

Cortinas tipo Berlim definitivas ancoradas em solos argilosos: a questão da estabilidade vertical

Anchored concrete soldier-pile walls in clay: the issue of vertical stability

António Silva

Cardoso*

Nuno M. da Costa

Guerra **

Armando M. S. Nunes

Antão ***

Manuel Matos

Fernandes ****

RESUMO - A estabilidade vertical de cortinas tipo Berlim ancoradas é substancialmente dependente da complexidade da interação entre as diferentes partes da estrutura (cortina, ancoragens e maciço suportado). O aprofundamento da compreensão de certos aspectos dessa questão é conseguido re-examinando o problema do equilíbrio vertical à luz das metodologias da análise limite, as quais conduzem a estimativas teoricamente consistentes da resistência mínima dos perfis metálicos necessária para evitar o colapso da escavação. São usadas diferentes vias alternativas e são deduzidas equações úteis para o estudo da questão em apreço. Os resultados obtidos com os métodos de análise limite são comparados com os da aplicação do método dos elementos finitos.

SYNOPSIS - The vertical stability of anchored concrete soldier-pile walls is highly dependent on the complex interaction between the different parts of the structure (wall, anchors and supported mass). The understanding of some aspects of that question is obtained by re-assessing the vertical equilibrium in light of limit analysis, which makes it possible to estimate the theoretical minimum pile resistance to avoid excavation collapse. Different ways are used and closed form solutions are deduced. Results from finite element calculations are compared with the limit analysis results.

* Faculdade de Engenharia,
Universidade do Porto,
Departamento de
Engenharia Civil, E-mail:
scardoso@fe.up.pt

** Instituto Superior
Técnico, Departamento de
Engenharia Civil e
Arquitetura, E-mail:
nguerra@civil.ist.utl.pt

*** Instituto Superior
Técnico, Departamento de
Engenharia Civil e
Arquitetura, E-mail:
anantao@civil.ist.utl.pt

**** Faculdade de
Engenharia, Universidade do
Porto, Departamento de
Engenharia Civil, E-mail:
mfern@fe.up.pt

Palavras-chave – Cortinas ancoradas; paredes tipo Berlim; equilíbrio vertical; análise limite; análise por elementos finitos

1 - INTRODUÇÃO

O comportamento das estruturas de suporte flexíveis tem vindo a constituir matéria principal de investigação dos autores do presente artigo, desde há alguns anos a esta parte. Sob a coordenação do último dos autores, têm sido estudados quer diferentes tipos estruturais quer diversos aspectos comportamentais.

Na investigação internacional sobre o comportamento das estruturas flexíveis predomina a preocupação com os efeitos das acções horizontais, o que está bem, uma vez que, atendendo à tipologia estrutural e ao faseamento construtivo, o papel desempenhado por essas acções é sempre muito importante. Sem embargo, como mostram alguns incidentes e acidentes, relatados na bibliografia ou que são do conhecimento dos autores, e como tem vindo a ser demonstrado pelos resultados dos estudos realizados até ao momento, há certas situações em que as acções verticais requerem uma adequada atenção.

As cortinas ancoradas suportam cargas verticais devidas essencialmente às componentes verticais das forças instaladas nas ancoragens, as quais podem ser relativamente elevadas, caso em que a verificação da segurança em relação ao equilíbrio vertical se torna um aspecto relevante do dimensionamento. Não obstante, este é, porventura, dos aspectos do dimensionamento das estruturas flexíveis de suporte de terras o menos discutido e tratado de forma consistente nos manuais e códigos de projecto.

