

SIMULAÇÃO NUMÉRICA DOS PROCESSOS DE CONSOLIDAÇÃO EM ATERROS SOBRE SOLOS MOLES

Numerical simulation of the consolidation processes in embankments on soft soils

JOSÉ LEITÃO BORGES*
ANTÓNIO SILVA CARDOSO**

RESUMO - Tendo por base uma generalização da teoria multidimensional de Biot, descrevem-se os aspectos matemáticos e numéricos dos processos de consolidação em meios porosos deformáveis saturados. Usando esta formulação, apresentam-se e analisam-se os resultados de aplicação dum modelo numérico bidimensional baseado no método de elementos finitos a uma obra de aterro sobre solos moles.

SYNOPSIS - Based on a generalisation of Biot's multi-dimensional theory, mathematical and numerical consolidation processes in saturated and deforming porous media are described. Using this formulation, it is presented and analysed the application results of a numerical method based on finite element method on an embankment on soft soils.

1 - PREÂMBULO

Quando se aplica uma acção a uma massa de solo saturado, a distribuição de pressões neutras resultante possui, em geral, gradientes que determinam a existência de um campo de velocidades relativas entre diferentes zonas do maciço. Estabelecem-se pois condições iniciais de um processo transitório de escoamento, ao qual estão associadas transferências de carga da água (pressões neutras) para o esqueleto sólido (tensões efectivas); até se atingir um regime permanente, o comportamento da massa do solo é condicionado pela variação dos campos de tensões (totais, efectivas e neutras), de deformações e de deslocamentos. A teoria matemática que descreve a dissipação dos excessos de pressões neutras (positivos ou negativos) e a deformação do solo que lhe está associada é designada, em geral, por teoria da consolidação.

O estudo dos fenómenos de consolidação - que se reveste de particular importância em solos muito compressíveis e de baixa permeabilidade, como é o caso dos solos argilosos moles, já que, nestas circunstâncias, o tempo necessário para se atingir o regime permanente é, em regra, muito elevado - é um dos mais complexos em Geotecnia, uma vez que obriga à consideração da existência de interacção entre um líquido intersticial em escoamento variável, por um lado, e um esqueleto sólido experimentando sucessivos estados de deformação à medida que varia o campo de tensões efectivas, por outro. A complexidade física do fenómeno determina, naturalmente, a complexidade do problema matemático associado, o qual, na sua forma mais geral, pode ser resolvido pela integração no espaço e no tempo de um sistema de equações diferenciais não lineares.

A formulação da primeira teoria geral e coerente de consolidação multidimensional, tendo em conta a interdependência entre os fenómenos de deformação do esqueleto sólido e de

* Doutor em Engenharia Civil, Professor Auxiliar da FEUP

** Doutor em Engenharia Civil, Professor Associado da FEUP

escoamento do fluido intersticial (análise conjunta das equações de equilíbrio e de continuidade, tendo em conta as relações constitutivas formuladas em termos de tensões efectivas) deve-se a Biot (1935, 1941). Esta teoria, que foi desenvolvida inicialmente supondo o esqueleto sólido com comportamento elástico linear e isotrópico, foi aperfeiçoada posteriormente para outros tipos de comportamentos mais complexos, designadamente, a anisotropia e a viscosidade (Biot, 1955, 1956a e 1956b).

Depois do aparecimento da teoria multidimensional de Biot, muitos autores têm aplicado o método dos elementos finitos em análises numéricas dos problemas de consolidação utilizando formulações matemáticas em que algumas das condições iniciais de Biot são reformuladas e que correspondem assim a extensões matemáticas daquela teoria de consolidação.

Este artigo trata os seguintes aspectos: a) descrição dos aspectos matemáticos e numéricos dos processos de consolidação em meios porosos deformáveis saturados (trata-se de uma formulação que corresponde a uma generalização da teoria de consolidação multidimensional de Biot em que podem ser tidas em conta as seguintes extensões: i) comportamento não linear e fluência do esqueleto sólido; ii) compressibilidade do fluido e das partículas sólidas; iii) variação da permeabilidade no decurso da consolidação); b) apresentação e análise dos resultados de aplicação dum modelo numérico bidimensional baseado no método de elementos finitos a uma obra de aterro sobre solos moles reforçado na base com um geossintético, usando as considerações referidas em a). É de referir, no entanto, que algumas das extensões citadas não foram consideradas no modelo numérico bidimensional, por razões que serão justificadas no decurso deste artigo e que se prendem essencialmente com a influência desprezável desses aspectos nos resultados obtidos na simulação das obras em questão. A convenção de sinais utilizada corresponde à que normalmente se usa em Mecânica dos Solos, isto é, sinal positivo para tensões e deformações de compressão.

O modelo numérico foi desenvolvido admitindo a validade das condições associadas aos estados planos de deformação e de escoamento e incorpora diversos tipos de elementos finitos, o que permite simular separadamente todos os elementos componentes da estrutura: os solos de fundação, as camadas de aterro, os reforços e as interfaces entre estes e os solos envolventes.

Sinteticamente, este modelo possui as seguintes características (Borges, 1995): i) formulação acoplada das equações de equilíbrio e de escoamento considerando as relações constitutivas (modelos elastoplásticos) formuladas em termos de tensões efectivas (extensão da teoria de consolidação de Biot); esta formulação é aplicada em qualquer fase, quer durante a execução do aterro, quer no período pós-construção; ii) utilização do modelo de estado crítico (p, q, θ) na simulação do comportamento constitutivo dos solos de fundação e de aterro; iii) utilização de um modelo elastoplástico com endurecimento na simulação do comportamento "instantâneo" dos reforços; e iv) modelação do comportamento viscoso dos geossintéticos (relações constitutivas dependentes do tempo) usando um modelo reológico baseado na associação em série de unidades de Kelvin; v) simulação do comportamento constitutivo das interfaces solo-reforços através de um modelo elastoplástico com endurecimento.

Tendo presente, nas análises acopladas, o carácter incremental da integração no tempo das equações governativas (equações de equilíbrio e escoamento), utilizam-se no modelo somente técnicas incrementais. Assim, em cada cálculo (que corresponde à resolução do sistema de equações global que define o problema), está implícito um determinado intervalo de tempo (incremento de tempo) durante o qual se pode aplicar, ou não, uma determinada acção exterior (incremento de carga).

2 - PROCESSOS DE CONSOLIDAÇÃO EM MEIOS SATURADOS

2.1 - Equações diferenciais governativas

2.1.1 - Equações de equilíbrio

De acordo com o princípio de tensão efectiva formulado por Terzaghi, considere-se, num determinado ponto do domínio, o equilíbrio de tensões expresso pela expressão:

$$\{\sigma\} = \{\sigma'\} + \{m\}p_w \quad (1)$$

em que $\{\sigma\} = [\sigma_x \ \sigma_y \ \sigma_z \ \tau_{xy} \ \tau_{yz} \ \tau_{zx}]^T$ representa as tensões totais, $\{\sigma'\} = [\sigma'_x \ \sigma'_y \ \sigma'_z \ \tau_{xy} \ \tau_{yz} \ \tau_{zx}]^T$ as tensões efectivas, $\{m\} = [1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ e p_w é a pressão neutra.

