguida determinam-se as solicitações dinâmicas actuates, começando pelo impacto inicial:

$$\sigma_0 = \rho C_p \frac{G_1 [2gr(\cos \beta - \cos \alpha)]^{0.5}}{G_1 + G_2} \quad (35)$$

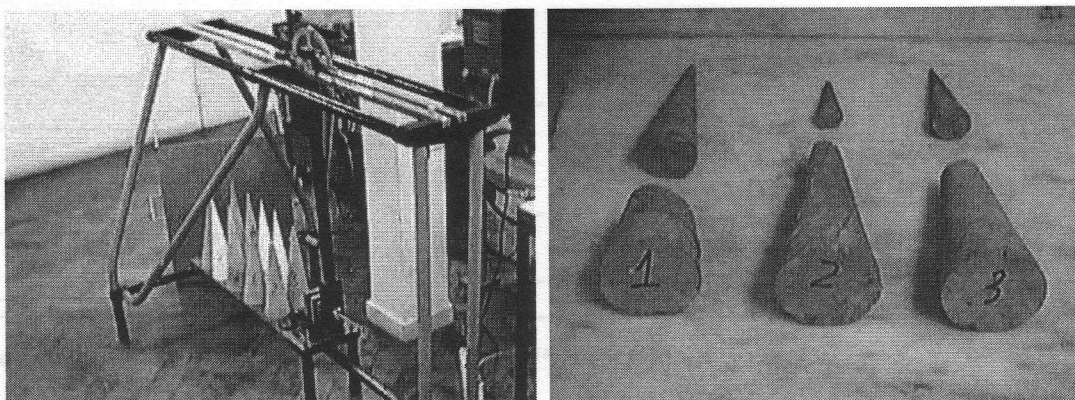


Fig. 8 – Sistema de pêndulo para aplicação de cargas dinâmicas e exemplos de fracturas obtidas em barras cónicas.

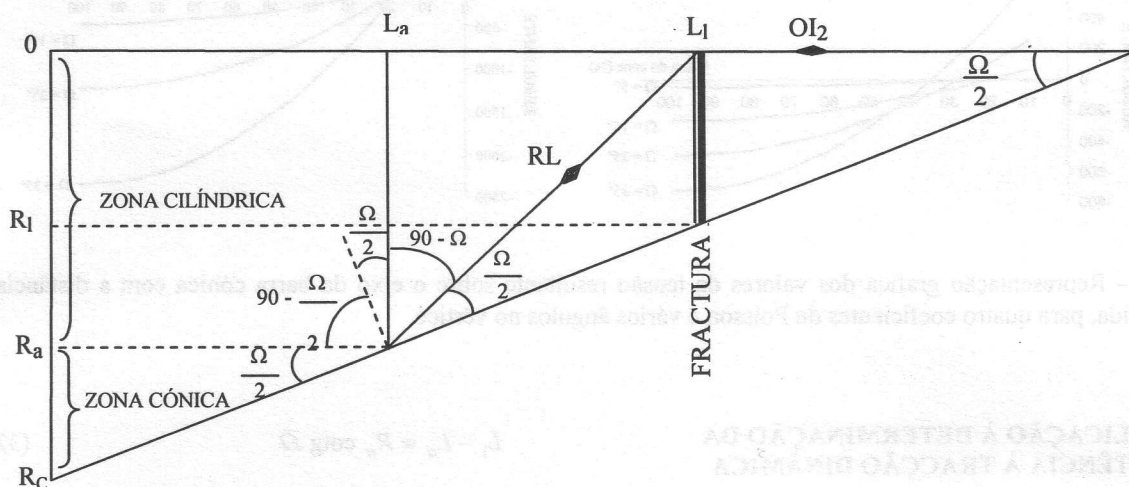


Fig. 9 – Meia secção longitudinal da barra cónica com os parâmetros geométricos que permitem calcular  $L_a$  e  $R_a$  partindo dos valores medidos de  $L_1$  e  $R_1$ .

que ocasiona à distância  $L_a$  da base do cone duas forças de valores, respectivamente:

$$F_c = \pi(R_c^2 - R_a^2)\sigma_0 \quad (36)$$

para a zona cónica e

$$F_n = \pi R_a^2 \sigma_0 \quad (37)$$

para a zona cilíndrica.

