

# O MODELO ELASTO-PLÁSTICO DE LADE E KIM

## Lade and Kim elasto-plastic model

LUCAS TADEU BARROSO DE MELO\*  
ROBERTO FRANCISCO DE AZEVEDO\*\*

RESUMO - Inicialmente, apresenta-se a teoria de um modelo constitutivo elasto-plástico e o procedimento para a obtenção dos seus parâmetros, usando-se resultados de ensaios de laboratório. Em seguida, mostra-se que os parâmetros dos materiais da barragem de Beliche, estimados através deste procedimento de calibração convencional, não foram capazes de reproduzir o comportamento observado no laboratório. Emprega-se, então, para a obtenção dos parâmetros, um algoritmo de otimização, melhorando-se significativamente a concordância com os resultados de laboratório. Finalmente, apresentam-se alguns resultados da análise de elementos finitos da barragem de Beliche durante a sua construção.

SYNOPSIS - The paper firstly presents the theory of an elasto-plastic constitutive model and the procedure to obtain its parameters using laboratory test results. Following, it is shown that parameters of the Beliche dam materials, estimated by this conventional calibration procedure, were not able to reproduce accurately the observed laboratory behavior. Alternatively, an optimisation algorithm was employed to evaluate the parameters, improving significantly the agreement with laboratory results. Finally, results of the finite element analysis of the Beliche dam construction are presented.

## 1 - INTRODUÇÃO

Na última década, a utilização de técnicas numéricas para análise do comportamento de obras de terra aumentou significativamente. Dentre estas técnicas destaca-se o método dos elementos finitos que, a partir do trabalho pioneiro de Clough e Woodward (1967), tem sido progressivamente mais utilizado para analisar obras geotécnicas tais como fundações, barragens, escavações, túneis, etc., em problemas de tensão-deformação, fluxo, adensamento, etc. (Vargas *et al.*, 1994; Bull, 1994).

Verifica-se, entretanto, que estas análises geotécnicas são fortemente influenciadas pelo modelo constitutivo utilizado para representar o comportamento tensão-deformação dos solos. Em vista disso, um intenso trabalho tem sido realizado para, em primeiro lugar, caracterizar o comportamento de solos através de ensaios de campo e de laboratório. Em segundo lugar, modelar este comportamento, e, finalmente, implementar estes modelos constitutivos em programas de elementos finitos capazes de analisar obras geotécnicas (Gudehus *et al.*, 1984; Saada e Bianchini, 1989; Pande e Pietruszczak, 1995).

Entre os inúmeros modelos constitutivos desenvolvidos nas últimas décadas, o modelo elasto-plástico formulado por Lade (1977, 1979) foi dos que teve maior utilização, pelo menos a nível acadêmico, tendo sempre representado razoavelmente bem ensaios de laboratório e obras geotécnicas não só por quem o concebeu mas também por diversos outros pesquisadores (Azevedo e Ko, 1986; Santos *et al.*, 1989; Zornberg e Azevedo, 1990; Nogueira, 1992;

---

\* Assistente de Pesquisa, John Hopkins University, Baltimore, Estados Unidos

\*\* Professor Associado, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-Rio), Brasil  
Professor Visitante, Universidade Federal de Viçosa (UFV), Brasil

Parreira e Azevedo, 1993; Azevedo e Azevedo Filho, 1994; Bicalho e Azevedo, 1994). Neste aspecto, só encontrou paralelo nos modelos hiperbólicos (Duncan *et al.*, 1979) e Cam-Clay (Schofield e Wroth, 1968) sendo, entretanto, mais poderoso na sua capacidade de modelagem que estes modelos.

Contudo, o modelo de Lade (1977, 1979) apresenta alguns problemas decorrentes do fato dele utilizar duas superfícies de plastificações (Sture *et al.*, 1989). Em vista disso, um novo modelo foi concebido pelo mesmo autor (Lade e Kim, 1988a e b; Kim e Lade, 1988; Lade, 1990) com características semelhantes ao primeiro, porém apenas com uma superfície de plastificação.

Até o momento, este novo modelo só foi utilizado nos trabalhos citados acima e em dois trabalhos nos quais encontrou-se muita dificuldade para a sua calibração e, conseqüentemente, obteve-se uma reprodução muito pobre dos ensaios de laboratório (Iturri, 1991; Baggio, 1995).

Tendo em vista o bom desempenho do primeiro modelo e a expectativa de sucesso deste novo modelo, o objetivo deste trabalho é usá-lo para confirmar, ou não, as dificuldades encontradas anteriormente.

No ítem seguinte, um estudo detalhado do novo modelo de Lade é mostrado, juntamente com os procedimentos convencionais de calibração usados para a obtenção dos seus parâmetros.

Em seguida apresenta-se, como exemplo, a calibração dos materiais da barragem de Beliche. Apesar de correlações razoáveis, constata-se que o conjunto de parâmetros origina uma reprodução muito pobre dos ensaios usados na calibração. Utiliza-se, então, uma técnica diferente para a obtenção dos parâmetros na qual, através de um programa de otimização, obtem-se parâmetros que minimizam os erros entre os resultados dos ensaios de laboratório e os resultados analíticos fornecidos pelo modelo constitutivo. Com estes novos parâmetros, conseguiu-se uma boa reprodução dos ensaios de laboratório, bastante superior àquela obtida através da calibração convencional.

Finalmente, com o este conjunto de parâmetros ótimos, faz-se a análise da construção da barragem de Beliche.

## 2 - O MODELO DE LADE-KIM

Como é comum nos modelos elasto-plásticos, no modelo de Lade-Kim os incrementos de deformações são divididos em incrementos de deformações elásticas ( $\{d\varepsilon^e\}$ ) e incrementos de deformações plásticas ( $\{d\varepsilon^p\}$ ).

Os incrementos de deformação elástica são calculados a partir da lei de Hooke, usando-se um módulo de carregamento-descarregamento ( $E_{ur}$ ) e um coeficiente de Poisson ( $\nu$ ). O módulo  $E_{ur}$  é definido por (Janbu, 1963):

$$E_{ur} = K_{ur} p_a \left( \frac{\sigma_3}{p_a} \right)^n \quad (1)$$

onde  $K_{ur}$  e  $n$  são parâmetros adimensionais, determinados a partir de trechos de descarregamento-recarregamento em ensaios de compressão triaxial,  $p_a$  é a pressão atmosférica e  $\sigma_3$  é a pressão confinante. O coeficiente de Poisson é considerado constante, independente do estado de tensão.

No novo modelo utiliza-se a mesma superfície de ruptura curva do modelo anterior expressa pela equação:

$$f_n = \eta_1 = \left( \frac{I_1^3}{I_3} - 27 \right) \left( \frac{I_1}{p_a} \right)^n \quad (2)$$

onde  $I_1$  e  $I_3$  são os invariantes de tensão, e  $m$  e  $\eta_1$  são parâmetros do solo. O primeiro,  $m$ , varia com a curvatura da envoltória de ruptura: quando  $m = 0$  a envoltória é linear; se  $m > 1,979$  ela será convexa em relação ao eixo hidrostático. Inúmeros ensaios de laboratório têm mostrado que  $m$  normalmente é menor que 1,5. O segundo parâmetro,  $\eta_1$ , relaciona-se com a resistência do material: quanto maior for o seu valor, mais resistente é o solo. Este parâmetro relaciona-se também com a forma da superfície de ruptura no plano octaédrico (Lade, 1990).

Os incrementos de deformação plástica são calculados através da lei de fluxo e das definições da superfície de plastificação, da lei de endurecimento e da superfície de potencial plástico.

### - Superfície de Plastificação

Como se supõe que o trabalho plástico ( $W_p$ ) é o parâmetro de endurecimento, as superfícies de plastificação são curvas de mesmo valor de trabalho plástico e podem ser obtidas a partir de resultados experimentais. Partindo de observações de inúmeros ensaios triaxiais em diferentes materiais, Lade e Kim (1988a) propuseram a seguinte função de plastificação:

$$F(\{\sigma\}, W_p) = f_p'(\{\sigma\}) - f_p''(W_p) = 0 \quad (3)$$

onde  $\{\sigma\}$  é o tensor das tensões,

$$f_p' = \left( \psi_1 \frac{I_1^3}{I_3} - \frac{I_1^2}{I_2} \right) \left( \frac{I_1}{p_a} \right)^h e^q \quad (4)$$

e  $I_2$  é o segundo invariante de tensão.

Na função de plastificação  $\psi_1$ ,  $h$  e  $q$  são parâmetros do modelo e:

$$f_p'' = \left( \frac{1}{D} \right)^{\frac{1}{\rho}} \left( \frac{W_p}{p_a} \right)^{\frac{1}{\rho}} \quad (5)$$

onde  $D$  e  $\rho$  serão definidos a seguir.