Formulada em termos de tensões efectivas, considere-se ainda as relações constitutivas traduzidas por:

$$\{d\sigma'\} = [D] \left(\{d\varepsilon\} - \{d\varepsilon_c\} - \{d\varepsilon_{pw}\} - \{d\varepsilon_0\} \right) \quad (2)$$

em que $\{d\varepsilon\}$ são as deformações totais do esqueleto sólido,

$$\{d\varepsilon_c\} = \{c\}dt \quad (3)$$

as deformações de fluência ($\{c\}$ é um vector que depende, em geral, do tempo e do estado de tensão efectiva) e

$$\{d\varepsilon_{pw}\} = \frac{1}{3k_s} \{m\}dp_w \quad (4)$$

as deformações de compressão isotrópica das partículas sólidas devidas à variação de pressão dp_w (k_s é o coeficiente de deformação volumétrica das partículas sólidas); $\{d\varepsilon_0\}$, por fim, representa todas as outras deformações do esqueleto sólido que não estão directamente relacionadas com as variações das tensões (por razões térmicas, químicas, etc.). Para modelos constitutivos não lineares (como por exemplo, os modelos de estado crítico, que são os que se utilizam neste artigo), a matriz $[D]$ depende do estado de tensão efectiva, mas, no método incremental, os seus elementos são considerados constantes em cada incremento, isto é, em cada cálculo pelo método dos elementos finitos.

Num domínio Ω , com uma fronteira Γ , o equilíbrio entre as tensões totais $\{\sigma\}$, por um lado, e as forças de massa $\{b\}$ e as forças $\{\hat{t}\}$ aplicadas na fronteira, por outro, pode ser formulado através do princípio dos trabalhos virtuais (P.T.V.); tomando no domínio um campo de deslocamentos virtuais $\{\delta u\}$ e as correspondentes deformações virtuais $\{\delta\varepsilon\}$, pode escrever-se (aplicando o P.T.V. em termos incrementais):

$$\int_{\Omega} \{\delta \varepsilon\}^T \{d\sigma\} d\Omega - \int_{\Omega} \{\delta u\}^T \{db\} d\Omega - \int_{\Gamma} \{\delta u\}^T \{d\hat{t}\} d\Gamma = 0 \quad (5)$$

Se se incorporar nesta relação o princípio da tensão efectiva (expressão 1), obtém-se a expressão:

$$\int_{\Omega} \{\delta \varepsilon\}^T \{d\sigma'\} d\Omega + \int_{\Omega} \{\delta \varepsilon\}^T \{m\} dp_w d\Omega - \int_{\Omega} \{\delta u\}^T \{db\} d\Omega - \int_{\Gamma} \{\delta u\}^T \{d\hat{t}\} d\Gamma = 0 \quad (6)$$

Por sua vez, considerando as relações constitutivas (expressões 2, 3 e 4) e "dividindo" por dt (tratam-se de fenómenos de consolidação e, portanto, as grandezas em questão são dependentes do tempo), obtém-se a expressão:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \{\delta \varepsilon\}^T [D] \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} \{\delta \varepsilon\}^T \{m\} \frac{\partial p_w}{\partial t} d\Omega - \int_{\Omega} \{\delta \varepsilon\}^T [D] \{m\} \frac{\partial p_w}{\partial t} \frac{1}{3k_s} d\Omega - \\ - \int_{\Omega} \{\delta \varepsilon\}^T [D] \{e\} d\Omega - \int_{\Omega} \{\delta \varepsilon\}^T [D] \left\{ \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial t} \right\} d\Omega - \int_{\Omega} \{\delta u\}^T \left\{ \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right\} d\Omega - \int_{\Gamma} \{\delta u\}^T \left\{ \frac{\partial \hat{t}}{\partial t} \right\} d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

Esta é a equação integral de equilíbrio no domínio Ω atendendo às forças aplicadas na fronteira Γ . É de salientar que, se os valores da pressão p_w fossem conhecidos, os deslocamentos e as tensões nos diferentes pontos do domínio poderiam ser determinados a partir somente da resolução numérica desta equação. Contudo, em regra, isto não é possível já que os valores das pressões estão relacionados com as variações das deformações do solo (como se verá no ponto seguinte), o que obriga a incluir também a equação de escoamento (ou continuidade) da água como equação diferencial governativa do problema.

2.1.2 - Equação de continuidade

A equação de escoamento (ou continuidade) da água (equação diferencial que tem de ser verificada em todos os pontos do domínio) obtém-se pela aplicação do princípio da conservação da massa a um elemento de volume infinitesimal ($dV=dx dy dz$). Em meios saturados, a equação de continuidade é a seguinte (Lewis e Schrefler, 1987):

$$\{\nabla\}^T \{v\} + \left(\frac{\phi}{k_w} + \frac{1-\phi}{k_s} \right) \frac{\partial p_w}{\partial t} + \frac{1}{3k_s} \{m\}^T \left\{ \frac{\partial \sigma'}{\partial t} \right\} - \{m\}^T \left\{ \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \right\} = 0 \quad (8)$$

em que $\{v\} = [v_x \ v_y \ v_z]^T$ é velocidade fictícia de percolação da água,

$\{\nabla\}^T = \left[\frac{\partial}{\partial x} \ \frac{\partial}{\partial y} \ \frac{\partial}{\partial z} \right]$, ϕ a porosidade e k_s e k_w os coeficientes de deformação volumétrica

das partículas sólidas e do fluido (as restantes grandezas têm o significado já atrás referido).

Admitindo a aplicabilidade da lei de Darcy generalizada, ou seja,

$$\{v\} = -[k] \left\{ \nabla \left(\frac{p_w}{\gamma_w} + h \right) \right\} \quad (9)$$

em que $[k]$ é a matriz de permeabilidade ou de condutibilidade hidráulica, γ_w o peso específico da água e h a cota geométrica em relação a um referencial arbitrário, e tendo em conta as relações constitutivas (expressões 2, 3 e 4), a equação 8 passa a ser:

$$A = \{\nabla\}^T \{\psi\} - R = 0 \quad (10)$$

em que

$$\{\psi\} = [k] \left\{ \nabla \left(\frac{p_w}{\gamma_w} + h \right) \right\} \quad (11)$$

e

$$R = \left(\frac{\phi}{k_w} + \frac{1-\phi}{k_s} - \frac{1}{9k_s^2} \{m\}^T [D] \{m\} \right) \frac{\partial p_w}{\partial t} - \left(\{m\}^T - \frac{1}{3k_s} \{m\}^T [D] \right) \left\{ \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \right\} - \frac{1}{3k_s} \{m\}^T [D] \left(\left\{ \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial t} \right\} + \{c\} \right) \quad (12)$$

A equação 10 é, pois, a equação diferencial governativa do escoamento (equação da continuidade) e tem de ser verificada, como já se referiu, em todos os pontos do domínio.

Para além desta equação, têm de ser consideradas também as equações de fronteira que, neste caso, podem ser de dois tipos:

- a) fluxo imposto q (caudal por unidade de superfície) através da fronteira Γ :

$$B = \{n\}^T [k] \left\{ \nabla \left(\frac{p_w}{\gamma_w} + h \right) \right\} + q = 0 \quad (13)$$

em que $\{n\}$ é o vector unitário normal a Γ (o sentido arbitrado é o dirigido para o exterior; q , consequentemente, toma valores positivos quando a água sai do domínio);

- b) pressões impostas ao fluido em parte da fronteira Γ .