A Figura 1 mostra as forças envolvidas no equilíbrio vertical no caso de estruturas ancoradas contínuas – paredes de estacas-pranchas de aço, paredes de betão armado moldadas no terreno, etc. – e também no caso de paredes tipo Berlim. Conforme mostra a Figura 1(a), em paredes contínuas a verificação do equilíbrio requer que:

$$W_p + \sum A \text{sen}\beta = F_b + F_{pl} + F_{al} \quad (1)$$

em que W_p é o peso da parede, $\sum A \text{sen}\beta$ é a carga vertical total aplicada pelas ancoragens, F_b é a reacção na base da parede, F_{pl} é a força tangencial mobilizada na interface do lado "passivo" da parede e F_{al} é a força tangencial mobilizada na interface do lado "activo" da parede, que pode ser dirigida para cima (sinal positivo) ou para baixo (sinal negativo). Em estruturas tipo Berlim definitivas, conforme ilustra a Figura 1(b), não há interface do lado "passivo", $F_{pl} = 0$, e $F_b = N_{perfil}$, que representa a reacção mobilizada nos perfis verticais.

No presente trabalho o problema da estabilidade às acções verticais das estruturas de contenção flexíveis, em particular das cortinas tipo Berlim, é estudado em profundidade, usando

diversas vias. Em primeiro lugar, através da recolha bibliográfica de relatos de casos de obra, em que tenham ocorrido incidentes e acidentes, e de resultados de ensaios com modelos físicos de dimensões reduzidas e com modelos numéricos. Em segundo lugar, através de um breve estudo paramétrico de uma cortina tipo Berlim, aplicando o método dos elementos finitos. Em terceiro lugar, recorrendo a metodologias de análise limite através da dedução de equações que permitem pôr em relevo vários aspectos do problema em apreço. Utilizando, por fim, cálculos por elementos finitos em elasto-plasticidade e em análise limite confirmam-se os resultados obtidos com aquelas equações.

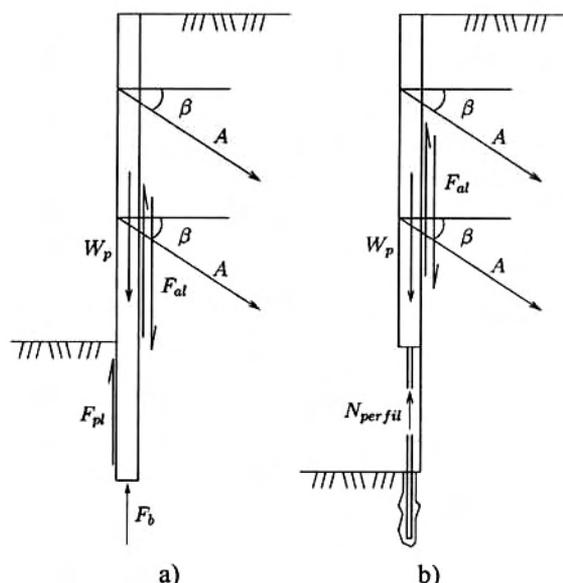


Fig. 1 - Estabilidade vertical de estruturas de contenção flexíveis: a) parede contínua; b) parede tipo Berlim definitiva

2 - REVISÃO DA BIBLIOGRAFIA

2.1 - Comportamento evidenciado por acidentes e incidentes

Encontra-se na bibliografia referência a diversos incidentes e acidentes em cortinas de contenção ancoradas relacionados com o problema do equilíbrio vertical. Apresenta-se no Quadro 1 um sumário dos casos encontrados.

O padrão de comportamento é, em geral, caracterizado por deslocamentos horizontais e verticais elevados (em alguns casos assentamentos elevados, quando comparados com os deslocamentos horizontais) e importantes decréscimos da carga nas ancoragens. Um número significativo das situações apresentadas corresponde a cortinas tipo Berlim. Um caso de rotura envolvendo perda de equilíbrio vertical é apresentado na Figura 2.



Fig. 2 - Rotura de uma cortina tipo Berlim, envolvendo perda de equilíbrio vertical (Guerra, 1999).

Quadro 1 – Incidentes e acidentes em cortinas ancoradas envolvendo deficiente apoio vertical.