A forma desta superfície de plastificação num plano triaxial pode ser vista na Figura 1 (Lade e Kim, 1988a). Num plano octaédrico, ela tem a mesma forma do modelo anterior, ou seja: triangular com lados curvos e vértices arredondados (Lade, 1977).

O parâmetro  $q$  depende do estado de tensão de tal forma que:  $q=0$  durante compressão isotrópica;  $0 < q < 1$  durante endurecimento; e  $q = 1$  na ruptura.

### - Lei de Endurecimento

A variação do trabalho plástico com o nível de tensão, lei de endurecimento, é obtida através de um ensaio de compressão isotrópica. A partir da observação de uma série destes ensaios em diferentes materiais, Lade e Kim (1988a) propuseram a seguinte equação para expressar esta variação:

$$W_p = cp_a \left( \frac{I_1}{p_a} \right)^p \quad (6)$$

onde  $c$  e  $p$  são parâmetros do modelo.

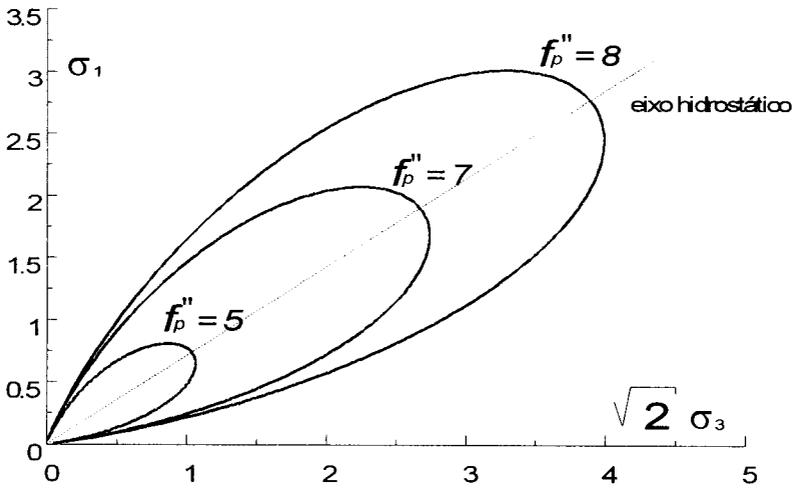


Figura 1 - Superfície de plastificação para diferentes valores de  $f'_p$

O parâmetro  $q$  depende do estado de tensão de tal forma que:  $q=0$  durante a compressão. Para a compressão isotrópica ( $q = 0$ ) a equação 3 reduz-se a:

$$f'_p = (27\psi_1 + 3) \left( \frac{I_1}{p_a} \right)^h \quad (7)$$

Igualando-se esta equação com a equação 5 e substituindo nesta nova equação o valor de  $W_p$  dado pela lei de endurecimento (equação 6) obtém-se:

$$D = \frac{c}{(27\psi_1 + 3)^\rho} \quad (8)$$

onde

$$\rho = \frac{p}{h} \quad (9)$$

### - Superfície de Potencial Plástico

Através dos resultados de um grande número de ensaios de laboratório em diferentes materiais e utilizando tanto planos octaédricos quanto o plano triaxial para visualizar as direções dos incrementos de deformações plástica, Kim e Lade (1988) propuseram a seguinte função de potencial plástico:

$$g_p = \left[ \psi_1 \frac{I_1^3}{I_3} - \frac{I_1^2}{I_2} + \psi_2 \right] \left[ \frac{I_1}{p_a} \right]^\mu \quad (10)$$

onde  $\psi_1$ ,  $\psi_2$  e  $\mu$  são parâmetros do modelo.  $\psi_1$  é um fator de ponderação entre a forma triangular e a circular da superfície de potencial plástico num plano octaédrico;  $\psi_2$  controla a interseção da superfície com o eixo hidrostático e  $\mu$  determina a sua curvatura no plano triaxial.

A Figura 2 mostra esta superfície para diferentes valores de  $g_p$  (Kim e Lade, 1988).

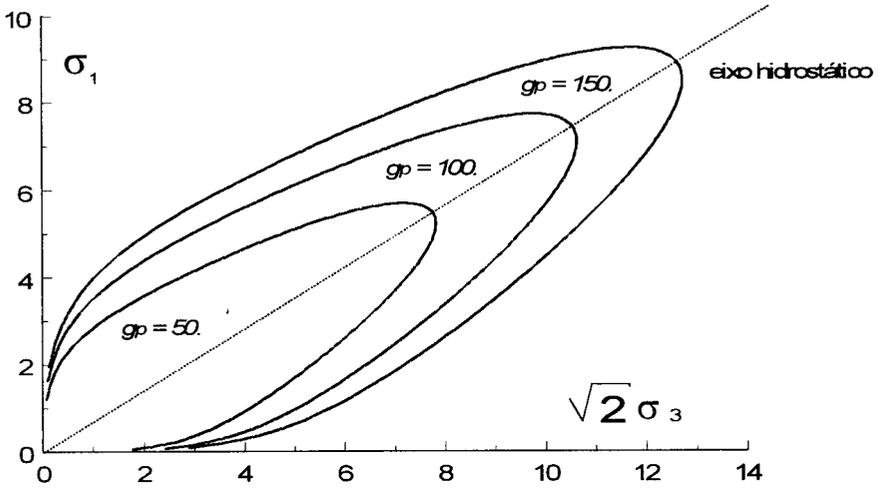


Figura 2 - Interseção de superfícies de potencial plástico com o plano triaxial

Bagio (1995) apresenta interseções das superfícies de potencial plástico com o plano triaxial totalmente diferente das apresentadas na Figura 2. Por esta razão, ele não conseguiu representar o comportamento dilatante nem dos materiais por ele estudado, nem dos materiais apresentados por Lade e Kim (1988b).

Substituindo-se a equação 10 na lei de fluxo:

$$\{d\varepsilon^p\} = d\lambda_p \left\{ \frac{\partial g}{\partial \sigma} \right\} \quad (11)$$

obtem-se as componentes dos incrementos de deformação plásticas:

$$\begin{Bmatrix} d\varepsilon_x^p \\ d\varepsilon_y^p \\ d\varepsilon_z^p \\ d\gamma_{yz}^p \\ d\gamma_{zx}^p \\ d\gamma_{xy}^p \end{Bmatrix} = d\lambda_p \left[ \frac{I_1}{p_a} \right]^\mu \begin{Bmatrix} G - (\sigma_y + \sigma_z) \frac{I_1^2}{I_2^2} - \psi_1 (\sigma_y \sigma_z - \tau_{yz}^2) \frac{I_1^3}{I_3^2} \\ G - (\sigma_z + \sigma_x) \frac{I_1^2}{I_2^2} - \psi_1 (\sigma_z \sigma_x - \tau_{zx}^2) \frac{I_1^3}{I_3^2} \\ G - (\sigma_x + \sigma_y) \frac{I_1^2}{I_2^2} - \psi_1 (\sigma_x \sigma_y - \tau_{xy}^2) \frac{I_1^3}{I_3^2} \\ 2 \frac{I_1^2}{I_2^2} \tau_{yz} - 2 \psi_1 (\tau_{xy} \tau_{zx} - \sigma_x \tau_{yz}) \frac{I_1^3}{I_3^2} \\ 2 \frac{I_1^2}{I_2^2} \tau_{zx} - 2 \psi_1 (\tau_{yx} \tau_{yz} - \sigma_y \tau_{zx}) \frac{I_1^3}{I_3^2} \\ 2 \frac{I_1^2}{I_2^2} \tau_{xy} - 2 \psi_1 (\tau_{yz} \tau_{zx} - \sigma_z \tau_{xy}) \frac{I_1^3}{I_3^2} \end{Bmatrix} \quad (12)$$

onde

$$G = \psi_1 (\mu + 3) \frac{I_1^2}{I_3} - (\mu + 2) \frac{I_1}{I_2} + \psi_2 \mu \frac{1}{I_1} \quad (13)$$

e  $d\lambda_p$  é calculado pela Lei da Consistência,  $dF=0$ , (Melo, 1995):

$$d\lambda_p = - \frac{\left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T \{d\sigma\}}{\frac{\partial F}{\partial W_p} \{\sigma\}^T \left\{ \frac{\partial g}{\partial \sigma} \right\}} \quad (14)$$

Um aspecto que merece atenção, é a verificação da violação da condição de irreversibilidade (Prager, 1949). Para satisfazer tal condição, é necessário que o incremento de trabalho plástico seja positivo sempre que ocorrer uma mudança nas deformações plásticas, ou seja:

$$dW_p = \{\sigma\} \cdot \{d\varepsilon^p\}^T = \{\sigma\} \cdot d\lambda_p \cdot \left\{ \frac{\partial g_p}{\partial \sigma} \right\}^T \geq 0 \quad (15)$$

Para que isto aconteça é necessário que a superfície de potencial plástico seja convexa em relação a origem do espaço das tensões principais. Essa condição é satisfeita se parâmetros apropriados forem utilizados.