Em qualquer problema que envolva um domínio Ω limitado por uma fronteira Γ , as equações governativas têm de ser verificadas em todos os pontos de Ω e as condições de fronteira em todos os pontos de Γ . Na equação de equilíbrio 70 já estão incorporadas as condições de fronteira e o mesmo deverá ser feito relativamente ao escoamento através de uma única equação integral que tenha em conta, portanto, a aplicabilidade da expressão 10 em todo o domínio e da expressão 13 nos pontos da fronteira.

Assim, tomando a e b como funções arbitrárias, para que a equação de continuidade 10 ($A=0$) se verifique em todos os pontos do domínio Ω e as condições de fronteira ($B=0$ e/ou pressões impostas) se verifiquem na fronteira Γ , é necessário e suficiente que (método dos resíduos pesados):

$$\int_{\Omega} a A d\Omega + \int_{\Gamma} b B d\Gamma = 0 \quad (14)$$

ou seja,

$$\int_{\Omega} a \{\nabla\}^T \{\Psi\} d\Omega - \int_{\Omega} a R d\Omega + \int_{\Gamma} b \{n\}^T \{\Psi\} d\Gamma + \int_{\Gamma} b q d\Gamma = 0 \quad (15)$$

As derivadas de 2ª ordem do primeiro termo desta expressão podem ser eliminadas recorrendo ao teorema de Green que determina que, para duas funções ϕ e Ψ , definidas num domínio Ω com fronteira Γ (Zienkiewicz, 1977),

$$\int_{\Omega} \phi \frac{\partial \Psi}{\partial x} d\Omega = - \int_{\Omega} \frac{\partial \phi}{\partial x} \Psi d\Omega + \int_{\Gamma} \phi \Psi n_x d\Gamma \quad (16)$$

em que n_x é a componente x do vector unitário normal à fronteira, com sentido dirigido do interior para o exterior do domínio. Aplicando este teorema à expressão 15, resulta então:

$$- \int_{\Omega} \{\nabla a\}^T \{\Psi\} d\Omega - \int_{\Omega} a R d\Omega + \int_{\Gamma} (a+b) \{n\}^T \{\Psi\} d\Gamma + \int_{\Gamma} b q d\Gamma = 0 \quad (17)$$

Como a e b são funções arbitrárias, pode escolher-se $b = -a$ e, assim, eliminar-se o integral de superfície correspondente à terceira parcela. Obtém-se, finalmente,

$$\int_{\Omega} \{\nabla a\}^T \{\Psi\} d\Omega + \int_{\Omega} a R d\Omega + \int_{\Gamma} a q d\Gamma = 0 \quad (18)$$

2.2 - Análises acopladas. Aplicação do método dos elementos finitos

Utilizando como variáveis básicas os deslocamentos e as pressões neutras, descreve-se nesta secção a aplicação do método dos elementos finitos a problemas que envolvem processos de consolidação em meios saturados, tomando como equações governativas as equações de equilíbrio (expressão 7) e de escoamento (expressão 18). Trata-se, portanto, de análises acopladas dos fenómenos de consolidação em que, à semelhança do trabalho pioneiro de Biot (1935, 1941), é tida em conta a interdependência entre os fenómenos de deformação do esqueleto sólido e o escoamento do fluido intersticial.

Como as incógnitas do problema (deslocamentos e pressões neutras) variam no espaço e no tempo, é necessário discretizar o domínio em elementos finitos espaciais (tridimensionais, na formulação mais geral) e temporais (unidimensionais). Descrevem-se de seguida os aspectos numéricos que estão associados a essas discretizações.

2.2.1 - Discretização no espaço

Esta discretização é feita dividindo o meio contínuo em elementos finitos, sendo os deslocamentos $\{u\} = [u_x \quad u_y \quad u_z]^T$ e as pressões neutras p_w no interior de cada elemento obtidos a partir dos valores dessas grandezas nos pontos nodais correspondentes. Assim, as expressões relativas a $\{u\}$, $\{\varepsilon\}$ e p_w tomam o seguinte aspecto:

$$\{u\} = [N_u] \{u_p\} \quad (19a)$$

$$\{\varepsilon\} = [B_u] \{u_p\} \quad (19b)$$

$$p_w = \{N_{pw}\}^T \{p_{wp}\} \quad (19c)$$

em que $\{N_u\}$ e $\{N_{pw}\}$ são, respectivamente, as funções de forma para os deslocamentos e para as pressões; $[B_u]$ é a matriz B para os deslocamentos; $\{u_p\}$ e $\{p_{wp}\}$ representam, respectivamente, os valores dos deslocamentos e das pressões nos pontos nodais do elemento finito em questão (é de notar que o número e localização dos pontos nodais em cada elemento não são necessariamente os mesmos para os deslocamentos e para as pressões neutras).

Tendo em conta estas expressões, é possível definir o equilíbrio (expressão 7) e o escoamento (expressão 18) a partir somente dos valores nodais dos deslocamentos e das pressões neutras. Introduzindo as expressões 19 na equação 7 e dividindo por $\{\delta u\}^T$, obtém-se:

$$[K] \left\{ \frac{du_p}{dt} \right\} + [L] \left\{ \frac{dp_{wp}}{dt} \right\} = \{C\} + \left\{ \frac{df}{dt} \right\} \quad (20)$$

em que

$$[K] = \int_{\Omega} [B_u]^T [D] [B_u] d\Omega \quad (21a)$$

$$[L] = \int_{\Omega} [B_u]^T \left(\{m\} - \frac{1}{3k_s} [D] \{m\} \right) \{N_{pw}\}^T d\Omega \quad (21b)$$

$$[C] = \int_{\Omega} [B_u]^T [D] \{c\} d\Omega \quad (21c)$$

$$\{df\} = \int_{\Omega} [B_u]^T [D] \{d\varepsilon_0\} d\Omega + \int_{\Omega} [N_u]^T \{db\} d\Omega + \int_{\Gamma} [N_u]^T \{d\hat{\tau}\} d\Gamma \quad (21d)$$

Relativamente à equação de continuidade 18, a função a ainda se mantém arbitrária e, portanto, deve ser especificada para que aquela equação possa ser resolvida. É desejável definir a função a de uma forma tal que se aumente a precisão do método numérico utilizado. Com este objectivo, foi aplicada a técnica dos resíduos pesados, usando o método de Galerkin (Zienkiewicz, 1977).