Referência	Estrutura de suporte	Comportamento
Slater (1967); Hanna (1968)	Berlim, temporária	Deslocamentos horizontais e verticais muito elevados (90 cm)
Shannon e Strazer (1970)	Berlim, temporária	Deslocamentos verticais da parede elevados (7,6 cm)
McRostie et al. (1972)	Estaca-prancha	Elevadas perdas de carga nas ancoragens; possível movimento vertical da parede
Ware et al. (1973)	Berlim, temporária	Assentamento dos perfis devido à acção das ancoragens (5,1 cm)
White (1974); Clough e O'Rourke (1990)	Estaca-prancha	Escavação abaixo do pé da cortina; assentamento da parede de 15 cm
White (1974)	Berlim, temporária	Escavação abaixo do pé da cortina; rotura vertical; assentamento da cortina de 60 cm
Broms e Stille (1976)	Estaca-prancha	Deslocamentos horizontais da cortina significativos (5-15 cm); assentamentos do terreno suportado elevados; aumento das cargas nas ancoragens
Broms e Stille (1976)	Estaca-prancha	Assentamento da cortina (5-10 cm) e deslocamentos horizontais causados por pressões intersticiais devido à cravação das estacas
Broms e Stille (1976)	Estaca-prancha	Deslocamentos horizontais da parede elevados (51-61 cm); assentamento do terreno suportado (41 cm)
Broms e Stille (1976)	Estaca-prancha	Deslocamentos horizontais e verticais elevados; decréscimo de carga nas ancoragens
Ulrich (1989)	Parede de estacas	Assentamentos muito elevados quando comparados com os deslocamentos horizontais
Winter (1990)	Berlim, temporária	Assentamentos elevados do terreno suportado (6 cm); possível assentamento da parede
Stocker (1991)	Parede de estacas	Assentamento brusco das estacas (15 cm)
Gould et al. (1992)	Berlim, temporária	Escavação abaixo do pé da cortina; rotura vertical devido à exposição de superfícies de deslizamento no maciço rochoso
Barley (1997)	Estaca-prancha	Escavação abaixo do pé da cortina; rotura vertical
Cacoilo et al. (1998)	Estaca-prancha	Deslocamentos horizontais elevados mas sem variação significativa da carga nas ancoragens; possível assentamento da cortina
Guerra (1999)	Berlim, definitiva	Deslocamentos horizontais e verticais significativos; perdas de carga nas ancoragens; alguns danos em estruturas adjacentes
Guerra (1999)	Berlim, definitiva	Encurvadura de perfis verticais; deslocamentos horizontais e verticais da cortina elevados; assentamento da superfície do terreno até 20 cm
Guerra (1999)	Berlim, definitiva	Colapso da cortina por instabilidade vertical
Guerra (1999)	Berlim, definitiva	Encurvadura de perfis verticais; significativos deslocamentos horizontais e verticais da cortina

2.2 - Comportamento evidenciado por ensaios em modelo reduzido

Hanna e Matallana (1970) realizaram ensaios em modelo reduzido para estudar o comportamento de estruturas de contenção ancoradas. Numa série de ensaios foram considerados 3 níveis de ancoragens horizontais e, numa outra, as ancoragens eram inclinadas a 30° com a horizontal. A escavação foi executada em oito fases, até a profundidade escavada atingir a altura da cortina (0,61 m).

Apresenta-se na Figura 3(a) os deslocamentos horizontais e verticais da cortina para o último nível de escavação. Os deslocamentos são relativamente pequenos quando as ancoragens são horizontais, mas, no caso de serem inclinadas, tanto os deslocamentos horizontais como os verticais atingem valores muito elevados. Neste último caso, as fases em que se aplica pré-esforço contribuem para aumentar os deslocamentos horizontais e verticais e os movimentos da cortina são acompanhados por perdas de carga muito significativas nas ancoragens dos dois primeiros níveis (até 40%) e por um aumento substancial no nível mais profundo, como se pode observar na Figura 3(b). A superfície do terreno suportado sofre assentamentos que, no caso das ancoragens inclinadas, aumentam significativamente nas proximidades da parede e são muito maiores do que os medidos quando as ancoragens são horizontais.