Considerando que a função de plastificação é uma função homogênea de grau  $\mu$ ,

$$\{\sigma\} \cdot \left\{ \frac{\partial g_p}{\partial \sigma} \right\}^T = \mu \cdot g_p \quad (16)$$

a equação (15) pode ser escrita como:

$$dW_p = \mu g_p d\lambda_p \quad (17)$$

Como  $d\lambda_p > 0$ , a condição de irreversibilidade requer que:

$$\mu g_p \geq 0 \quad (18)$$

Isto pode ser verificado, observando-se a Figura 3 na qual apresentam-se as diversas combinações possíveis de  $\mu$  e  $g_p$  e as respectivas direções dos incrementos de deformação plástica.

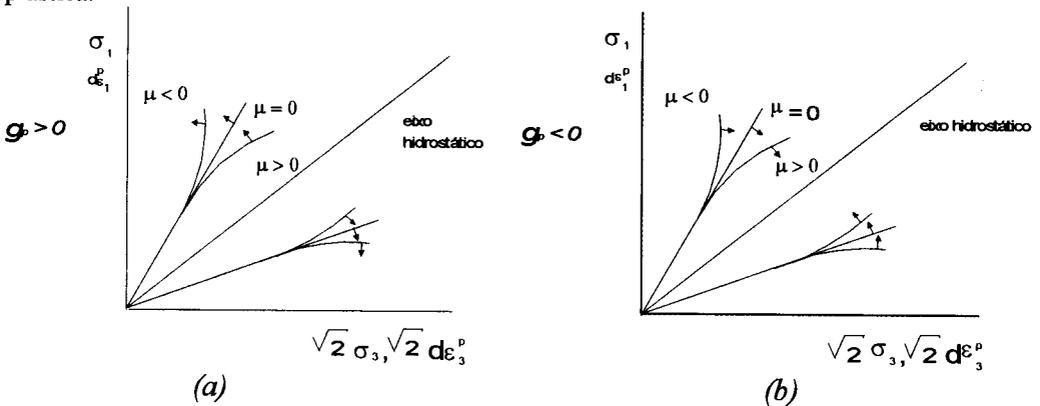


Figura 3 - Combinação do potencial plástico  $g_p$  e do parâmetro  $\mu$  no plano triaxial.

Verifica-se que, quando  $g_p$  é negativo, os incrementos de deformação plástica direcionam-se para o interior da superfície de plastificação o que, obviamente, não é possível. Logo, um valor de  $g_p$  negativo não é apropriado para uma função de potencial plástico. Então, a única possibilidade para que a desigualdade anterior seja satisfeita é:

$$\mu > 0 \text{ e } g_p \geq 0 \quad (19)$$

$$\text{Como } \frac{I_1^3}{I_3} \geq 27, \left( -\frac{I_1^2}{I_2} \right) \geq 3 \text{ e } \frac{I_1}{p_a} > 0 \text{ (o sinal de igualdade é atendido quando}$$

$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ ) a condição de irreversibilidade recai sobre as seguintes condições:

$$\mu > 0 \text{ e } \psi_2 > -(27\psi_1+3) \quad (20)$$

Caso esta condição seja violada, verifica-se que, em um dado instante da reprodução das curvas tensão-deformação de ensaios triaxiais convencionais, o valor do incremento da deformação axial se torna negativo, como mostra a Figura 4, o que não é razoável.

Torna-se, portanto, essencial que  $\psi_1$ ,  $\psi_2$ , e  $\mu$  respeitem às condições impostas pela equação 20. Observa-se que as curvas de tensão deformação obtidas com este mesmo modelo por Iturri (1991) não apresentaram este comportamento estranho apesar de seus parâmetros violarem esta condição.

### 3 - DETERMINAÇÃO DOS PARÂMETROS DO MODELO

Os valores dos parâmetros do modelo elasto-plástico são calculados a partir de resultados de ensaios de compressão isotrópica e triaxiais convencionais de compressão (pressão confinante constante, drenados, com medição de variação de volume).

#### - Parâmetros Elásticos

A partir de dados de descarregamento-recarregamento em ensaios de tensão-deformação é possível determinar valores de  $E_{ur}$  correspondentes a diferentes valores de  $\sigma_3$  e reescrevendo a equação 1 como:

$$\log \left( \frac{E_{ur}}{p_a} \right) = \log(K_{ur}) + n \log \left( \frac{\sigma_3}{p_a} \right) \quad (21)$$

a inclinação da melhor reta, num gráfico  $\log\text{-}\log$ , que se ajuste aos valores experimentais, fornece o valor de  $n$  e o seu intercepto com  $\frac{\sigma_3}{p_a} = 1$  fornece o valor de  $K_{ur}$ .

#### - Parâmetros de Ruptura

Através da equação 2 percebe-se que tomando-se as tensões correspondentes aos pontos de ruptura nos ensaios triaxiais de compressão drenados (CD) e desenhando, num gráfico  $\log\text{-}\log$ ,

$\log \left( \frac{I_1^3}{I_3} - 27 \right)$  versus  $\left( \frac{I_1}{p_a} \right)^n$  obtém-se  $m$  pela inclinação da reta que melhor se ajusta aos

pontos plotados e  $\eta_l$  pelo intercepto desta reta com  $\frac{p_a}{I_1} = 1$ .

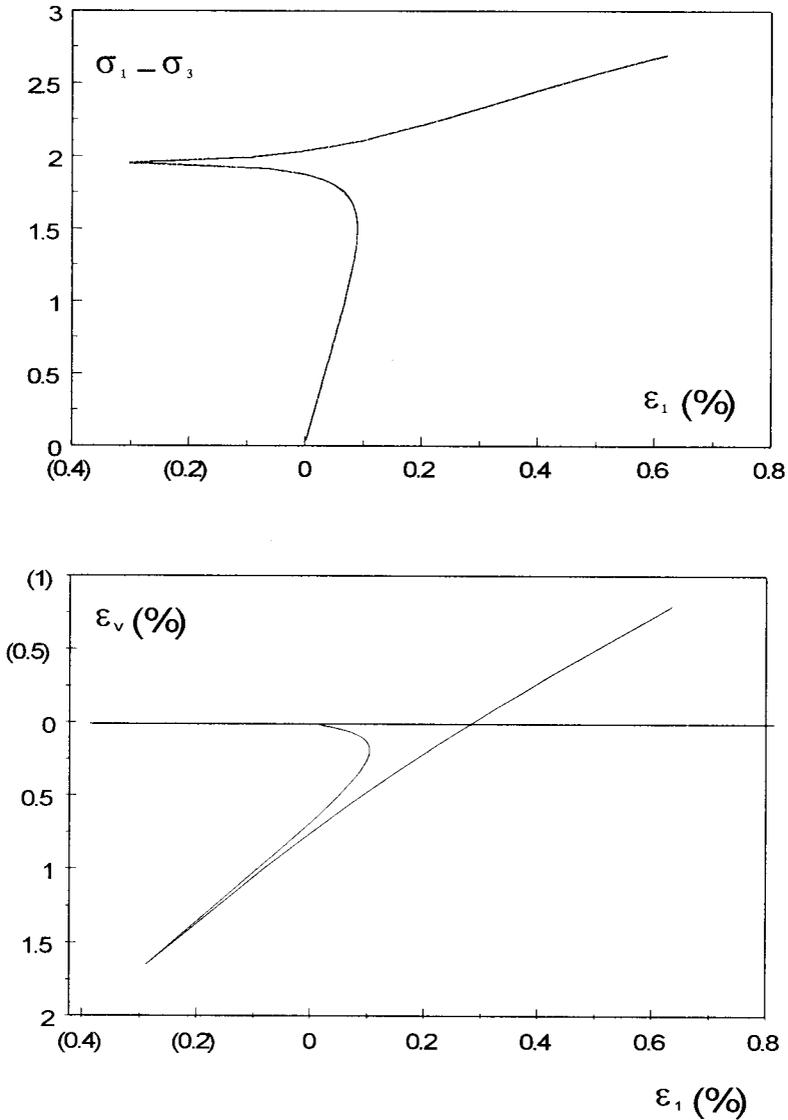


Figura 4 - Reprodução do ensaio triaxial convencional da Areia Densa de Monterey afetada pela condição de irreversibilidade não-satisfeita ( $\sigma_3/p_a = 0,6$ )

### - Parâmetros de Endurecimento

Estes parâmetros podem ser obtidos através da equação 6. De posse dos parâmetros elásticos, obtêm-se as deformações plásticas do ensaio de compressão isotrópica e desenha-se num gráfico do tipo  $\log\text{-}\log \frac{I_1}{p_a} \times \frac{W_p}{p_a}$ . A inclinação da reta que se ajusta melhor pelos pontos será  $p$  e o seu intercepto com  $\frac{I_1}{p_a} = 1$  será  $c$ .