A função a é substituída por um número finito de funções dentro do elemento, as quais, no método de Galerkin, são idênticas às funções de forma $\{N_{pw}\}$; ou seja:

$$a = \{N_{pw}\}^T \{a_p\} = \{a_p\}^T \{N_{pw}\} \quad (22a)$$

$$\{\nabla a\} = [B_{pw}] \{a_p\} \quad (22b)$$

$$[B_{pw}] = \{\nabla\} \{N_{pw}\}^T \quad (22c)$$

em que $\{a_p\}$ são valores quaisquer arbitrados para a função a nos pontos nodais das pressões. Nesta solução do presente problema, e em muitos outros, este método tem a vantagem particular de permitir a obtenção de matrizes simétricas. Assim, introduzindo as expressões 19

e 22 na equação 18, dividindo por $\{a_p\}^T$ e multiplicando por -1 (esta multiplicação tem como objectivo obter à frente, em determinadas circunstâncias, uma matriz global simétrica), resulta que:

$$[H]\{p_{wp}\} + [S]\left\{\frac{dp_{wp}}{dt}\right\} + [T]\left\{\frac{du_p}{dt}\right\} = \{h\} + \left\{\frac{dg}{dt}\right\} \quad (23)$$

em que

$$[H] = -\int_{\Omega} \frac{1}{\gamma_w} [B_{pw}]^T [k] [B_{pw}] d\Omega \quad (24a)$$

$$[S] = -\int_{\Omega} \{N_{pw}\} \left(\frac{\phi}{k_w} + \frac{1-\phi}{k_s} - \frac{1}{9k_s^2} \{m\}^T [D] \{m\} \right) \{N_{pw}\}^T d\Omega \quad (24b)$$

$$[T] = \int_{\Omega} \{N_{pw}\} \left(\{m\}^T - \frac{1}{3k_s} \{m\}^T [D] \right) [B_u] d\Omega \quad (24c)$$

$$\{h\} = \int_{\Omega} [B_{pw}]^T [k] \{\nabla h\} d\Omega - \int_{\Omega} \{N_{pw}\} \frac{1}{3k_s} \{m\}^T [D] \{c\} d\Omega + \int_{\Gamma} \{N_{pw}\} q d\Gamma \quad (24d)$$

$$\{dg\} = -\int_{\Omega} \{N_{pw}\} \frac{1}{3k_s} \{m\}^T [D] \{d\varepsilon_0\} d\Omega \quad (24e)$$

Em síntese, uma vez realizada a discretização no espaço, as duas equações governativas, 7 (equilíbrio) e 18 (continuidade), são transformadas num sistema de equações diferenciais do tempo (expressões 20 e 23), o qual pode ser escrito da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} [0] & [0] \\ [0] & [H] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u_p\} \\ \{p_{wp}\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [K] & [L] \\ [T] & [S] \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{Bmatrix} \{u_p\} \\ \{p_{wp}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{C\} + \left\{\frac{df}{dt}\right\} \\ \{h\} + \left\{\frac{dg}{dt}\right\} \end{Bmatrix} \quad (25)$$

Os valores nodais $\{u_p\}$ e $\{p_{wp}\}$, em diferentes instantes do tempo, podem agora ser obtidos através de algoritmos apropriados de discretização no tempo.

2.2.2 - Discretização no tempo

Sendo o tempo um domínio unidimensional de dimensão infinita, a sua discretização pode ser feita de uma maneira incremental em que os cálculos se repetem em subseqüentes domínios finitos (elementos finitos unidimensionais) com novas condições iniciais (Lewis e Schrefler, 1987; Zienkiewicz, 1977).

Formalmente, a integração no tempo faz-se neste caso de modo análogo à integração espacial, isto é, se $F=0$ então $\int wFdt = 0$, em que w é uma função arbitrária do tempo. Aplicando este princípio às equações 25, obtém-se:

$$\int_{t_k}^{t_k+\Delta t_k} w \begin{bmatrix} [0] & [0] \\ [0] & [H] \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} \{u_p\} \\ \{p_{wp}\} \end{matrix} \right\} dt + \int_{t_k}^{t_k+\Delta t_k} w \begin{bmatrix} [K] & [L] \\ [T] & [S] \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \left\{ \begin{matrix} \{u_p\} \\ \{p_{wp}\} \end{matrix} \right\} dt = \int_{t_k}^{t_k+\Delta t_k} w \left\{ \begin{matrix} \{C\} + \left\{ \frac{df}{dt} \right\} \\ \{h\} + \left\{ \frac{dg}{dt} \right\} \end{matrix} \right\} dt \quad (26)$$

em que t_k e Δt_k são, respectivamente, o instante inicial e o valor do incremento de ordem k .

Atendendo a que nas equações 26 aparecem somente derivadas de primeira ordem do tempo, é suficiente considerar no interior do domínio - ou seja, no interior do elemento finito unidimensional - variações lineares de $\{u_p\}$ e $\{p_{wp}\}$. Nesta base, pode considerar-se para cada elemento somente dois pontos nodais, por exemplo, em ambos os extremos (instantes t_k e $t_k+\Delta t_k$, no caso do elemento de ordem k). Neste caso, são as seguintes as funções de forma:

$$N_1 = 1 - \xi \quad (27a)$$

$$N_2 = \xi \quad (27b)$$

em que $\xi = (t - t_k) / \Delta t_k$ com $0 \leq \xi \leq 1$.

Por sua vez, as derivadas em ordem ao tempo são dadas por:

$$\frac{dN_1}{dt} = -\frac{1}{\Delta t_k} \quad (28a)$$

$$\frac{dN_2}{dt} = \frac{1}{\Delta t_k} \quad (28b)$$

Introduzindo as expressões 27 e 28 nas equações 26 e atendendo à mudança de variável $dt = \Delta t_k \cdot d\xi$, obtém-se:

$$\int_0^1 w \begin{bmatrix} [0] & [0] \\ [0] & [H] \end{bmatrix} \left[(1-\xi) \begin{matrix} \{u_p\} \\ \{p_{wp}\} \end{matrix} \Big|_{t_k} + \xi \begin{matrix} \{u_p\} \\ \{p_{wp}\} \end{matrix} \Big|_{t_k+\Delta t_k} \right] \Delta t_k d\xi + \int_0^1 w \begin{bmatrix} [K] & [L] \\ [T] & [S] \end{bmatrix} \left[-\frac{1}{\Delta t_k} \begin{matrix} \{u_p\} \\ \{p_{wp}\} \end{matrix} \Big|_{t_k} + \frac{1}{\Delta t_k} \begin{matrix} \{u_p\} \\ \{p_{wp}\} \end{matrix} \Big|_{t_k+\Delta t_k} \right] \Delta t_k dt = \int_0^1 w \left\{ \begin{matrix} \{C\} + \left\{ \frac{df}{dt} \right\} \\ \{h\} + \left\{ \frac{dg}{dt} \right\} \end{matrix} \right\} \Delta t_k d\xi \quad (29)$$

em que $\begin{Bmatrix} u_p \\ p_{wp} \end{Bmatrix}_{t_k}$ e $\begin{Bmatrix} u_p \\ p_{wp} \end{Bmatrix}_{t_k + \Delta t_k}$ são os valores nodais dos deslocamentos e das pressões nos instantes t_k e $t_k + \Delta t_k$, respectivamente.

Reordenando os termos desta expressão e admitindo que as expressões 21 e 24 não variam no intervalo de tempo em questão (o que é exacto nos problemas lineares, mas aproximado nos problemas não lineares), obtém-se finalmente:

$$\begin{bmatrix} [K] & [L] \\ [T] & [S] + \theta[H]\Delta t_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_p \\ p_{wp} \end{Bmatrix}_{t_k + \Delta t_k} = \begin{bmatrix} [K] & [L] \\ [T] & [S] - (1 - \theta)[H]\Delta t_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_p \\ p_{wp} \end{Bmatrix}_{t_k} + \begin{Bmatrix} \{C\} + \left\{ \frac{df}{dt} \right\} \\ \{h\} + \left\{ \frac{dg}{dt} \right\} \end{Bmatrix} \Delta t_k \quad (30)$$

em que

$$\theta = \frac{\int_0^1 w \xi d\xi}{\int_0^1 w d\xi} \quad (31)$$

Porque a função w é arbitrária, o parâmetro θ pode tomar qualquer valor do intervalo $[0,1]$; Booker e Small (1975), usando diversos valores de θ , mostraram que, em termos numéricos, existe estabilidade se $\theta \geq \frac{1}{2}$.