Resultados de uma outra série de ensaios (Hanna e Abu-Taleb, 1972) mostram que a presença de um estrato rígido na zona do pé da cortina, evitando qualquer assentamento desta, garante que o seu comportamento é independente da inclinação das ancoragens, para igual carga horizontal transmitida por estas.

Resultados semelhantes foram obtidos por Plant (1972) e por Anderson et al. (1975, 1982), também através de ensaios em modelo reduzido. O primeiro autor analisou o atrito mobilizado na interface solo (areia) - parede (alumínio) do lado activo, tendo medido ângulos com um máximo de 11°, para uma

inclinação das ancoragens de 30°. Quando, noutro ensaio, esta passou a ser 45°, apesar de o assentamento da cortina ser três vezes superior, o ângulo que define o atrito mobilizado foi de apenas 5°. Mostrar-se-á que este resultado, aparentemente incoerente, é corroborado pelas análises numéricas.

2.3 - Comportamento evidenciado por modelos numéricos

O recurso a modelos numéricos permite, tal como no caso dos modelos físicos, tirar importantes conclusões sobre o comportamento das cortinas de contenção quando são deficientes as condições de equilíbrio vertical. Diversos trabalhos abordam este assunto, destacando-se os de Matos Fernandes (1983, 1985), Trigo (1990) e Matos Fernandes et al. (1993, 1994).

Usando o método dos elementos finitos, Matos Fernandes et al. (1993) identificaram os principais aspectos do comportamento de cortinas flexíveis contínuas com condições de suporte vertical inadequadas. A Figura 4(a) apresenta as características geométricas e mecânicas do caso de estudo considerado, tendo sido admitidos diferentes valores da altura enterrada da cortina.

Apresenta-se na Figura 4(b) os deslocamentos da parede e do terreno suportado na última fase de escavação. São bem patentes as semelhanças com os resultados dos ensaios de Hanna e seus colaboradores. Os movimentos são pequenos e sobretudo horizontais quando se considera condições de apoio rígido do pé da cortina (análise A), observando-se uma concavidade na deformada da superfície do terreno. Para valores pequenos (ou mesmo nulos) da altura enterrada (análises C e D, respectivamente) os deslocamentos horizontal e vertical da parede aumentam significativamente e os assentamentos do solo suportado atingem o valor máximo junto à cortina, mostrando a sua deformada uma forma convexa. Nestes casos observam-se ainda importantes perdas de carga nas ancoragens.

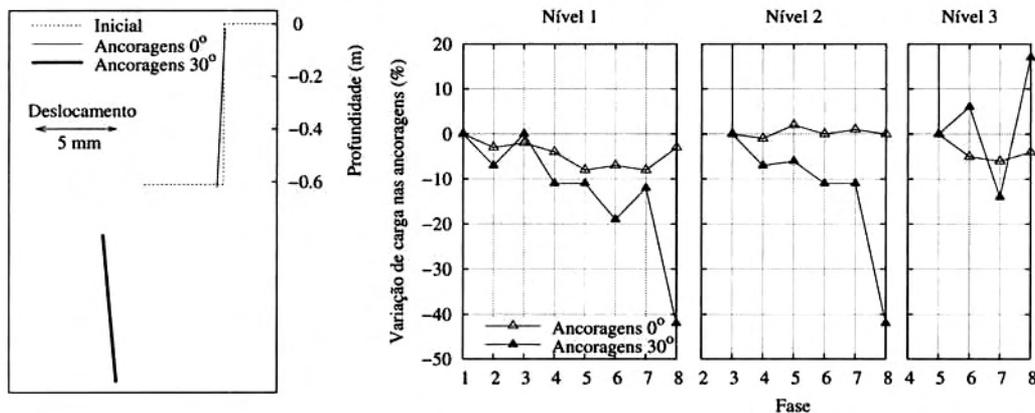


Fig. 3 - Ensaio em modelo reduzido de Hanna e Matallana (1970): a) deslocamentos finais da cortina; b) evolução das cargas nas ancoragens