### - Parâmetros do Potencial Plástico

Como mencionado anteriormente,  $\psi_1$  controla a forma da função do potencial plástico em planos octaédricos. Kim e Lade (1988) propõem uma relação entre  $\psi_1$  e o ângulo do incremento plástico nestes planos. Os mesmos autores observaram uma relação entre  $\psi_1$  e o parâmetro de ruptura  $m$ , expressa pela função:

$$\psi_1 = 0,00155m^{-1,27} \quad (22)$$

Esta correlação apresenta excelentes resultados e elimina a necessidade de testes mais complicados nos quais  $\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \sigma_3$ .

Calculado  $\psi_1$ , os parâmetros  $\psi_2$  e  $\mu$  podem ser determinados através do procedimento mostrado a seguir.

Expressando a razão de deformação incremental plástica como:

$$\nu_p = -\frac{d\varepsilon_3^p}{d\varepsilon_1^p} \quad (23)$$

e considerando os valores dos incrementos de deformação plástica dados na equação 12 para uma condição de compressão triaxial ( $\sigma_2 = \sigma_3$ ) obtém-se a seguinte equação:

$$\xi_y = \frac{1}{\mu} \xi_x - \psi_2 \quad (24)$$

onde,

$$\xi_x = \frac{1}{1 + \nu_p} \left\{ \frac{I_1^3}{I_2^2} (\sigma_1 + \sigma_3 + 2\nu_p \sigma_3) + \psi_1 \frac{I_1^4}{I_3^2} (\sigma_1 \sigma_3 + \nu_p \sigma_3^2) \right\} - 3\psi_1 \frac{I_1^3}{I_3} + 2 \frac{I_1^2}{I_2} \quad (25)$$

e

$$\xi_y = \psi_1 \frac{I_1^3}{I_3} - \frac{I_1^2}{I_2} \quad (26)$$

Já se tendo obtido os valores dos parâmetros elásticos e de ruptura é possível calcular, para cada nível de tensão, valores de  $\nu_p$  e, conseqüentemente, os valores de  $\xi_x$  e  $\xi_y$ .

Plotando-se  $\xi_x$  x  $\xi_y$  e ajustando-se a melhor reta, obter-se-á pela sua inclinação  $\frac{1}{\mu}$  e pelo

valor do intercepto em  $\xi_y$  para  $\xi_x = 0$ ,  $-\psi_2$ .

Este procedimento poderá produzir parâmetros que não satisfaçam a condição de irreversibilidade apresentada na equação 20. Quando tal fato ocorrer, é necessário adotar valores que satisfaçam aquela condição.

### - Parâmetros de Plastificação

Com os parâmetros obtidos anteriormente restam apenas os parâmetros  $h$  e  $q$  para que a função de plastificação fique determinada. O parâmetro  $h$  assume um valor constante e pode ser obtido considerando-se que dois pontos (A e B) numa mesma superfície de plastificação possuem o mesmo valor de trabalho plástico e, conseqüentemente, o mesmo valor de  $f_p$ , ou seja:

$$\left( \psi_1 \frac{I_{1A}^3}{I_{3A}} - \frac{I_{1A}^2}{I_{2A}} \right) \left( \frac{I_{1A}}{P_a} \right)^h e^{q_A} = \left( \psi_1 \frac{I_{1B}^3}{I_{3B}} - \frac{I_{1B}^2}{I_{2B}} \right) \left( \frac{I_{1B}}{P_a} \right)^h e^{q_B} \quad (27)$$

Se o ponto  $A$  está sobre o eixo hidrostático ( $q=0$ ) e  $B$  está na envoltória de ruptura ( $q=1$ ) pode-se escrever a equação acima como:

$$(27\psi_1 + 3) \left( \frac{I_{1A}}{p_a} \right)^h = \left( \psi_1 \frac{I_{1B}^3}{I_{3B}} - \frac{I_{1B}^2}{I_{2B}} \right) \left( \frac{I_{1B}}{p_a} \right)^h e \quad (28)$$

daí,

$$h = \log \frac{\left( \psi_1 \frac{I_{1B}^3}{I_{3B}} - \frac{I_{1B}^2}{I_{2B}} \right) e}{27\psi_1 + 3} / \log \frac{I_{1A}}{I_{1B}} \quad (29)$$

onde  $e$  é a base do logaritmo neperiano.

Nota-se que para cada valor de tensão confinante tem-se um valor independente para  $h$ . Como não há uma grande variação de  $h$  com  $\sigma_3$ , adota-se, por simplicidade, um valor médio, independente de  $\sigma_3$ .

O valor  $q$  varia com o nível de tensão  $S$  que é definido como:

$$S = \frac{f_n}{\eta_1} = \frac{1}{\eta_1} \left( \frac{I_1^3}{I_3} - 27 \right) \left( \frac{I_1}{p_a} \right)^m \quad (30)$$

O valor de  $S$  varia de 0 no eixo hidrostático até 1 na ruptura.

Através das equações 3,4 e 5 pode-se escrever:

$$q = \ln \frac{\left( \frac{W_p}{Dp_a} \right)^{1/\rho}}{\left( \psi_1 \frac{I_1^3}{I_3} - \frac{I_1^2}{I_2} \right) \left( \frac{I_1}{p_a} \right)^h} \quad (31)$$

Apenas a região compreendida entre  $0 \leq q \leq 1$  é de interesse. Com isso a relação entre  $q$  e  $S$  pode ser descrita por uma relação hiperbólica:

$$S = \frac{q}{\alpha + \beta q} \quad (32)$$

Como essa curva passa pelo ponto  $q=1, S=1$  o valor de  $\beta$  é dado por:

$$\beta = 1 - \alpha \quad (33)$$

Lade e Kim (1988a) sugerem que o melhor valor de  $q$  é obtido quando  $S=0,80$ . Substituindo esse valor na equação 32 tem-se:

$$\alpha = \frac{1-S}{S} \frac{q}{1-q} = \frac{1}{4} \frac{q_{80}}{1-q_{80}} \quad (34)$$

Conhecido o valor do parâmetro  $\alpha$ ,  $q$  pode ser obtido através das equações 32 e 33 como:

$$q = \frac{\alpha S}{1 - (1 - \alpha)S} \quad (35)$$

Nesta equação nota-se que a relação entre  $S$  e  $q$  torna-se convexa, linear ou côncava em função de  $\alpha$  ser respectivamente maior, igual ou menor que a unidade (Melo, 1995).

#### 4 - ANÁLISE DA BARRAGEM DE BELICHE DURANTE A CONSTRUÇÃO

A Barragem de Beliche, localizada ao sul de Portugal, tem 54m de altura máxima e 522m de comprimento na crista. Foi construída num local que apresenta uma formação aluvionar de areia e seixos com espessura aproximada de 10 metros. Trata-se de uma barragem de enrocamento com núcleo argiloso assentado em rocha, conforme mostra o esquema da sua seção central apresentada na Figura 5 (Veiga Pinto, 1982 e 1983; Naylor *et al.*, 1986; e Azevedo e Azevedo Filho, 1994).

Os materiais utilizados na construção da barragem de Beliche foram extensivamente estudados pelo Laboratório Nacional de Engenharia Civil de Portugal (Veiga Pinto, 1982 e 1983).

A seguir serão apresentados os gráficos correspondentes à calibração do enrocamento são sêco. A calibração e reprodução dos ensaios dos outros materiais apresentaram um comportamento semelhante às do enrocamento são sêco, de forma que todas as observações feitas para este material são válidas para os demais materiais. A calibração e reprodução dos outros materiais podem ser encontrados em Melo (1995).

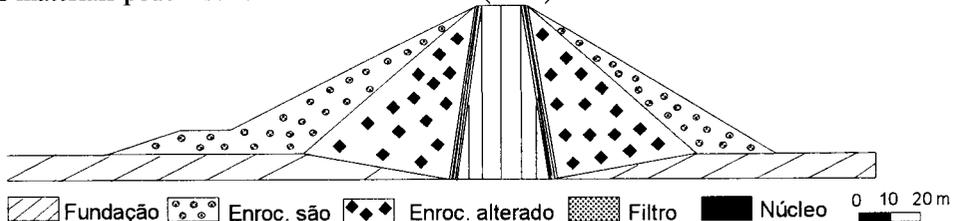


Figura 5 - Aspecto geral da seção central da Barragem de Beliche

A calibração apresentada para o enrocamento são sêco, assim como a calibração dos demais materiais, foi realizada fazendo-se uso de um programa que recebe como dados de entrada os parâmetros elásticos e os dados dos ensaios hidrostático e triaxiais e fornece como resultado os parâmetros de ruptura, de endurecimento, da função de potencial plástico e da função de plastificação.

##### **- Parâmetros elásticos**

Como não se dispunha de ciclos de descarregamento-recarregamento para os materiais da barragem de Beliche, os valores utilizados foram os mesmos apresentados por Azevedo e Azevedo Filho (1994).

##### **-Parâmetros de ruptura**

A Figura 6 apresenta o gráfico que permitiu a obtenção dos parâmetros de ruptura.