Em síntese, as relações 30 correspondem, então, ao sistema de equações-base que, através do método dos elementos finitos, permite determinar em meios saturados os valores nodais dos deslocamentos e das pressões neutras num instante $t_k + \Delta t_k$, conhecidos os respectivos valores no instante t_k .

2.2.3 - Comentários e simplificações

Tendo presente a influência desprezável de alguns dos parâmetros da formulação atrás descrita na simulação das obras em estudo neste artigo, foram consideradas as seguintes simplificações no modelo numérico bidimensional:

- incompressibilidade da água e das partículas sólidas, ou seja, $k_w = \infty$ e $k_s = \infty$ (esta é uma simplificação normalmente utilizada em Mecânica dos Solos, tendo em conta, em termos comparativos, as compressibilidades destes materiais e a do esqueleto sólido);
- fluência do esqueleto sólido desprezável, ou seja, $\{c\} = \{0\}$; é de notar que esta simplificação é aceitável na maioria dos casos nos solos argilosos, não o sendo, no entanto, em solos muito plásticos e especialmente em solos com grande teor de matéria orgânica; de qualquer forma, mesmo nestes casos, a consideração do comportamento viscoso é sobretudo importante na avaliação da grandeza das deformações a muito longo prazo;
- deformações $\{\varepsilon_0\}$ (devidas a efeitos térmicos, químicos, etc.) desprezáveis;
- inexistência de fluxo imposto, q , na fronteira;
- permeabilidade independente do índice de vazios; é de referir que, ao contrário do que se admite nesta simplificação, os resultados experimentais mostram que o coeficiente de permeabilidade k varia com o índice de vazios e , existindo, em geral, um relação linear entre e e $\log k$; embora não tenha sido considerada no modelo, esta variação é fácil de

simular, já que, dependendo do índice de vazios, o valor de k pode ser actualizado no final de cada incremento modelado pelo programa - desde que exista informação experimental disponível que permita estabelecer a relação referida, o que na maior parte dos casos não acontece.

Assim, tendo em conta estas simplificações e que, para os modelos constitutivos utilizados (modelos de estado crítico), a matriz $[D]$ é simétrica, ou seja, $[D] = [D]^T$, então o sistema de equações 31 pode escrever-se da seguinte maneira mais simplificada (tomando $\theta=1$):

$$\begin{bmatrix} [K] & [L] \\ [L]^T & [H]\Delta t_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta u_p \\ \Delta p_{wp} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \left\{ \frac{df}{dt} \right\} \\ -[H] \left\{ p_{wp} \right\}_{t_k} + \{h\} \end{Bmatrix} \Delta t_k \quad (32)$$

em que

$$\begin{Bmatrix} \Delta u_p \\ \Delta p_{wp} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_p \\ p_{wp} \end{Bmatrix}_{t_k + \Delta t_k} - \begin{Bmatrix} u_p \\ p_{wp} \end{Bmatrix}_{t_k}$$

$$[K] = \int_{\Omega} [B_u]^T [D] [B_u] d\Omega \quad (33a)$$

$$[L] = \int_{\Omega} [B_u]^T \{m\} \{N_{pw}\}^T d\Omega \quad (33b)$$

$$\{df\} = \int_{\Omega} [N_u]^T \{db\} d\Omega + \int_{\Gamma} [N_u]^T \{d\hat{t}\} d\Gamma \quad (33c)$$

$$[H] = -\int_{\Omega} \frac{1}{\gamma_w} [B_{pw}]^T [k] [B_{pw}] d\Omega \quad (33d)$$

$$\{h\} = \int_{\Omega} [B_{pw}]^T [k] \{\nabla h\} d\Omega \quad (33e)$$

Em vez da pressão neutra p_w , pode utilizar-se também, como variável básica, o excesso de pressão neutra p_w^e (diferença entre o valor de p_w e o correspondente valor da pressão neutra de equilíbrio ou hidrostática); neste caso, o sistema 32 transforma-se no seguinte:

$$\begin{bmatrix} [K] & [L] \\ [L]^T & [H]\Delta t_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta u_p \\ \Delta p_{wp}^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \left\{ \frac{df}{dt} \right\} \\ -[H] \left\{ p_{wp}^e \right\}_{t_k} \end{Bmatrix} \Delta t_k \quad (34)$$

Nesta formulação - que é, aliás, bastante comum - não é, pois, necessário definir o campo das pressões hidrostáticas.

Na Fig. 1a indica-se o elemento finito utilizado no modelo para modelar as massas de solo em que se processam fenómenos de consolidação. Trata-se de um elemento triangular com 6 pontos nodais para os deslocamentos (nos vértices e nos pontos médios dos lados) e 3 pontos

nodais para os excessos de pressões neutras (nos vértices). Consequentemente, no interior do elemento, as pressões neutras e as deformações apresentam um grau de variação da mesma ordem (neste caso, linear).

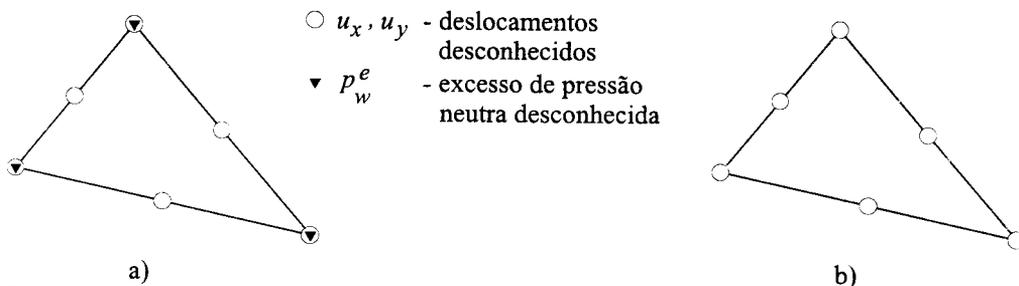


Fig. 1 - Elementos finitos bidimensionais utilizados no modelo numérico: a) 12 incógnitas-deslocamentos e 3 incógnitas-excessos de pressão neutra; b) 12 incógnitas-deslocamentos e zero incógnitas-excessos de pressão neutra.

Por sua vez, o elemento representado na Fig. 1b apresenta somente incógnitas-deslocamentos (doze, duas por cada ponto nodal) e foi normalmente utilizado para modelar os materiais do tipo granular. Estes materiais apresentam valores bastante elevados da permeabilidade e , por isso, é perfeitamente aceitável a hipótese correspondente a situação drenada nos elementos correspondentes (excessos de pressões neutras nulos); em termos numéricos, este facto corresponde, portanto, a uma simplificação em que na massa de solo correspondente se consideram somente incógnitas-deslocamentos.

3 - SIMULAÇÃO NUMÉRICA DOS PROCESSOS DE CONSOLIDAÇÃO NUMA OBRA DE ATERRO SOBRE SOLOS MOLES

3.1 - Preâmbulo

O problema diz respeito à construção contínua, em 28 dias, de um aterro de 2 m de altura, reforçado na base com um geotêxtil, simétrico, com uma plataforma final de 10,6 m de largura e com taludes inclinados 1/1,5. A camada de argila saturada, que constitui a fundação, tem 5 m de espessura e assenta num maciço rígido e impermeável. Trata-se de uma argila ligeiramente sobreconsolidada até 1,8 m de profundidade e normalmente consolidada para profundidades superiores.