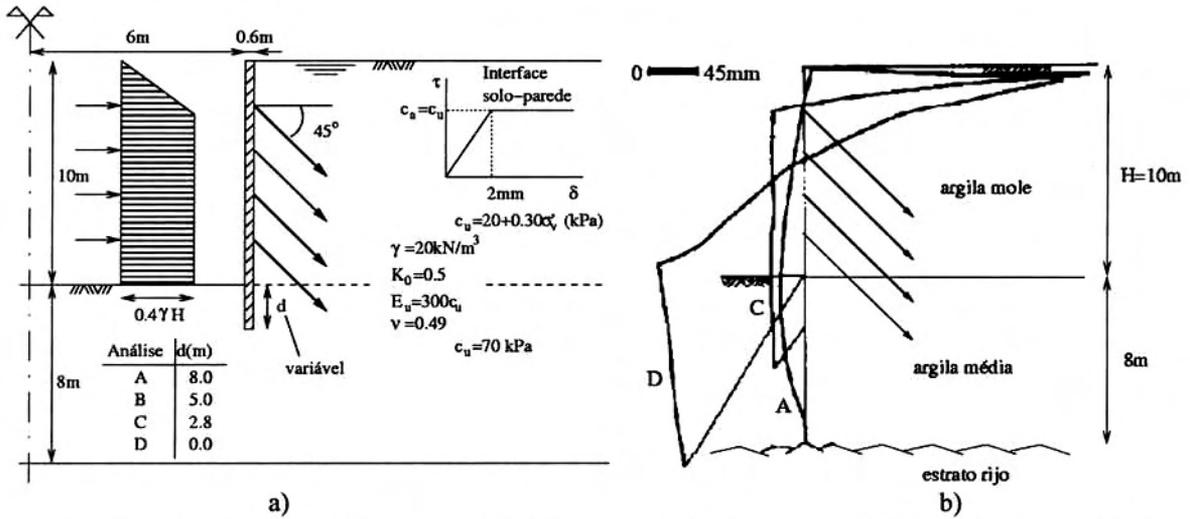


Fig. 4 - Caso de estudo de Matos Fernandes *et al.* (1993): a) geometria e características mecânicas; b) deslocamentos da parede e do terreno suportado.

Um outro aspecto importante dos resultados diz respeito à evolução da mobilização da resistência ao corte da interface solo-parede em ambas as faces da cortina (Figura 5). Do lado “passivo” da cortina, com exceção da análise A, verifica-se a completa mobilização da resistência ao corte, dado que solo e parede sofrem deslocamentos em sentidos opostos. Do lado oposto a evolução é bem diferente. Enquanto a altura enterrada da cortina é elevada (sempre, no caso da análise A, e diminuindo sucessivamente à medida que a escavação progride, nos restante casos, sendo a importância relativa da diminuição da altura enterrada menor na análise B e maior na D) a resistência ao corte mobilizada é muito pequena e dirigida para baixo, uma vez que o terreno assenta mais do que a parede. Forças de corte dirigidas para cima ocorrem apenas nas últimas fases construtivas das análises B, C e D (mais cedo nesta do que nas outras), notando-se que mesmo na análise D não se atinge a completa mobilização das tensões de corte na última fase, apesar de o assentamento da cortina ser de cerca de 190 mm. Como o movimento horizontal da cortina é também

muito significativo, o terreno suportado, ao deformar-se, assenta com a parede, minimizando portanto o movimento relativo na interface solo-parede. Os assentamentos elevados induzem uma redução significativa da força vertical aplicada pelas ancoragens.

2.4 - Resumo do comportamento de cortinas ancoradas sob condições deficientes de apoio vertical

Os resultados da observação de obras em que ocorreram incidentes e acidentes, dos ensaios em modelo reduzido e dos estudos numéricos apontam para o seguinte padrão de comportamento das estruturas de suporte contínuas sob fracas condições de apoio vertical: i) a parede sofre assentamentos e deslocamentos horizontais elevados; ii) ocorrem importantes deslocamentos horizontais e verticais da superfície do terreno suportado, atingindo o seu máximo próximo da escavação; iii) as ancoragens experimentam importantes perdas de carga.