##### **- Parâmetros de endurecimento**

A Figura 7 apresenta o ajuste para a obtenção dos parâmetros de endurecimento.

##### **- Parâmetros da função de potencial plástico**

A Figura 8 ilustra o cálculo dos parâmetros necessários para a definição da função de potencial plástico.

##### **- Parâmetros da função de plastificação**

Os parâmetros que definem a função de plastificação são  $h$  e  $\alpha$ . O parâmetro  $h$  varia pouco com a pressão de confinamento, tendo sido adotado o valor médio  $h = 1,44$ .

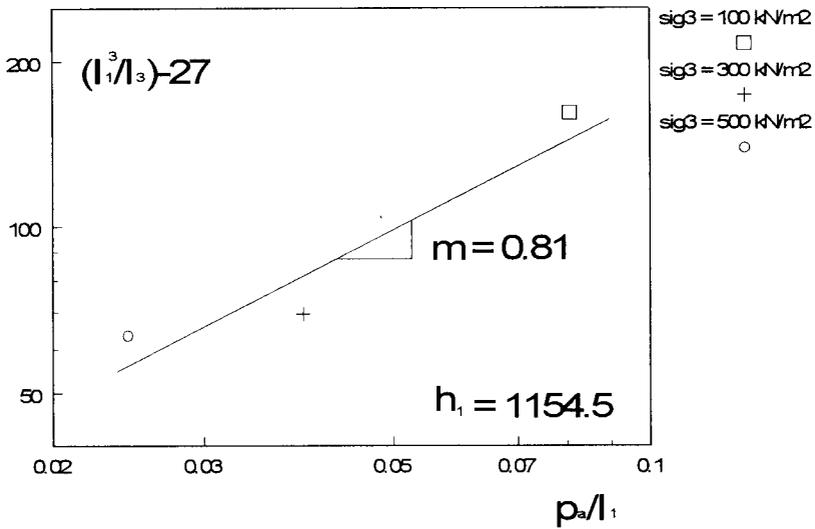


Figura 6 - Parâmetros de ruptura - enrocamento são sêco

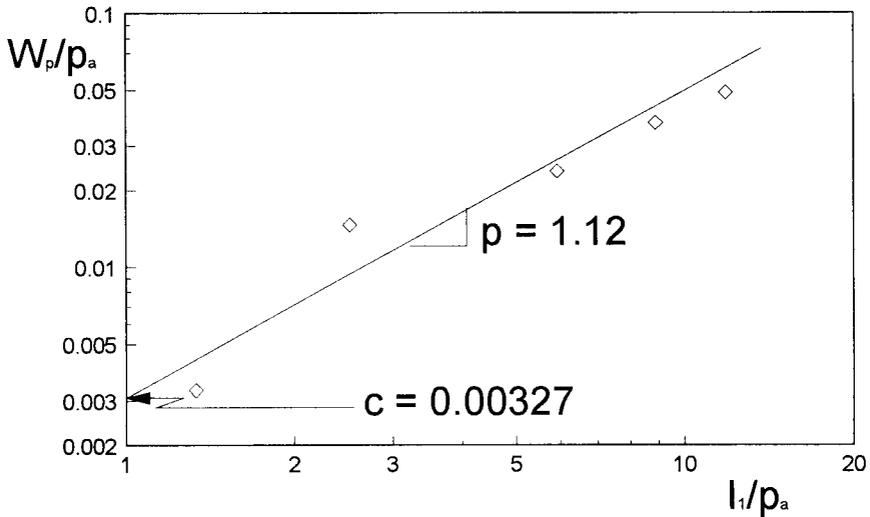


Figura 7 - Parâmetros de endurecimento - enrocamento são sêco

A Figura 9 mostra a relação entre  $S$  e  $q$  necessária para a definição do parâmetro  $\alpha$ . Os parâmetros obtidos para os diversos materiais estão apresentados na Tabela 1.

Tabela 1  
Parâmetros obtidos na calibração.

	Kur	n	v	m	$\eta_1$	c	p	$\psi_2$	$\mu$	h	$\alpha$
Enroc. São seco	1000	0,17	0,17	0,81	1154,5	0,0033	1,12	-3,06	4,54	1,44	0,10
Enroc. Alterado seco	700	0,65	0,30	0,64	358,0	0,0038	1,09	-2,94	3,03	0,95	0,43
Material do filtro	2000	0,35	0,40	0,40	145,8	0,0034	0,96	-3,13	3,84	0,63	0,44
Material do núcleo	180	0,50	0,23	0,85	150,2	0,00088	1,38	-3,05	2,70	0,52	0,33
Mat. da fundação	1700	0,90	0,26	0,25	61,32	0,0011	1,27	-3,22	3,23	0,54	0,51

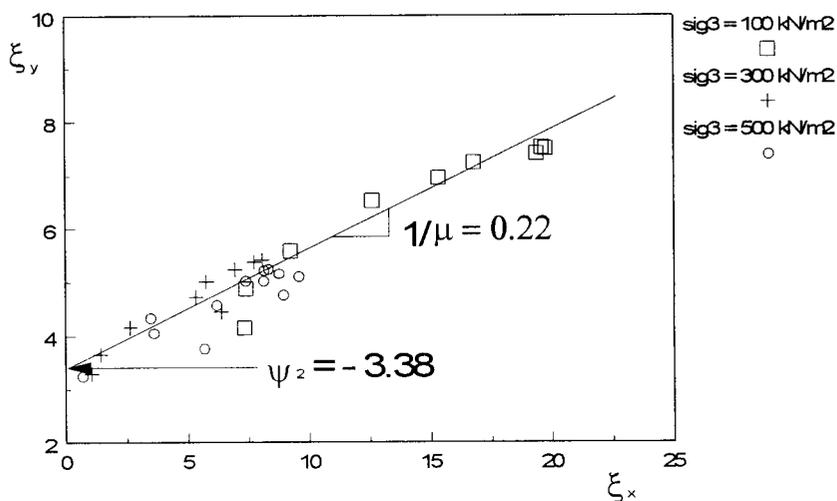


Figura 8 - Parâmetros da função do potencial plástico - Enrocamento são seco

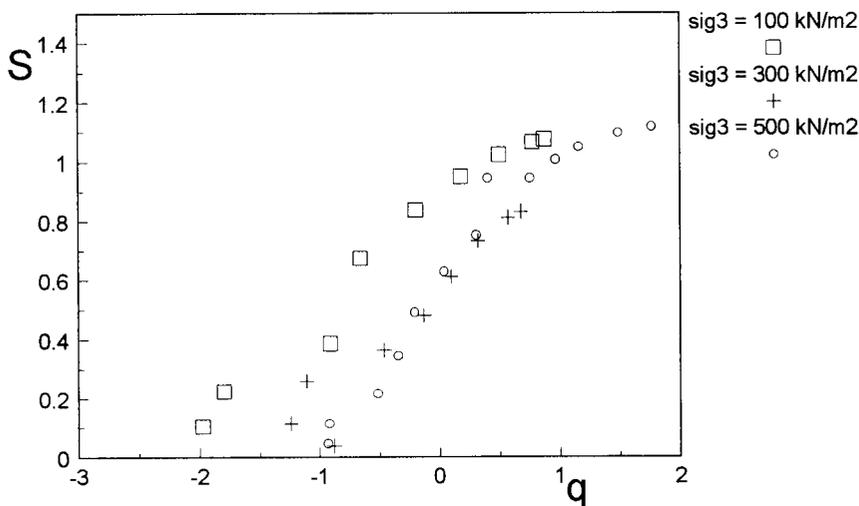


Figura 9 - Relação entre S e q - Enrocamento são seco

Conhecendo-se o conjunto de parâmetros para cada material da barragem de Beliche, procedeu-se à reprodução dos ensaios de laboratório. Na Figura 10 apresenta-se a comparação entre os resultados experimentais e analíticos para o enrocamento são sêco, verificando-se uma discordância acentuada, inesperada face as correlações satisfatórias obtidas durante a calibração.

A calibração dos materiais de acordo com o procedimento convencional não produziu um conjunto de parâmetros capaz de prever adequadamente os resultados experimentais. Resta saber se estas previsões ruins se devem a uma grande sensibilidade do modelo às pequenas variações no valor dos seus parâmetros, o que será estudado a seguir, ou a uma incapacidade do modelo de representar o comportamento dos solos em estudo.