- c) Segue-se o cálculo da força associada à onda reflectida longitudinal que se processa a partir da relação já apresentada anteriormente:

$$F_r = F_c \frac{2 \sin \frac{\Omega}{2} \sin^2 \beta \operatorname{tg} 2 \beta - \cos \frac{\Omega}{2} \cos 2 \beta}{2 \sin \frac{\Omega}{2} \sin^2 \beta \operatorname{tg} 2 \beta + \cos \frac{\Omega}{2} \cos 2 \beta} \quad (38)$$

sendo o ângulo de reflexão de onda transversal dado por:

$$\beta = \arcsin \left( \frac{C_s}{C_p} \cos \frac{\Omega}{2} \right) \quad (39)$$

Assinale-se que na maioria dos casos  $F_r$  possui sinal negativo, correspondente a uma solicitação de tracção dinâmica.

- d) Finalmente, determina-se a tensão de rotura dinâmica à tracção, através do quociente entre a força resultante que actuava sobre a secção onde ocorreu a fractura (raio  $R_1$ ), isto é:

$$A_1 = \pi R_1^2 \quad (40)$$

o qual é um valor mensurável.

Quando à força resultante, considera-se igual à sobreposição da referida amplitude  $F_r$  com a amplitude da onda incidente nesse ponto, que possui o valor:

$$F_i = A_1 \sigma_0 \quad (41)$$

Logo, a tensão de rotura procurada será:

$$\sigma_t = \frac{|F_r| - F_i}{A_1} \quad (42)$$

#### Exemplo de aplicação

A marcha de cálculo correspondente a um exemplo concreto em que se submeteu uma barra cónica de pasta de cimento com as seguintes dimensões:

- Altura do cone: 31 cm
- Diâmetro da base: 8 cm

Deduz-se que o ângulo no vértice do cone vale  $\Omega=14,7^\circ$  e o seu peso de 12,21 N, usando uma massa volúmica de 2.400 kg/m<sup>3</sup>.

Depois da instalação do eixo do cone na posição horizontal, a sua base foi submetida ao impacto de um pêndulo com 68,41 N de peso e comprimento de 0,794 m, o qual oscilou a partir de um ângulo de queda de  $20^\circ$  e um de subida de  $14^\circ$ .

A energia assim aplicada sobre a base do cone imprimiu uma tensão dinâmica inicial de:

$$\sigma_0 = 4,49 \text{ MPa}$$

considerando que o material possuía uma velocidade de propagação das ondas longitudinais de 3200 m/s e um coeficiente de Poisson igual a 0.25. Foi medido o

diâmetro da base do fragmento obtido, tendo resultado 2,3 cm.

Segue-se o cálculo das variáveis mais importantes do método, pelas expressões acima referidas, fornecendo:

$$k_2 = -0,197$$

$$R_a = 2,26 \text{ cm}$$

conduzindo assim a uma resistência dinâmica à rotura por tracção do material ensaiado igual a  $-2,80 \text{ MPa}$ .

## 6 – PROPAGAÇÃO ONDULATÓRIA E ROTURA EM TRONCOS DE CONE

Utilizando o método anteriormente descrito é possível extrapolá-lo para a solução do problema da transmissão de vibrações longitudinais em corpos sólidos de geometria tronco-cónica. Com efeito, se na base maior de uma barra com essa forma for aplicado um impacto que lhe transmita uma tensão inicial  $\sigma_0$ , propagar-se-á uma onda incidente compressiva longitudinal no núcleo central do corpo, ao mesmo tempo que ondas reflectidas de vibração longitudinal e transversal vão sendo geradas na periferia (ver Figura 10).