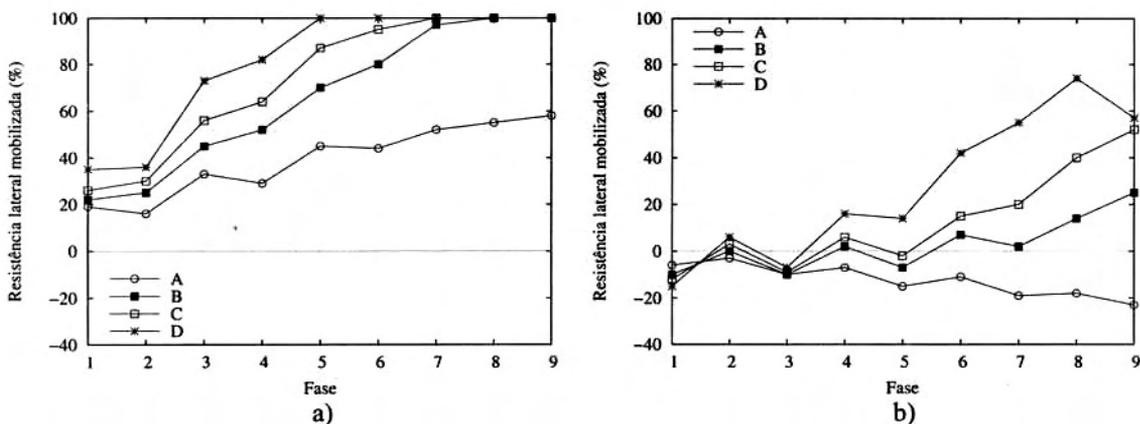


Fig. 5 - Mobilização da resistência lateral na interface solo-parede: a) lado “passivo”; b) lado “activo” (Matos Fernandes *et al.*, 1993).

Para além destes aspectos, dois outros podem ser indicados: iv) as forças tangenciais do lado “passivo” da interface da parede são dirigidas para cima, mobilizando-se uma elevada percentagem da resistência, mesmo para muito pequenos assentamentos da parede; v) do lado “activo” da parede, mesmo quando esta sofre assentamentos muito elevados, a resistência lateral não é completamente mobilizada.

Estes dois pontos são particularmente importantes para o tema do artigo dado que nas paredes tipo Berlim não existe lado “passivo” (ver Figura 1). Assim, se as dificuldades de mobilização de elevadas percentagens da resistência ao corte na interface solo-parede do lado “activo” forem semelhantes às que se verificam em estruturas contínuas, os perfis metálicos terão, então, que ser dimensionados para cargas verticais muito importantes.

3 - ESTUDO NUMÉRICO DE UMA CORTINA TIPO BERLIM

A Figura 6 ilustra as condições de partida de uma série de cálculos, cujos resultados se apresentam em seguida. As análises foram realizadas em tensões totais, admitindo-se um equilíbrio plano de deformação. Para o solo foi admitido um modelo constitutivo elástico-perfeitamente plástico com uma superfície de cedência definida pelo critério de Tresca. Modelo análogo foi considerado para os

elementos de junta representativos da interface solo-estrutura.

Num primeiro cálculo – designado por A – supôs-se os perfis metálicos com comportamento elástico linear, correspondendo pois a uma resistência estrutural largamente superior às cargas axiais actantes. A Figura 7 ilustra a evolução dos deslocamentos da face da escavação (deslocamentos do terreno e não da cortina) e da superfície do terreno, por um lado, e, por outro, da mobilização da resistência da interface (admitida com uma adesão igual a 50 kPa) durante os seis níveis de escavação (com 3,0 m cada). No gráfico referente à mobilização da resistência lateral os valores positivos correspondem a forças aplicadas à parede com sentido ascendente.