Suanno (1994) propôs um modelo tridimensional para representar o comportamento tensão-deformação de concretos e, em seu trabalho, a obtenção dos parâmetros é realizada

através de um programa que utiliza um algoritmo de otimização evolucionário (Schwefel, 1980). Este algoritmo é muito robusto, convergindo quase sempre ao mínimo global, não sendo necessário calcular as derivadas da função objetivo (algoritmo de ordem zero). Por diversas razões, este mesmo programa foi utilizado aqui. A primeira delas foi a facilidade em obtê-lo. Outra razão foi a simplicidade encontrada na implementação da função objetivo. Esta simplicidade se deve ao fato de o programa ser dividido em módulos, sendo necessário apenas alterar-se o módulo correspondente a esta função. Neste módulo, a função objetivo implementada foi a apresentada na equação 36. Os valores correspondentes as deformações calculadas foram obtidos a partir de um programa desenvolvido para calcular incrementos de deformação a partir de incrementos de tensão com o modelo de Lade e Kim (Melo, 1995). Neste caso os incrementos de tensão são dados pela diferença entre dois pontos consecutivos dos ensaios de laboratório.

A obtenção dos parâmetros foi feita utilizando-se os resultados dos ensaios triaxiais convencionais de compressão. Conhecendo-se as curvas tensão-deformação experimentais, propõe-se a seguinte função objetivo a ser minimizada:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi(\mathbf{P}) = \sum_{i=1}^{ne} \sum_{j=1}^{np} \left\{ \left\| \varepsilon_{1j}(\mathbf{P}, \sigma_j^{\text{exp}}) - \varepsilon_{1j}^{\text{exp}} \right\|^2 + \left\| \varepsilon_{vj}(\mathbf{P}, \sigma_j^{\text{exp}}) - \varepsilon_{vj}^{\text{exp}} \right\|^2 \right\} \\ \mathbf{P} = \{K_{ur}, n, \nu, m, \eta_l, c, p, \psi_2, \mu, h, \alpha\} \end{array} \right. \quad (36)$$

onde  $\mathbf{P}$  é o vetor dos parâmetros,  $ne$  é o número de ensaios utilizados e  $np$  é o número de pontos de cada ensaio. Os valores das deformações axiais e volumétricas calculadas pelo programa são dados respectivamente por  $\varepsilon_{1j}(\mathbf{P}, \sigma_j^{\text{exp}})$  e  $\varepsilon_{vj}(\mathbf{P}, \sigma_j^{\text{exp}})$ ;  $\varepsilon_{1j}^{\text{exp}}$ ,  $\varepsilon_{vj}^{\text{exp}}$  e  $\sigma_j^{\text{exp}}$  são as deformações e tensões experimentais correspondentes aos diversos pontos dos ensaios.

O vetor dos parâmetros fornecido no início do procedimento, foi aquele encontrado pelo procedimento padrão apresentado na seção anterior. Foram utilizadas restrições laterais, ou seja, eram fornecidos os limites máximos e mínimos para os parâmetros.

Na Tabela 2 são apresentados os valores encontrados por este procedimento. Os parâmetros  $m$  e  $\eta_l$  são os mesmos da Tabela 1 e o valor de  $\nu$  foi mantido constante e igual a 0,3 para todos os materiais.

A Figura 12 apresenta comparações entre os resultados experimentais e analíticos calculados com o novo conjunto de parâmetros obtido pelo procedimento de otimização para o enrocamento são seco. Com este novo conjunto de parâmetros verifica-se uma concordância satisfatória, com certeza bem melhor que a obtida anteriormente.

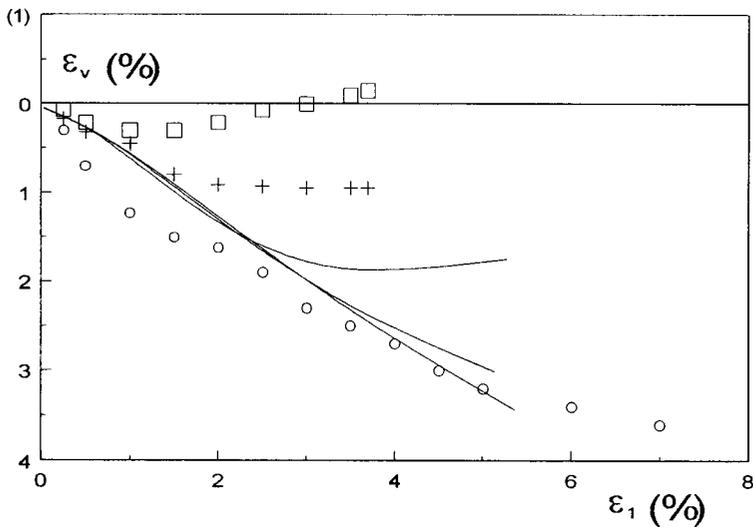
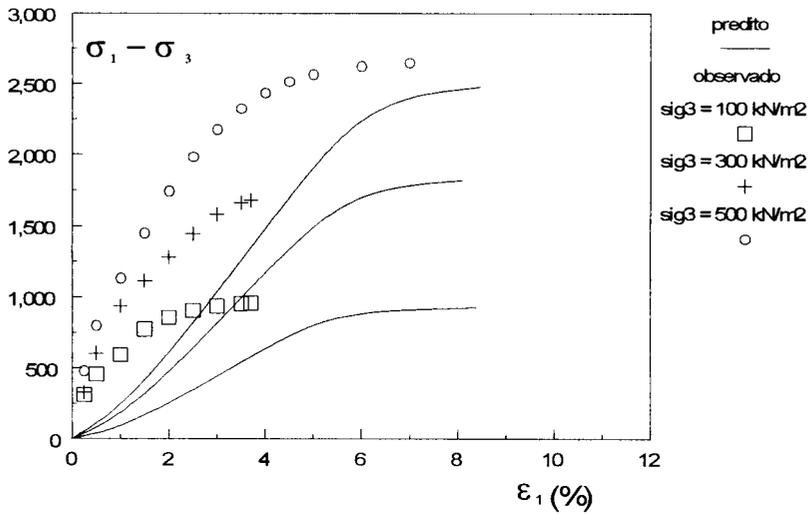


Figura 10 - Comparação entre resultados observados e preditos para o Enrocamento são seco

Tabela 2  
Parâmetros obtidos através de um algoritmo evolutivo

	$K_{ur}$	$n$	$c$	$p$	$\psi_2$	$\mu$	$h$	$\alpha$
Enroc. São seco	2000	0,10	0,000092	1,99	-2,75	3,74	1,12	0,33
Enroc. Alterado seco	10000	0,10	0,000067	2,44	-2,96	3,11	1,63	0,40
Material do filtro	10000	0,10	0,00245	1,27	-2,91	2,76	1,58	0,016
Material do núcleo	256	0,64	0,00048	1,69	-3,02	2,09	0,51	1,19
Material da fundação	2000	0,1	0,00094	1,68	-2,88	2,29	1,08	0,35

A utilização do modelo de Lade e Kim num programa de elementos finitos requer a obtenção da matriz elasto-plástica [Dep],

$$\{\partial\sigma\} = [D^{ep}] \cdot \{\partial\varepsilon^p\} \quad (37)$$

O desenvolvimento desta matriz a partir das equações apresentadas no item 2 deste artigo pode ser encontrado em Melo (1995).

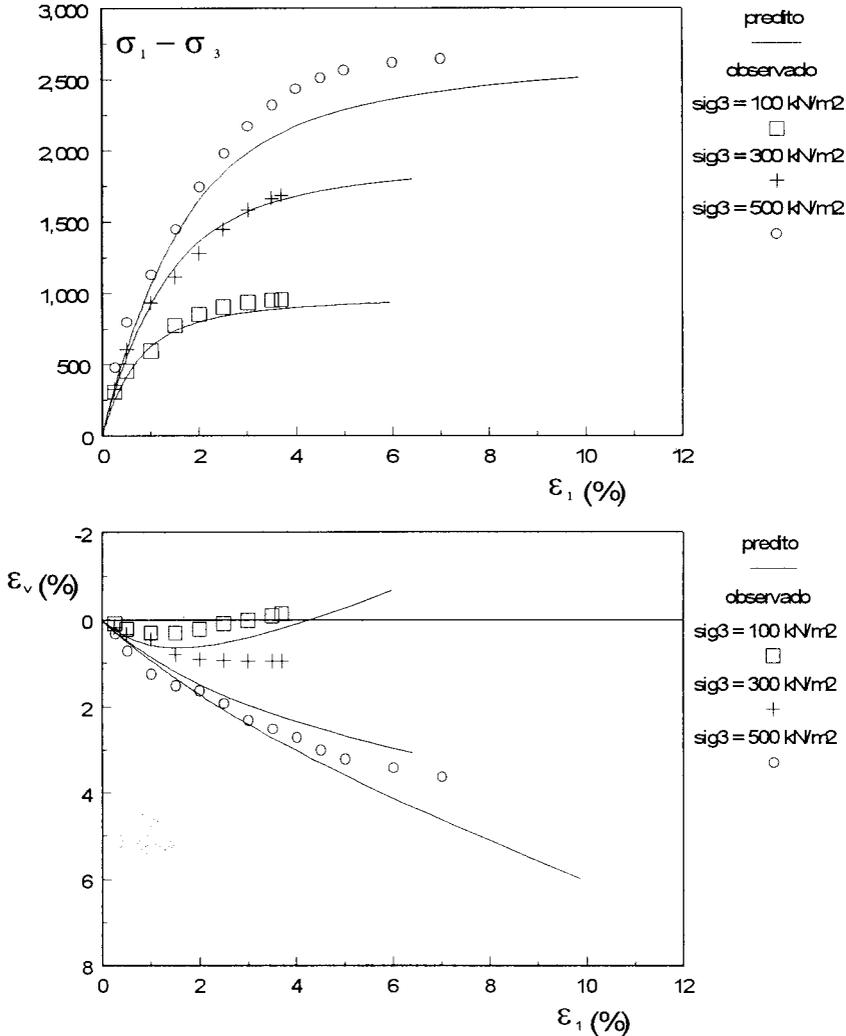


Figura 11 - Comparação entre resultados observados e preditos para o Enrocamento são seco

A malha de elementos finitos e a disposição dos materiais usada na análise da barragem de Beliche são apresentadas na Figura 12. A malha é constituída de 116 elementos e 399 nós. Os elementos utilizados foram isoparamétricos de oito nós.