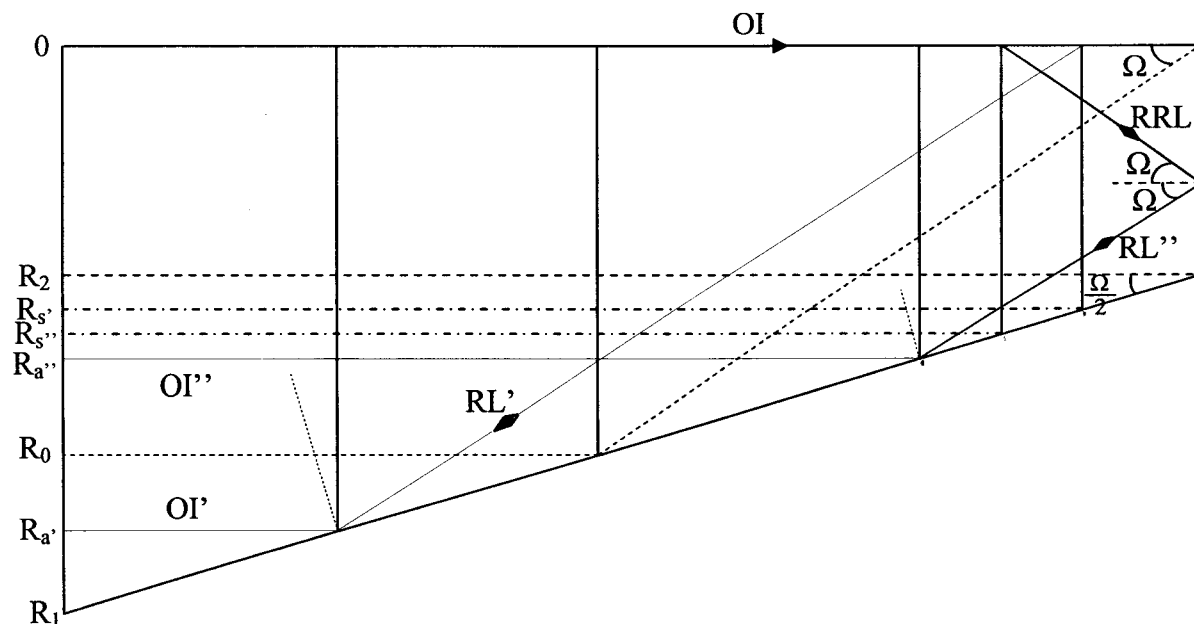


Fig. 10 – Esquema da propagação ondulatória em barra tronco-cónica mostrando a secção de raio  $R_0$  que separa ondas incidentes que produzem ondas reflectidas longitudinais simples (RL') e bi-reflectadas (RRL).

As principais diferenças relativamente à propagação em barras cónicas são em seguida mencionadas.

- a) A onda incidente atinge a extremidade oposta da barra, supondo-se com orientação perpendicular a esta, não se extinguindo mas

sim dando origem a uma onda reflectida de sinal contrário (tracção, portanto) se a extremidade estiver livre. Esta última onda propaga-se de volta à base maior, atingindo-a  $2L/c$  segundos após o impacto original.

- b) As ondas reflectidas pela parede lateral do cone percorrem um trajecto mais longo do que nos cones simples, podendo sobrepor-se à onda incidente, quer no seu percurso de ida, quer no retorno à origem.
- c) Em determinadas circunstâncias, as ondas reflectidas podem sofrer uma segunda reflexão na superfície livre correspondente à base menor da barra, proporcionando sobreposições mais complexas na região central do sólido.
- d) Não obstante, é possível estabelecer as ordens de grandeza das tensões dinâmicas resultantes, com especial destaque para as suas componentes de tracção, pelo facto destas se associarem geralmente a fenómenos de rotura.

Vejamos em seguida as citadas sobreposições, admitindo que a posição de partida das ondas reflectidas (raio  $R_a$ ) pode assumir duas situações distintas: quando  $R_a > R_0$  ou quando for  $R_a < R_0$ , em que  $R_0$  representa o raio da secção transversal da barra em que a onda reflectida longitudinal atinge o centro da base menor da barra (ver Figura 10). Assim se separam os casos em que só ocorre uma reflexão, daqueles caracterizados por reflexões duplas.