Embora nas primeiras fases construtivas a força tangencial aplicada à cortina seja positiva, isto é, dirigida para cima, no fim da construção confirma-se a tendência esperada de o solo suportado aplicar à parede uma força de corte de sentido descendente. O “atraso” com que esta tendência se concretiza neste caso em comparação com, por exemplo, os resultados apresentados em 2.3 (análise A) está provavelmente associado ao facto de a deformabilidade axial dos perfis ser relativamente elevada, o que propicia um assentamento elástico da parede com algum significado à medida que os sucessivos níveis de ancoragens vão sendo pré-esforçados.

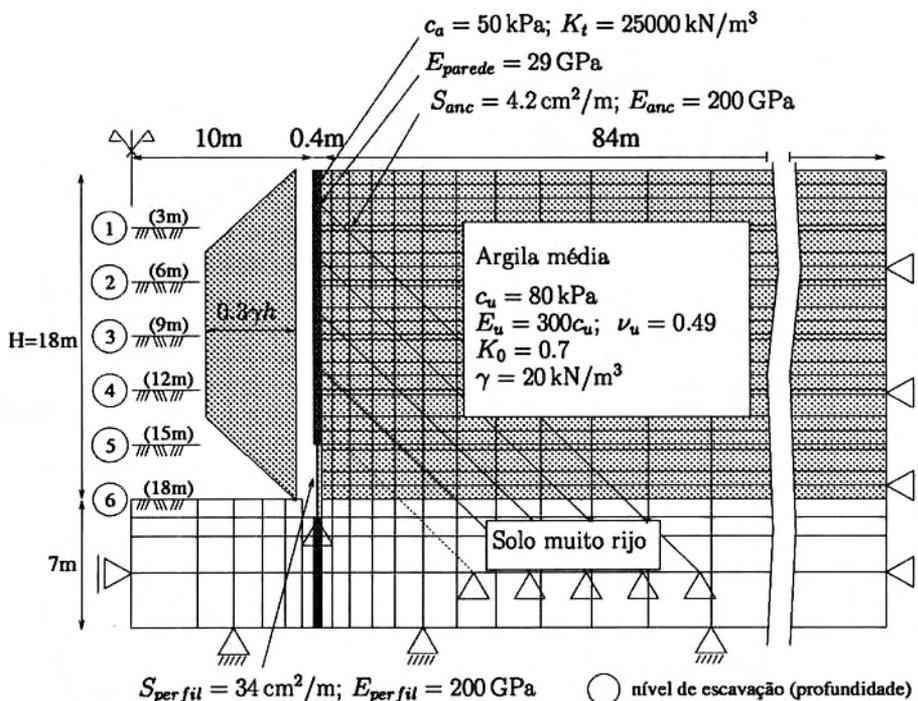


Fig. 6 - Resumo das condições admitidas nas análises por elementos finitos da escavação suportada por uma cortina Berlim definitiva (Guerra, 1999).

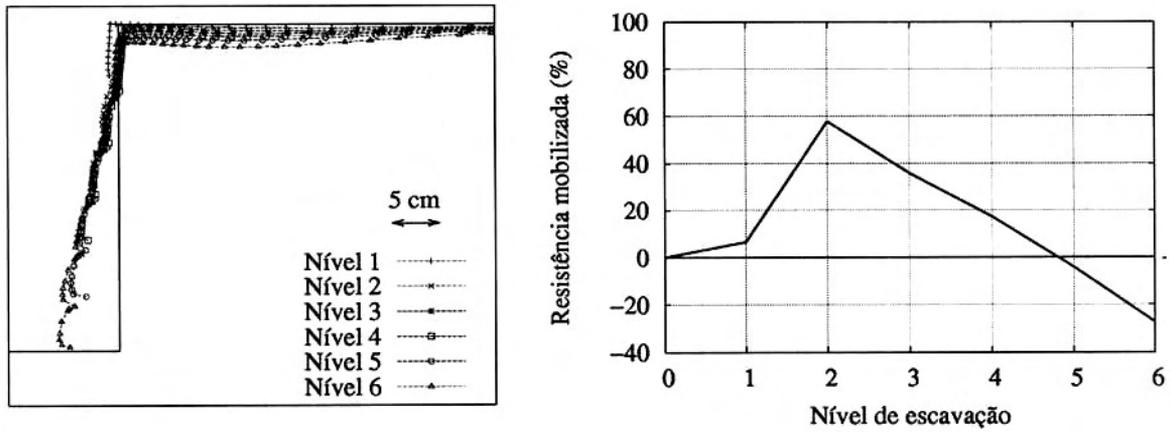


Fig. 7 - Deslocamentos da face da escavação e evolução da força tangencial aplicada à parede (cálculo A, fundação competente).