O método utilizado para representar a construção da barragem, foi o de ativar as forças de peso próprio (*turn-on gravity*) dos elementos. Para possibilitar este procedimento impôs-se aos

elementos aterrados uma tensão inicial confinante de  $\frac{\sigma}{p_a} = 1$ .

A simulação do processo construtivo foi bastante simples: (i) caracterização do estado de tensões iniciais na fundação antes do início da construção, e (ii) simulação da construção da barragem em 8 camadas.

Os pesos específicos dos materiais estão apresentados na Tabela 3 (Veiga Pinto, 1983):

Tabela 3  
Pesos específicos dos materiais

	Enroc. São	Enroc. alterado	Filtro	Núcleo	Fundação
$\gamma$ (kN/m <sup>3</sup> )	20,5	18,2	21,7	21,8	17,9

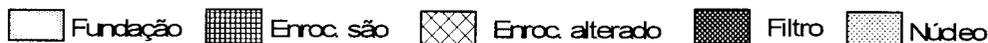
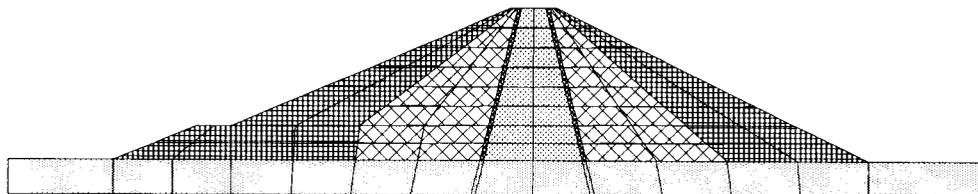


Figura 12 - Malha de elementos finitos e materiais da barragem de Beliche para efeito de análise

A Figura 13 apresenta isofaixas de tensões verticais, podendo-se observar o efeito de arqueamento, típico de barragens de enrocamento com núcleo argiloso. Os valores encontrados estão muito próximos dos valores obtidos em análise anteriores (Azevedo e Azevedo Filho, 1994; Naylor *et al.*, 1986).

As Figuras 14 e 15 apresentam isofaixas de, respectivamente, tensões horizontais e tensões de cisalhamento.

A Figura 16 apresenta isofaixas de mesmo nível de tensão, definido como:

$$NT = \left( \frac{I_1^3}{I_3} - 27 \right) \left( \frac{I_1}{p_a} \right)^m / \eta_1 \quad (38)$$

Pode-se verificar que todos os pontos da barragem encontram-se afastados da ruptura ( $NT = 1$ ). Como era de se esperar, ocorreu alguma concentração de tensões nos elementos do filtro e da fundação, nesta última, especialmente próximo ao talude de jusante.

Na Figura 17 apresenta-se isofaixas de mesmo deslocamento vertical. Qualitativamente a distribuição é muito semelhante à encontrada nos trabalhos anteriores (Azevedo e Azevedo Filho, 1994; Naylor *et al.*, 1986); quantitativamente, porém, os valores encontrados no presente trabalho são quase duas vezes maiores do que os valores encontrados nos trabalhos anteriores.

Na Figura 18 são apresentadas isofaixas de mesmo deslocamento horizontal, sendo pertinente observar dois pontos. Primeiro, que a distribuição obtida, na qual os maiores valores ocorrem na parte inferior dos taludes de montante e jusante, é coincidente com os resultados obtidos por Naylor *et al.* (1986) e não corresponde com a distribuição encontrada por Azevedo e Azevedo Filho (1994), na qual os maiores deslocamentos horizontais ocorreram na parte superior dos taludes. Segundo, que os valores encontrados neste trabalho são maiores que os valores encontrados nos trabalhos anteriores.

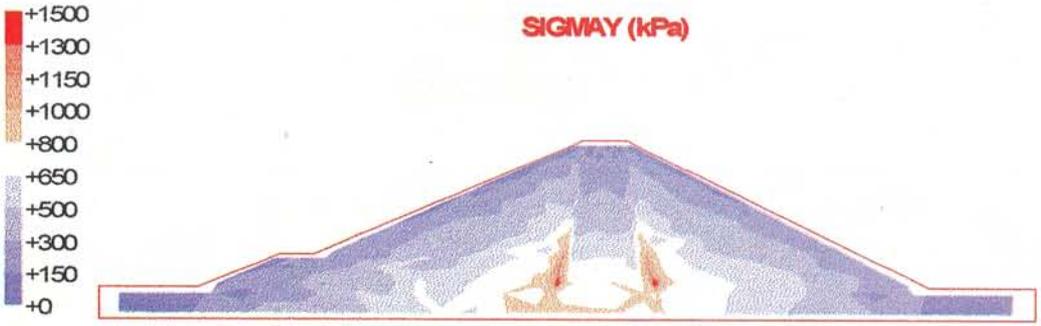


Figura 13 - Distribuição das tensões verticais no final da construção (kPa)

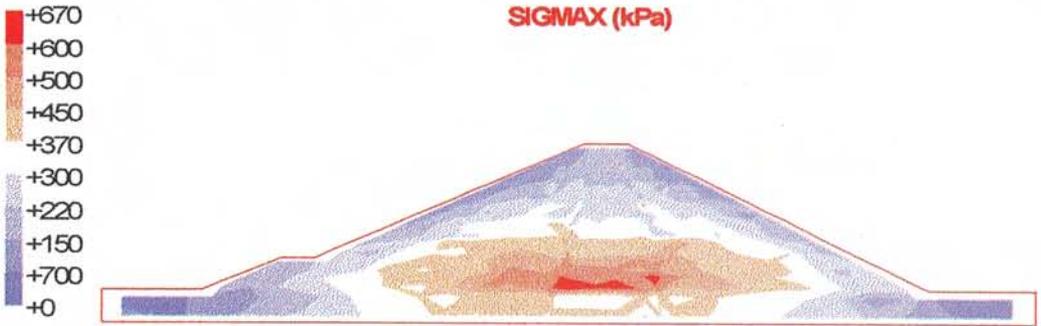


Figura 14 - Distribuição das tensões horizontais no final da construção (kPa)

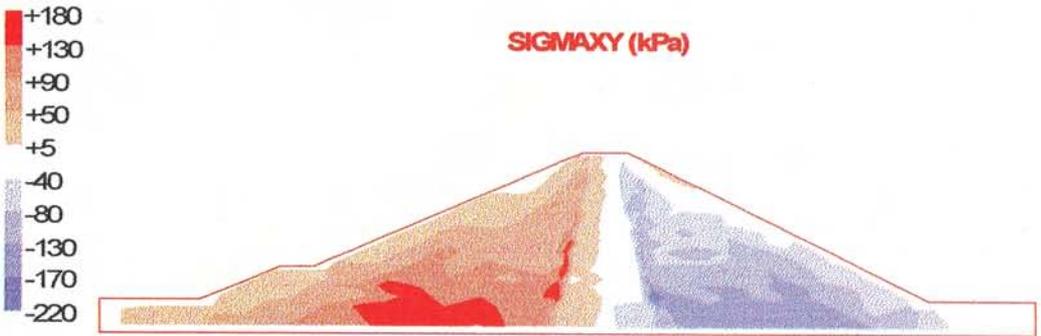


Figura 15 - Distribuição das tensões cisalhantes no final da construção (kPa)



Figura 16 - Distribuição do nível de tensão no final da construção



Figura 17 - Isofaixas de deslocamentos verticais no final da construção.



Figura 18 - Isofaixas de deslocamento horizontal no final da construção.

## 5 - CONCLUSÕES

O objetivo deste trabalho foi estudar o modelo elasto-plástico de Lade e Kim e analisar o comportamento da barragem de Beliche, durante a sua construção, utilizando este modelo.