De acordo com os símbolos da figura, demonstra-se que

$$R_0 = \frac{L \cdot \tan \Omega / 2 - R_1}{\cot g \Omega \cdot \tan \Omega / 2 - 1} \quad (43)$$

resultando para o raio da secção transversal em que a onda longitudinal reflectida alcança o eixo de simetria da barra, os seguintes valores:

- no caso :  $R_a > R_0$  :

$$R_{s'} = R_a (1 - \cot g \Omega \cdot \tan \Omega / 2) \quad (44)$$

- no caso :  $R_a < R_0$  :

$$R_{s'} = R_2 + \frac{(R_1 - R_2)(L_a - L + R_a / \tan \Omega)}{L} \quad (45)$$

No primeiro deste casos, considera-se que a sobreposição de ondas que ocorre será formada pela resultante da reflexão da onda incidente OI na extremidade livre de raio criando uma solicitação de tracção com o valor:

$$F_n = -\pi R_2^2 \cdot \sigma_0 \quad (46)$$

a que se soma a intensidade da onda reflectida longitudinal RL' :

$$F'_c = k' \pi (R_1^2 - R_a^2) \quad (47)$$

onde  $k'$  representa a relação entre amplitudes já enunciada a propósito das barras cónicas (coeficiente  $k_2$ ).

No segundo caso, mantém-se o valor de  $F_n$  e a segunda parcela será formada pela onda que se reflecte na base menor do tronco de cone, produzindo a onda RRL que transporta uma intensidade:

$$F''_c = -k'' \pi (R_1^2 - R_a^2) \sigma_0 \quad (48)$$

em que  $k''$  traduz a relação de amplitudes entre RL'' e RRL, cujos ângulos de incidência e de reflexão são iguais a  $\Omega$ , pelo que essa relação é dada por:

$$k'' = \frac{2 \cos \Omega \cdot \sin^2 \delta \cdot \sin 2\delta - \sin \Omega \cdot \cos^2 2\delta}{2 \cos \Omega \cdot \sin^2 \delta \cdot \sin 2\delta + \sin \Omega \cdot \cos^2 2\delta} \quad (49)$$

onde  $\delta$  é o ângulo de reflexão da onda transversal gerada sobre a extremidade da barra, cujo valor provem da lei de Snell:

$$\delta = \arcsin \left( \frac{C_s}{C_p} \cdot \sin \Omega \right) \quad (50)$$

Em geral, a tensão transportada pela onda RL'' é de sinal contrário à que possui RRL.

Nestas condições, a resultante das três ondas (OI reflectida, RL' e RRL) depende da grandeza do ângulo de conicidade da barra e também do coeficiente de Poisson. A sua variação está ilustrada na Figura 11.

Finalmente, resta aplicar os testes de propagação de ondas de tensão em barras tronco-cónicas à determinação da resistência à tracção dinâmica do material que constitui a barra.

Uma vez submetida a barra à acção do impacto de um pêndulo na sua base maior, registam-se os valores dos pesos do pêndulo e da barra, assim como os seus ângulos de queda e de subida. Ao ser atingida a rotura de um dado fragmento da barra, mede-se o diâmetro da sua base, que representa  $2 R_s$  (ver Figura 10). Haverá que determinar então qual das duas situações de reflexão provocou tal rotura e, para isso, calcula-se sucessivamente  $R_0$ ,  $R_a'$  e  $R_a''$  a fim de estabelecer qual das desigualdades ( $R_0 < R_a$  ou  $R_0 > R_a$ ) é coerente.