As relações constitutivas dos solos do aterro e da fundação foram simuladas através da aplicação do modelo de estados críticos (p, q, θ) .

As curvas tensão-deformação do geotêxtil e as curvas tensões tangenciais-deslocamentos tangenciais relativos das interfaces solo-geotêxtil, dadas as características típicas destes elementos, foram simuladas através de modelos elasto-plásticos com endurecimento não linear.

Em Borges e Cardoso (1998 - cálculo 1A) podem ser vistos com detalhe os pormenores relativos à simulação numérica deste problema, designadamente no que respeita à malha de elementos finitos, condições de fronteira e parâmetros das relações constitutivas dos elementos estruturais (solos de fundação e do aterro, geotêxtil e interfaces solo-geotêxtil).

3.2 - Análise dos resultados

3.2.1 - Período de construção do aterro

Dada a interrelação entre as deformações e as variações das tensões efectivas que se processam na argila de fundação, o carácter daquelas, durante a construção, está intimamente ligado ao modo como as forças de massa dos elementos que constituem o aterro se repartem na acção sobre as duas fases do meio (variações de tensões efectivas no esqueleto sólido, que provocam as deformações, e excessos de pressão neutra na água, que determinam o escoamento do fluido).

Nas Figs 2 e 3 mostra-se, respectivamente, a evolução dos excessos de pressão neutra durante este período e as cruzetas de tensões principais efectivas no final do mesmo.

Estes resultados, considerando o maciço de fundação dividido em quatro zonas típicas, conforme esquematizado na Fig. 4, mostram o seguinte:

- a) é na zona A que os excessos de pressão neutra têm os valores mais elevados (os valores máximos situam-se junto ao eixo de simetria e têm grandezas sensivelmente iguais aos acréscimos de tensão vertical devidos à construção do aterro);
- b) os excessos de pressão neutra diminuem progressivamente desde a zona A até à zona D, onde são pouco significativos;
- c) em consequência dos elevados gradientes de pressão neutra na zona C (zona carregada junto à superfície de drenagem), é particularmente visível o efeito da dissipação das pressões junto à superfície (os valores dos excessos de pressão neutra variam desde zero à superfície até 70% do valor máximo a uma profundidade de 50 cm); este efeito de consolidação, não sendo em regra contabilizado em cálculos mais simplificados (análises não drenadas), traduz-se na prática por um relativo aumento da resistência das camadas mais superficiais da fundação;
- d) à excepção dos elementos da zona C, as tensões médias efectivas (ver Fig. 3) sofrem pequenas variações (este facto pode ser comprovado, em qualquer ponto, comparando as dimensões da sua cruzeta de tensões com a do ponto à mesma cota situado junto à fronteira lateral direita, que não sofre alterações);
- e) as tensões de desvio na zona B sofrem, no mesmo período, variações significativas (rotação das tensões principais); este aspecto manifesta-se na variação do ângulo que a tensão principal maior faz com a horizontal, que atinge valores muito expressivos, próximos de 90°, na zona exterior adjacente à zona carregada.

Quanto aos deslocamentos, no final da construção (ver Fig. 5, malha deformada), embora existam importantes deslocamentos verticais de baixo para cima na zona adjacente à zona carregada, os deslocamentos horizontais dirigidos para fora da zona carregada são globalmente predominantes. Estes deslocamentos traduzem um campo de deformações que, à excepção da camada superficial em que não é desprezável o efeito de consolidação, se caracteriza por deformações volumétricas praticamente nulas (devido ao não escoamento do fluido) e deformações distorcionais bastante significativas (associadas às variações da tensão de desvio atrás referidas).

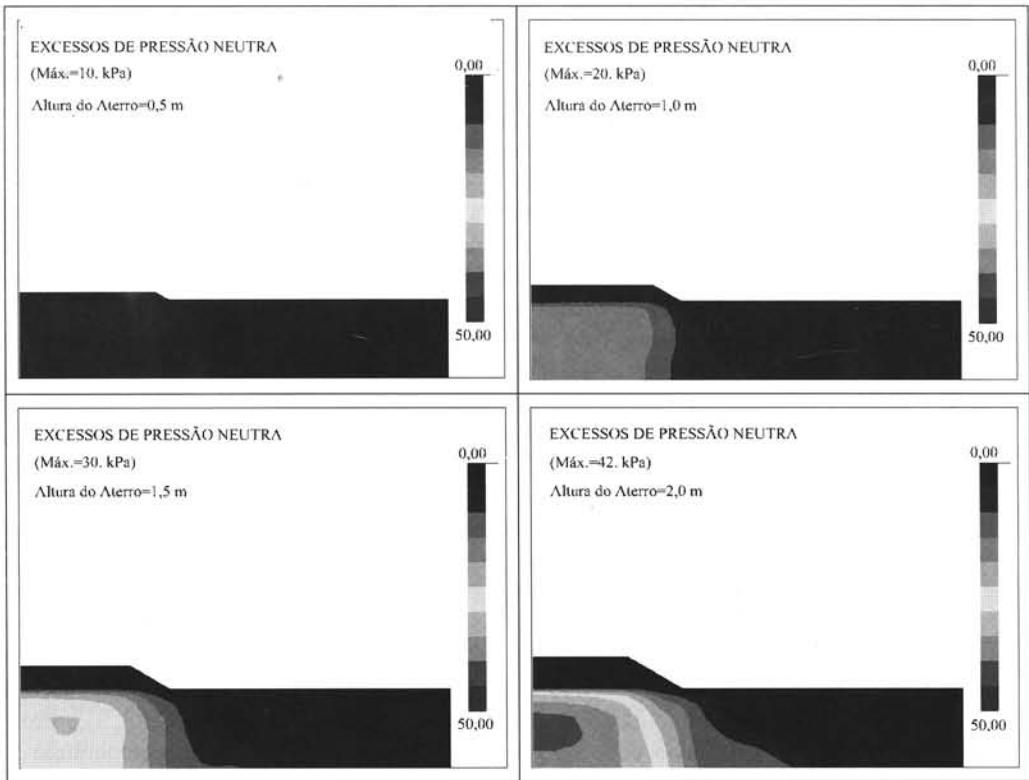


Fig. 2 - Evolução dos excessos de pressão neutra durante a construção.

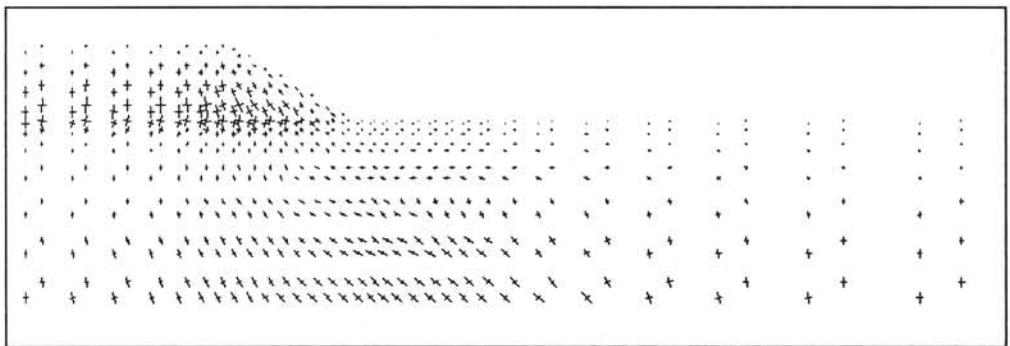


Fig. 3 - Cruzetas de tensões principais efectivas no final da construção.

