Modelo reológico de Kelvin sujeito a uma tensão parabólica cíclica

A Kelvin rheological model under a cyclic parabolic stress

Fernando Peres Rodrigues*

RESUMO – Estuda-se o modelo de Kelvin sujeito a uma tensão parabólica cíclica de valor máximo σ_M, verificando-se que a sua extensão em função do tempo é formada, em cada ciclo, por troços de exponenciais compostas.

SYNOPSIS - In this paper a Kelvin rheological model under a cyclic parabolic model with a σ_M maximum value is studied. It is shown that the displacement is defined by a series of composed exponential steps.

* Investigador pelo LNEC e Investigador do GEGEO do IST

Palavras-chave – Reologia; modelo de Kelvin.

1 - INTRODUÇÃO

Como se sabe, o modelo de Kelvin é formado pela associação em paralelo de um modelo de Hooke e de um modelo de Newton (Figura 1). Na associação em paralelo, a tensão aplicada ao modelo de Kelvin (modelo composto) divide-se pelos modelos de Hooke e de Newton (modelos simples) de tal maneira que as extensões por eles sofridas e, também, pelo modelo composto, sejam iguais.

Assim, se se designar por:

σ – tensão aplicada ao modelo de Kelvin
σ_H – tensão aplicada ao modelo de Hooke
σ_N – tensão aplicada ao modelo de Newton
ε – extensão sofrida por qualquer dos modelos
E – constante do modelo de Hooke (mola)
K – constante do modelo de Newton (amortecedor)

deverá ser:

$$\sigma = \sigma_H + \sigma_N \tag{1}$$

Tendo em atenção que:

$$\sigma_H = E\varepsilon(t) \quad \text{e} \quad \sigma_N = K\frac{d\varepsilon(t)}{dt} \tag{1a}$$

obtém-se, por substituição, de (1a) em (1), a tensão aplicada ao modelo de Kelvin:

$$\sigma = E\varepsilon(t) + K\frac{d\varepsilon(t)}{dt} \tag{2}$$

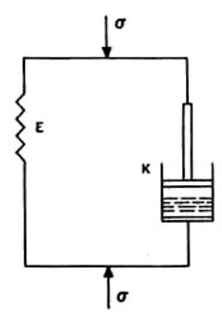

Fig. 1 – Modelo de Kelvin.

2 – RELAÇÕES EXTENSÕES-TEMPOS

Submeta-se o modelo de Kelvin a n ciclos parabólicos iguais de valor máximo σ_M e período 2T, como se indica na Figura 2.

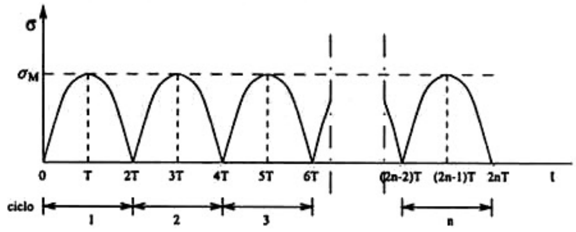

Fig. 2 – Ciclos parabólicos de tensão

A tensão parabólica σ do ciclo de ordem n, de valor máximo σ_M, é dado pela expressão:

$$\sigma = \frac{4\sigma_M}{3}\left[-\frac{3}{4}\left(\frac{t}{T}\right)^2 + \frac{3}{2}(2n-1)\frac{t}{T} - 3n(n-1)\right]$$

com $n \in [N]$ (3)

sendo $[N]$ o conjunto dos números naturais e o domínio da variável t, do ciclo de ordem n, dado por:

$$(2n-2) \leq \frac{t}{T} \leq 2n \tag{4}$$

A área da tensão parabólica de cada ciclo é igual a

$$S = \frac{4\sigma_M T}{3} \tag{5}$$

e o seu valor médio igual a

$$\sigma_m = \frac{2}{3}\sigma_M \tag{6}$$

As expressões (3), (5) e (6) encontram-se deduzidas em Peres Rodrigues (2001).

A substituição de (3) em (2) permite obter a equação diferencial:

$$E\varepsilon(t) + K\frac{d\varepsilon(t)}{dt} = \frac{4\sigma_M}{3}\left[-\frac{3}{4}\left(\frac{t}{T}\right)^2 + \frac{3}{2}(2n-1)\frac{t}{T} - 3n(n-1)\right] \tag{7}$$

Considere-se a exponencial:

$$A = \exp\left\{\frac{ET}{K}\left[\frac{t}{T} - (2n-2)\right]\right\} \tag{8}$$

multiplique-se ambos os membros da equação diferencial (7) por (8) e integre-se membro a membro:

$$\int_{(2n-2)T}^{t}\left[\frac{d\varepsilon(t)}{dt}+\frac{E}{K}\varepsilon(t)\right]A\,dt=$$

$$=\frac{4\sigma_M}{3K}\int_{(2n-2)T}^{t}\left[-\frac{3}{4}\left(\frac{t}{T}\right)^2+\frac{3}{2}(2n-1)\frac{t}{T}-3n(n-1)\right]A\,dt \quad (9)$$

O primeiro membro de (9) é um integral imediato e, atendendo aos limites de integração, igual a:

$$\left[\varepsilon(t)\exp\left\{\frac{ET}{K}\left[\frac{t}{T}-(2n-2)\right]\right\}\right]_{(2n-2)T}^{t}=$$

$$=\varepsilon(t)\exp\left\{\frac{ET}{K}\left[\frac{t}{T}-(2n-2)\right]\right\}-\varepsilon[(2n-2)T] \quad (10)$$

em que $\varepsilon[(2n\text{-}2)T]$ é a extensão inicial do ciclo de ordem n.