Uma vez tirada esta dúvida, prossegue-se com a obtenção dos valores de  $k'$  e  $k''$ , e consequentemente com a tensão resultante da sobreposição da onda longitudinal que se reflectiu na base menor da barra, com a onda reflectida lateralmente (RL'' ou RRL, conforme os casos), que

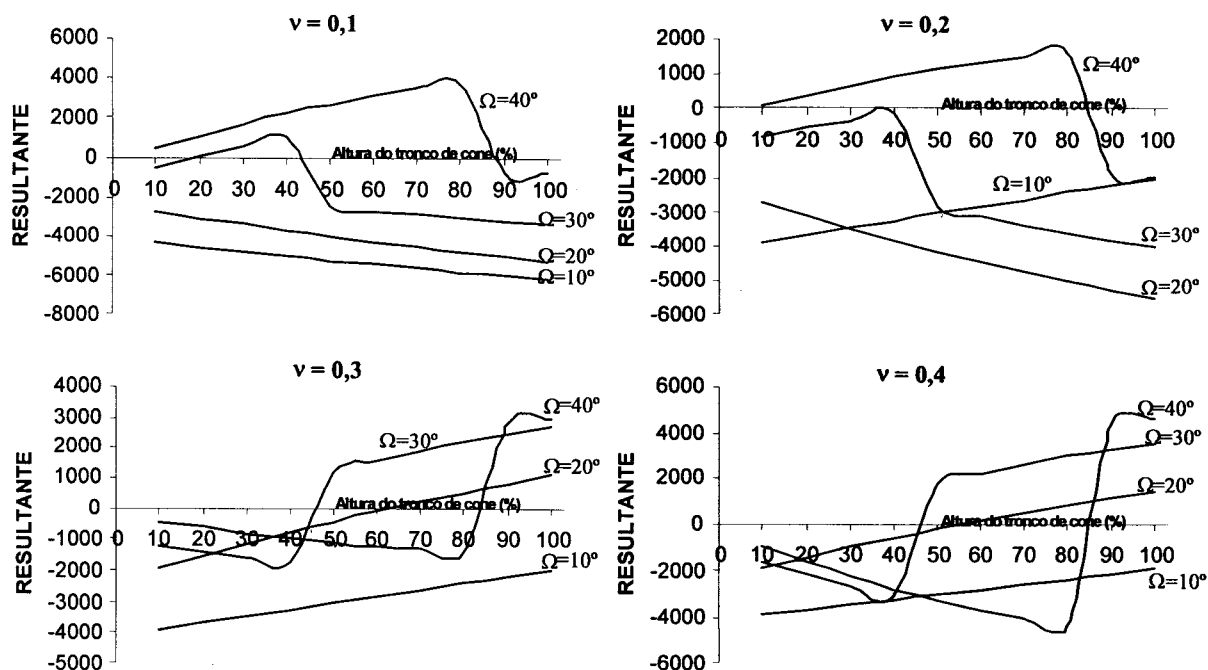


Fig. 11 – Variação dos valores da tensão resultante sobre o eixo da barra tronco-cônica com a distância percorrida pelas ondas, para quatro coeficientes de Poisson e vários ângulos da superfície cônica.

representa a resistência à tracção dinâmica do material constituinte da barra.

Um exemplo numérico possui os seguintes valores, com os símbolos constantes da Figura 10:

Barra:  $L = 24,4$  cm;  $R_1 = 4$  cm;  $R_2 = 0,85$  cm

Pêndulo:  $G_1 = 68,41$  N;  $r = 79,4$  cm;  $\alpha = 35^\circ$ ;  $\beta = 23,5^\circ$

Material:  $\rho = 2400$  kg/m<sup>3</sup>;  $C_p = 3200$  m/s;  $\nu = 0,25$

Dimensões do fragmento:  $R_s = 1,88$  cm

Os principais resultados do cálculo são:

$R_0 = 1,67$  cm;  $R_a = 3,69$  cm;  $\sigma_0 = 8,05$  MPa;  $k' = -0,197$ ;

$k'' = -0,901$

Tensão de rotura à tracção dinâmica:  $-2,69$  MPa.

## 7 - CONCLUSÕES

Utilizando certas aproximações que se consideram aceitáveis à escala laboratorial, desenvolveu-se um método de análise das tensões dinâmicas geradas no interior de barras cónicas e tronco-cónicas que sofrem um impacto na sua base. Essas tensões em cada instante seriam o resultado da sobreposição de uma onda longitudinal que se propaga no núcleo central da barra, com as tensões associadas às ondas reflectidas (longitudinal e transversal) geradas ao longo da sua superfície cônica lateral.