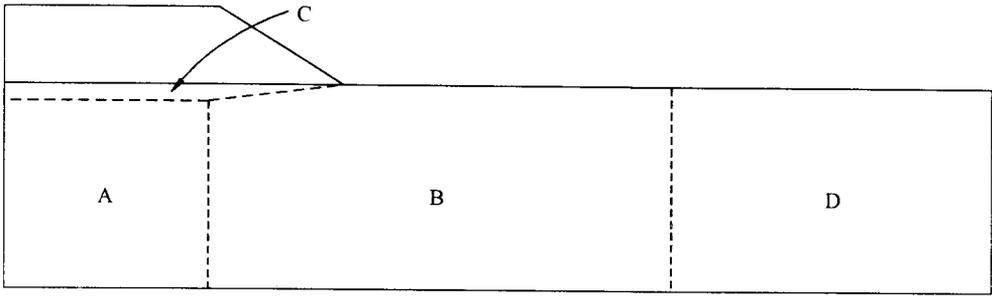


Fig. 4 - Divisão da fundação em quatro zonas típicas.

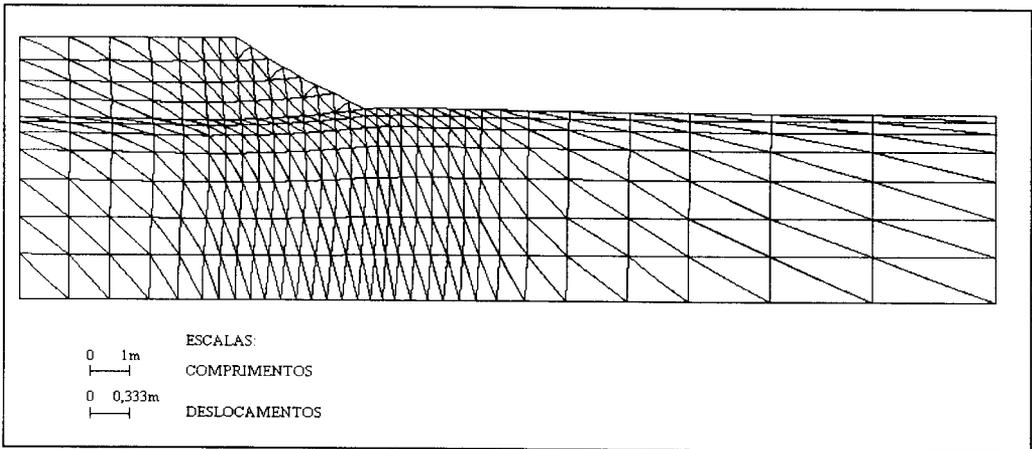


Fig. 5 - Configuração da deformada no final da construção.

3.2.2 - Período posterior à construção do aterro

Depois de terminado o período de carga, o problema é caracterizado pela existência de um processo transitório de escoamento do fluido ao qual se associam as transferências de carga da água para o esqueleto sólido. Até se atingir um regime permanente, o comportamento da fundação é pois determinado pela variação dos campos de tensões (totais, efectivas e neutras), deformações e deslocamentos.

Analisando a evolução dos excessos de pressão neutra neste período e as cruzetas de tensões efectivas no final da consolidação hidrodinâmica (Fig.s 6 e 7), constata-se que:

- as curvas de isovalores dos excessos de pressão neutra apresentam uma forma muito regular que corresponde, em cada ponto, à direcção perpendicular às linhas de corrente;
- enquanto que as variações da tensão de desvio são a característica fundamental da evolução do estado de tensão no período de carga, as variações da tensão média efectiva caracterizam o essencial do processo de consolidação que se segue; de facto, comparando as
- tensões principais efectivas nos finais da consolidação (Fig. 7) e da construção (Fig. 3), constata-se exactamente que: i) não se verificam rotações significativas nas direcções

das tensões principais (pequenas variações da tensão de desvio); ii) as grandezas das tensões principais aumentam significativamente (aumentos da tensão média efectiva).



Fig. 6 - Evolução dos excessos de pressão neutra após a construção do aterro.

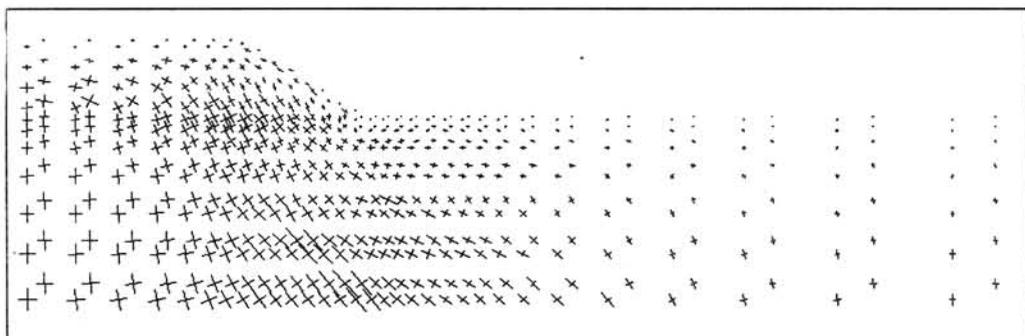


Fig. 7 - Cruzetas das tensões principais efectivas no final da consolidação.

Por fim, a tendência geral dos deslocamentos neste período é no sentido de um assentamento generalizado, quanto à componente vertical (ver Figs 8 e 9, malha deformada no final da consolidação e deslocamentos verticais na base do aterro, respectivamente), e no sentido de um movimento dirigido para o exterior, quanto à componente horizontal (ver deslocamentos horizontais no alinhamento vertical de abcissa 6,8 m, Fig. 10).

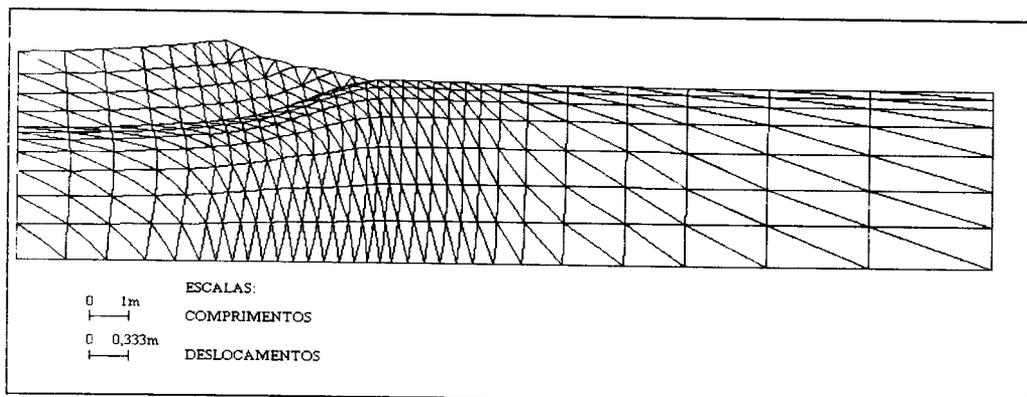


Fig. 8 - Configuração da deformada no final da consolidação.