O integral do 2º membro de (9) é integrável por partes (Mira Fernandes 1943); considera-se então as duas funções:

$$u=\left[-\frac{3}{4}\left(\frac{t}{T}\right)^2+\frac{3}{2}(2n-1)\frac{t}{T}-3n(n-1)\right] \quad (11a)$$

$$v=\frac{K}{E}\exp\left\{\frac{ET}{K}\left[\frac{t}{T}-(2n-2)\right]\right\} \quad (11b)$$

donde:

$$\frac{du}{dt}=-\frac{3}{2T}\left[\frac{t}{T}-(2n-1)\right] \quad (12a)$$

$$\frac{dv}{dt}=\exp\left\{\frac{ET}{K}\left[\frac{t}{T}-(2n-2)\right]\right\} \quad (12b)$$

A integração por partes permite escrever:

$$\int_{(2n-2)T}^{t}u.\frac{dv}{dt}\,dt=[u.v]_{(2n-2)T}^{t}-\int_{(2n-2)T}^{t}\frac{du}{dt}.v\,dt \quad (13)$$

Substituindo (11) e (12) em (13) e integrando, obtém-se:

$$\frac{4\sigma_M}{3E}\left[-\frac{3}{4}\left(\frac{t}{T}\right)^2+\frac{3}{2}(2n-1)\frac{t}{T}-3n(n-1)\right]A-$$

$$-\frac{2T}{3}\int_{(2n-2)T}^{t}\left[\left(\frac{t}{T}\right)-(2n-1)\right]\exp\left\{\frac{ET}{K}\left[\frac{t}{T}-(2n-2)\right]\right\}dt \quad (14)$$

Aplique-se ao integral da expressão (14) a integração por partes já utilizada atrás; será então:

$$u=\frac{t}{T}-(2n-1) \quad (15a)$$

$$v=\frac{K}{E}\exp\left\{\frac{ET}{K}\left[\frac{t}{T}-(2n-2)\right]\right\} \quad (15b)$$

e

$$\frac{du}{dt}=\frac{1}{T} \quad (16a)$$

$$\frac{dv}{dt}=\exp\left\{\frac{ET}{K}\left[\frac{t}{T}-(2n-2)\right]\right\} \quad (16b)$$

Utilizando a expressão (13), resulta para valor do integral contido em (14), depois de multiplicado pela constante ($-3/2T$):

$$-\frac{3K}{2ET}\left[\left(1+\frac{K}{ET}\right)+\left(\frac{t}{T}-\frac{K}{ET}-(2n-1)\right)A\right] \quad (17)$$

o qual substituído em (14) permite obter o 2º membro de (9) e, tendo em atenção (10), escrever finalmente a expressão da extensão ε(t):

$$\varepsilon(t)=\varepsilon[(2n-2)T]\exp\left\{-\frac{ET}{K}\left[\frac{t}{T}-(2n-2)\right]\right\}+$$

$$\frac{4\sigma_M}{3E}\left[-\frac{3}{4}\left(\frac{t}{T}\right)^2+\frac{3}{2}(2n-1)\frac{t}{T}-3n(n-1)\right]+$$

$$\frac{4\sigma_M}{3E}\left\{\frac{3K}{ET}\left[\frac{t}{T}-(2n-1)-\frac{K}{ET}\right]-\frac{3K}{2ET}\left(1+\frac{K}{ET}\right)\exp\left\{-\frac{ET}{K}\left[\frac{t}{T}-(2n-2)\right]\right\}\right\} \quad (18)$$

Dada a complexidade matemática da determinação genérica do valor da extensão inicial de cada ciclo, será mais fácil ter em atenção que a extensão inicial de cada ciclo é a extensão final do ciclo anterior.

A análise da equação (18) permite afirmar que o diagrama das extensões-tempos é formado, em cada ciclo, por troços de exponenciais compostas.

O modelo reológico de Kelvin quando liberto da tensão a que está sujeito, qualquer que seja a lei que a define, recupera na totalidade a extensão que tenha sofrido, isto porque goza da faculdade de possuir elasticidade retardada (Rocha 1981).

Esta publicação poderá ter interesse para o estudo de estruturas sujeitas a tensões cíclicas próximas da parabólica e cujo comportamento se aproxime do modelo reológico de Kelvin.

AGRADECIMENTOS

Agradece-se, penhorado, a valiosa colaboração do Eng. José Muralha, Investigador Principal do LNEC.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Peres Rodrigues, F. (2001) *Modelo reológico de Newton sujeito a uma tensão parabólica cíclica. Geotecnia*, 91, pp. 11-21.

Mira Fernandes. (1943) *Cálculo integral.* Associação de estudantes do Instituto Superior Técnico.

Rocha, M. (1981) *Mecânica das rochas*. Laboratório Nacional de Engenharia Civil.