Considerando apenas a onda reflectida longitudinal que em determinadas circunstâncias transporta tensões de tracção, verifica-se que as tensões resultantes da sua soma com a amplitude da onda incidente compressiva, podem ultrapassar a

resistência à tracção do material que constitui a barra, servindo assim como técnica de ensaio para uma propriedade ainda pouco conhecida dos corpos sólidos e que ainda parece não ser objecto de qualquer norma de ensaio.

Identificaram-se as principais características dos provetes a submeter a este ensaio, como a sua geometria (definida pelo ângulo no vértice do cone) e a sua constituição (nomeadamente o seu coeficiente de Poisson), os quais devem ser previamente estabelecidos para que os testes sejam conclusivos.

Através de exemplos de aplicação do método ilustrou-se a sua facilidade operacional e as suas potencialidades.

## 8 - REFERÊNCIAS

- Abrate, S. (1995). *Vibration of Non-uniform Rods and Beams*. J. of Sound and Vibration. Vol. 185, pp. 703-716.
- Barr, A.D.S. (1962). *Torsional Waves in Uniform Rods of Non-circular Section*. J. Mechanical Engineering Science, Vol. 4, pp. 127-135.
- Bell, J.F. (1873). *The Experimental Foundations of Solid Mechanics*. Springer Verlag, Berlin.
- Davies, E. D. H. e Hunter, S. C. (1963). *The Dynamic Compression Testing of Solids by the Method of the Split Hopkinson Pressure Bar*. J. Mechanics Physics of Solids, Vol. 11, pp. 155-179.

- Eberhard, P.; Hu, B. e Schiehlen, W. (2000) *Longitudinal Wave Propagation in Conical Rods Subject to Impacts. Multifield Problems, State of the Art*. pp. 246-253. Springer, Berlin.
- Gaines, J. H. e Volterra, E. (1966) *Upper and Lower Bounds of Frequencies for Cantilever Bars of Variable Section*. J. Applied Mechanics, Vol. 33, pp. 948-950.
- Graff, K. F. (1975) *Wave Motion in Elastic Solids*. Oxford Press: Clarendon.
- Hillig, W. B. (1985) *Response of Polycarbonate, Polymethylmethacrylate and Epoxy Resins to Dynamic Contact*. Polymer Engineering Science, Vol.25, pp. 339-347.
- Hopkinson, B. (1914) *A Method for Measuring the Pressure Produced in the Detonation of High Explosives or by the Impact of Bullets*. Phil. Transactions Royal Society, London, A213, pp. 437-456.
- Hu, B.; Eberhard, P. e Schiehlen, W. (2001) *Symbolical Impact Analysis for a Falling Conical Rod against the Rigid Ground*. Journal of Sound and Vibration, vol. 240(1), pp. 41-57.
- Kolsky, H. (1963) *Stress Waves in Solids*. Dover Publications, New York.
- Meek, J. W. e Wolf, J. P. (1962) *Cone Models for Homogeneous Soil (part I), Cone Models for Rigid Rock (part II)*. Journal of Geotechnical Engineering, ASCE, Vol.118, No.5, pp. 667-703.
- Morse, R. W. (1948) *Dispersion of Compressional Waves in Isotropic Bars of Rectangular Cross Section*. J. Acoustical Society of America, Vol.20, pp.833-838.
- Pochhammer, L. (1876) *Über Fortpflanzungsgeschwindigkeiten Kleiner Schwingungen in einen Unbegrenzten Isotropen Keiszylinder*. J. Reine Angew. Math, 81, pp. 324-336.
- Zhao, H. e Gary, G. (1995) *A Three Dimensional Analytical Solution of the Longitudinal Wave Propagation in an Infinite Linear Viscoelastic Cylindrical Bar: Application to Experimental Techniques*. J. Mechanics Physics of Solids, Vol. 43, pp. 1335-1348.