Os parâmetros obtidos para os materiais da referida barragem, através do procedimento convencional, não reproduziram corretamente os resultados dos ensaios. Em vista disto, apresentou-se um procedimento de calibração que consistiu na otimização dos parâmetros obtidos anteriormente, desta forma conseguindo-se uma reprodução dos ensaios bastante satisfatória.

Os resultados obtidos na análise da construção da barragem de Beliche foram semelhantes ao encontrados na literatura (Naylor *et al.*, 1986; Azevedo e Azevedo Filho, 1994).

A distribuição das tensões é consistente, tendo-se verificado, por exemplo, que o diagrama das tensões verticais apresenta claramente o fenômeno de arqueamento devido às diferentes compressibilidades do material do núcleo e do enrocamento.

A distribuição da componente vertical dos deslocamentos obtida na presente análise foi bastante semelhante com as encontradas nas análises anteriores (Naylor *et al.*, 1986; Azevedo e Azevedo Filho, 1994). Já, a componente horizontal teve uma distribuição semelhante àquela encontrada por Naylor *et al.* (1986), na qual os maiores valores ocorrem na parte inferior dos taludes de montante e jusante, e não corresponde com a distribuição encontrada por Azevedo e Azevedo Filho (1994), na qual os maiores deslocamentos horizontais ocorreram na parte superior dos taludes. Ressalte-se, porém, que os deslocamentos calculados na presente análise são maiores do que os obtidos nas análises anteriores.

Finalmente conclui-se que a experiência adquirida com o novo modelo de Lade e Kim não foi totalmente bem sucedida. Se, por um lado, o modelo demonstrou ser mais consistente e

simples de ser compreendido e implementado do que o anterior, por outro lado, seus parâmetros apresentaram-se bastante sensíveis a pequenas mudanças o que, obviamente, não é bom.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- AZEVEDO, R. F. e AZEVEDO FILHO, R. N. - *Elasto-plastic analysis of Beliche dam during construction e first impounding*. Proceedings of the First Workshop on Applications of Computational Mechanics in Geotechnical Engineering, Rio de Janeiro, Brazil, 29-31 July, 1991, Edited by E. A. Vargas; R. F. Azevedo; L. M. Ribeiro e Sousa and M. Matos Fernandes, p. 317-339, 1994.
- AZEVEDO, R. F. e KO, H.-Y. - *Finite element analysis of centrifugal excavations*. Proceedings of the Third International Conference on Computational Methods and Experimental Measurements, Porto Caras, Greece, p. 739-748, 1986.
- BAGIO, D. - *Estudo experimental e numérico do comportamento de estacas em areia*. Tese de Mestrado, COPPE / UFRJ, Brasil, p. 115, 1995.
- BICALHO, K. V. e AZEVEDO, R. F. - *Modelagem das características de deformabilidade e resistência de uma areia*. Solos e Rochas, Revista Brasileira de Geotecnia, Vol. 17, No. 2, p. 111-121, 1994.
- BULL, J. W. - *Soil-Structure interaction: numerical analysis and modelling*. Edited by John W. Bull, E & FN Spon, p. 727, 1994.
- CLOUGH, R. W. e WOODWARD, R. J. - *Analysis of embankment stresses and deformations*. Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE, SM 4, p. 529-549, 1967.
- DUNCAN, J. M.; BYRNE, P.; WONG, K. S. e MABRY, P. - *Strength, stress-strain and bulk modulus parameters for finite element analyses of stresses and movements in soil mass*. Report no. UCB/GT/78-02 to National Science Foundation, University of California, Berkeley, 1979.
- GUDEHUS, G.; DARVE, F. e VARDOULAKIS, I. - *Constitutive relations for soils*. Results of the International Workshop on Constitutive Relations for Soils, Grenoble, 6-8 september, 1982. Edited by Gudehus, G.; Darve, F. and Vardoulakis, I.. A. A. Balkema, p. 497, 1984.
- ITURRI, E. A. Z. - *Análise elasto-plástica da construção de aterro*. Tese de Mestrado, COPPE / UFRJ, Brasil, 1991.
- JANBU, N. - *Soil compressibility as determined by oedometer and triaxial tests*. Proceedings of the European Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, Vol. 1, Wiesbaden, p. 19-25, 1963.
- KIM, M. K. e LADE, P. V. - *Single hardening constitutive model for frictional materials - I. Plastic Potential Function*. Computers and Geotechnics, vol. 5, p. 307-324, 1988.
- LADE, P. V. - *Elasto-plastic stress-strain theory for cohesionless soil with curved yield surfaces*. International Journal of Solids and Structures, vol. 13, p. 1019-1035, 1977.
- LADE, P. V. - *Stress-strain theory for normally consolidated clay*. Proceedings of the Third International Conference on Numerical Methods in Geomechanics, vol. 4, Aachen, p. 1325-1337, 1979.
- LADE, P. V. - *Single hardening model with application to normally consolidated clay*. Journal of the Geotechnical Engineering Division, ASCE, GT 3, p. 394-414, 1990.

- LADE, P. V. e KIM, M. K. - *Single hardening constitutive model for frictional materials - II. Yield criterion and plastic work contour*. Computers and Geotechnics, vol. 6, p. 13-29, 1988a.
- LADE, P. V. e KIM, M. K. - *Single hardening constitutive model for frictional materials - III. Comparisons with experimental data*. Computers and Geotechnics, vol. 6, p. 31-47, 1988b.
- MELO, L. T. B. - *Utilização de um modelo elasto-plástico para a análise de deformações em solos*. Tese de Mestrado, PUC-Rio, p. 98, 1995.
- NAYLOR, D. J., MARANHA DAS NEVES, E., MATTAR JR., D. e VEIGA PINTO, A. A. - *Prediction of construction performance of Beliche dam*. Géotechnique, vol. 36, 1986.
- NOGUEIRA, C. L. - *Análise de escavações com acoplamento de fluxo e deformação*. Tese de Mestrado, PUC-Rio, Brasil, 1992.
- PANDE, G.N. e PIETRUSZCZAK, S - *Numerical Models in Geomechanics V*. Proceedings of the International Conference on Numerical Models in Geomechanics V., Davos, Switzerland, 6-9 September. Edited by Pande, G. N. and Pietruszczak, S., 1995.
- PARREIRA, A. B e AZEVEDO, R. F. - *Geotechnical Performance of a Tunnel in soft ground*. Proceedings of the Third International Conference on Case Histories in Geotechnical Engineering, Missouri, USA, June, 1993.
- PRAGER, W. - *Recent developments in the mathematical theory of plasticity*. Journal of Applied Physics, Vol. 20, 1949.
- SAADA, A. e BIANCHINI, G. - *Constitutive equations for granular and non-cohesive soils*. Proceedings of the International Workshop on Constitutive Equations for Granular and Non-Cohesive Soils, Cleveland, USA, 22-24 July, 1987. Edited by Saada, A. and Bianchini, S., A. A. Balkema, p.733, 1989.
- SANTOS, P. C.; VEIGA PINTO, A. e AZEVEDO, R.F. - *Aplicação do modelo de Lade à barragens de enrocamento*. Terceiro Encontro Nacional de Geotecnia, Porto, Portugal, p. 107-116, 1989.
- SCHOFIELD, A. N. e WROTH, C. P. - *Critical state soil mechanics*. McGraw-Hill, 1968.
- SCHWEFEL, H. P. - *Evolution Strategies*. Interner BerichtKFA-STE-IB-2/80, Kernforschungsanlage Jülich, 1980.
- STURE, S.; RUNESSON, K.; e MACARI-PASQUALINO, E. J. - *Analysis and calibration of a three-invariant plasticity model for granular materials*. Ingenieur-Archiv, Vol. 59, p. 253-266, 1989.
- SUANNO, R. L. M. - *Ein dreidimensionales Simulationsmodell für Stahlbeton mit Plastizität und Schädigung*. Tese de Doutorado, Universität Stuttgart, 1994.
- VARGAS, E. A.; AZEVEDO, R.F.; SOUSA, L. R. e FERNANDES, M. M.- *Applications of computational mechanics in geotechnical engineering*. Proceedings of the First International Workshop on Applications of Computational Mechanics in Geotechnical Engineering, Rio de Janeiro, Brazil, 29-31 July, 1991. Edited by Vargas, E. A.; Azevedo, R. F.; Sousa, L. R. and Fernandes, M. M.. A. A. Balkema, p. 465, 1994.
- VEIGA PINTO, A. A. - *Modelação de enrocamentos*. Dissertação de Mestrado, Universidade Nova de Lisboa, Portugal, 1982
- VEIGA PINTO, A. A. - *Previsão do comportamento estrutural de barragens de enrocamento*. Tese de Especialista, Laboratório Nacional de Engenharia Civil, Portugal, 1983
- ZORNBERG, J. G. e AZEVEDO, R. F. - *Elasto-plastic finite element analysis of a braced excavation*. Proceedings of the Conference in Numerical Methods in Engineering: Theory and Application - NUMETA 90, Swansea, p. 423-430, 1990.