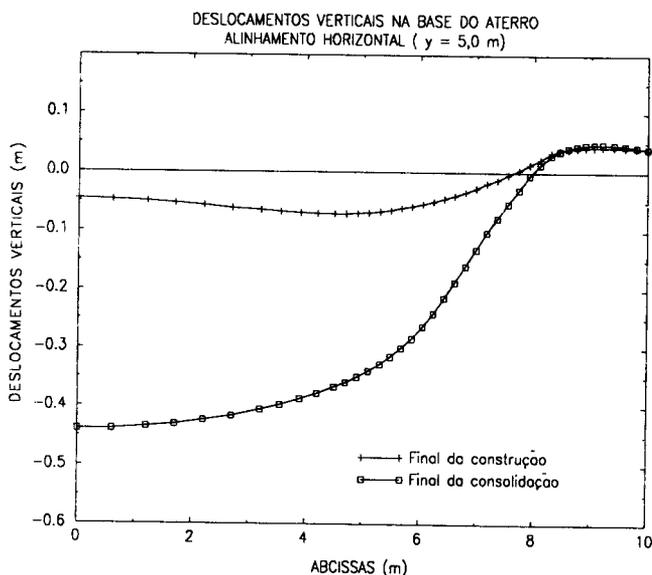


Fig. 9 - Deslocamentos verticais na base do aterro.

Refira-se que, tendo como base um modelo constitutivo elastoplástico com superfícies de cedência fechadas (modelo de estados críticos (p,q,θ)), o modelo numérico utilizado permite simular deformações distorcionais plásticas (ao contrário do que acontece com os modelos mais simples, com superfícies de cedência abertas) para trajectórias de tensão com aumentos significativos da tensão média efectiva e pequenas variações da tensão de desvio (como acontece no período em análise - Borges e Cardoso, 1998). É este facto que justifica a correcta simulação dos deslocamentos horizontais neste período (dirigidos para o exterior), à

semelhança do que mostram, em geral, resultados observados em obras reais (Bassett, 1986a e b; Yeo, 1986; Soderman, 1986; Quaresma, 1992; Litwinowicz *et al.*, 1994; Loke *et al.*, 1994; Matichard *et al.*, 1994).

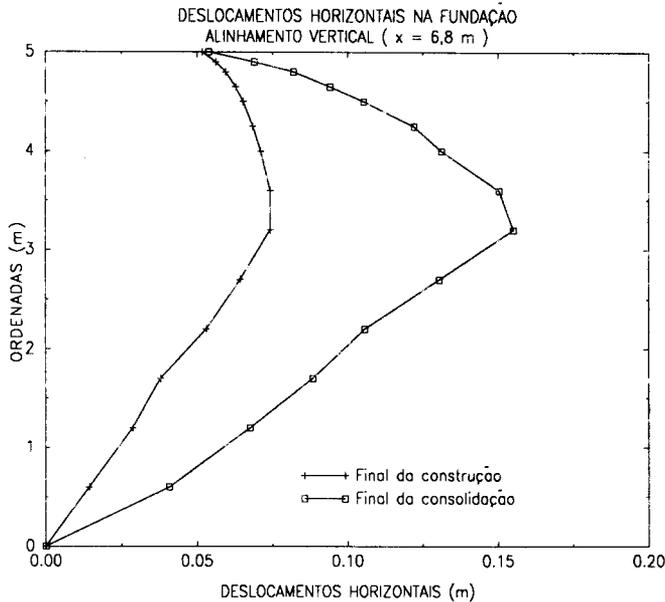


Fig. 10 - Deslocamentos horizontais no alinhamento vertical de abscissa 6,8 m.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BASSET, R. H. - *The instrumentation of the trial embankment and of the Tensar SR2 grid.* Proceedings of the Prediction Symposium on a Reinforced Embankment on Soft Ground, King's College, London, 1986a.
- BASSET, R. H. - *Presentation of instrumentation data.* Proceedings of the Prediction Symposium on a Reinforced Embankment on Soft Ground, King's College, London, 1986b.
- BIOT, M. A. - *Les problemes de la consolidation des matieres argileuses sous une charge.* Annales de la Société Scientifique de Bruxelles, Series B. 55, pp. 110-113, 1935.
- BIOT, M. A. *General theory of three-dimensional consolidation.* Journal of Applied Physics, Vol. 12, pp. 155-164, 1941.
- BIOT, M. A. - *Theory of elasticity and consolidation for a porous anisotropic solid.* Journal of Applied Physics, Vol. 26, pp. 182-185, 1955.
- BIOT, M. A. - *Theory of deformation of a porous viscoelastic anisotropic solid .* Journal of Applied Physics, Vol. 27, pp. 459-467, 1956a.
- BIOT, M. A. - *General solutions of the equations of elasticity and consolidation for a porous material.* Transactions, Journal of Applied Mechanics, Vol. 78, pp. 91-96, 1956b.
- BOOKER, J. R.; SMALL, J. C. - *An investigation of the stability of numerical solutions of Biot's equations of consolidation.* Int. J. Solids and Structures, 1975.
- BORGES, J. L. - *Aterros sobre Solos Moles Reforçados com Geossintéticos. Análise e Dimensionamento.* Dissertação de Doutoramento, Fac. de Engenharia, Porto, 1995.

- BORGES, J. L.; CARDOSO, A. S. - *Simulação Numérica do Modelo de Estados Críticos (p, q, θ) em Aterros sobre Solos Moles*. Revista Geotecnia, nº 84, 1998.
- LEWIS, R. W.; SCHREFLER, B. A. - *The finite element method in deforming and consolidation of porous media*. John Wiley and Sons, Chichester, 1987.
- SODERMAN, K. L. - *The behaviour of geotextile reinforced embankments*. PhD, University of Western Ontario, Ontario, 1986.
- LOKE, K. H.; GANESHAN, V.; WERNER, G.; BERGADO, D. T. - *Composite behaviour of geotextile reinforcement embankment on soft clay*. Proc. of The Fifth International Conference on Geotextiles, Geomembranes and Related Products, Singapore, Vol. 1, pp. 25-28, 1994.
- LITWINOWICZ, A.; WIJEYAKULASURIYA, C. V.; BRANDON, A. N. - *Performance of a reinforced embankment on sensitive soft clay foundation*. Proc. of The Fifth International Conference on Geotextiles, Geomembranes and Related Products, Singapore, Vol. 1, pp. 11-16, 1994.
- MATICHARD, Y.; TANAYS, E.; CARBON, M. - *Geotextile reinforced embankment to cross a peat-bog*. Proc. of the Fifth International Conference on Geotextiles, Geomembranes and Related Products, Singapore, Vol. 1, pp. 37-40, 1994.
- QUARESMA, M. G. - *Comportement et modélisation d'un remblai sur sols mous renforcé par géotextile*. Thèse pour le titre de Docteur de l'Université de Joseph Fourier, Grenoble I, 1992.
- YEO, K. C. - *Simplified foundation data to predictors*. Proceedings of the Prediction Symposium on a Reinforced Embankment on Soft Ground, King's College, London, 1986.
- ZIENKIEWICZ, O. C. - *The finite element method*. McGraw-Hill, London, 1977.