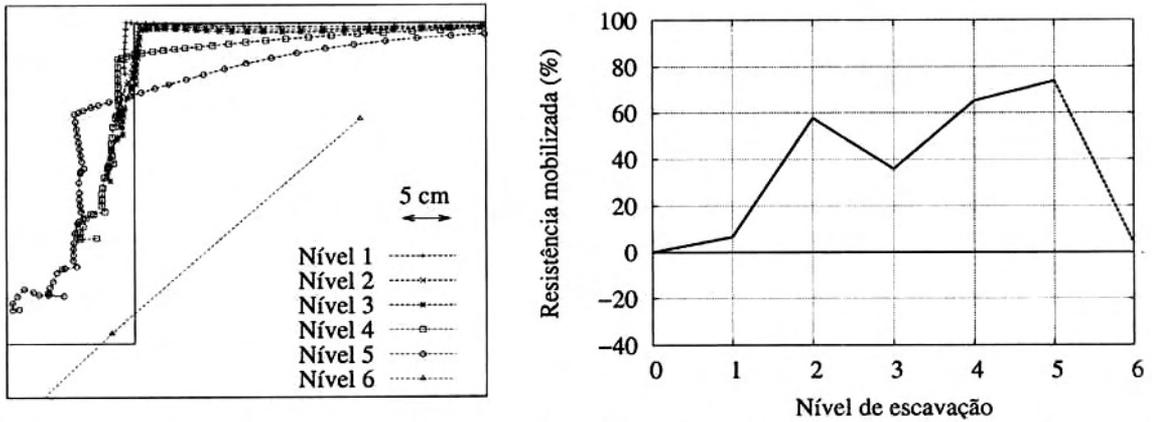


Fig. 8 - Deslocamentos da face da escavação e evolução da força tangencial aplicada à parede (cálculo B, perfis verticais com insuficiente resistência estrutural).

A questão interessante que se pode agora colocar é a seguinte (ver Figura 1): até que ponto será apropriado explorar, para assegurar o equilíbrio vertical da cortina, a contribuição do solo suportado por meio de forças tangenciais ascendentes transmitidas à parede, tal como se verifica durante boa parte das fases construtivas da análise precedente? Se tal fosse possível, isso poderia naturalmente traduzir-se numa substancial economia dos perfis verticais.

De modo a tentar responder a esta questão repetiu-se a simulação da escavação anterior mas agora limitando a resistência estrutural dos perfis verticais – cálculo B – de modo a que estes entrassem em cedência por encurvadura durante o processo construtivo. A Figura 8 ilustra a evolução dos deslocamentos e da mobilização da resistência ao corte da interface durante os seis níveis de escavação. A cedência plástica dos perfis metálicos ocorre durante a escavação para o 4º nível, pelo que nos três primeiros níveis os resultados coincidem com os do cálculo anterior. Os resultados apresentados para o 6º e último nível de escavação devem ser encarados com reserva pois, para a

correspondente fase de cálculo, não foi possível obter convergência no processo iterativo de redistribuição das forças residuais (com tolerância de 0,1% para 20000 iterações). O significado físico deste facto é que a escavação entrou em colapso durante a execução dos últimos 3 metros.

A cedência dos perfis durante a realização do 4º nível de escavação induz um crescimento dos deslocamentos e da força tangencial ascendente aplicada à parede pelo maciço suportado (que chega a representar cerca de 70% da resistência no fim do 5º nível de escavação). Embora, como foi atrás mencionado, os resultados para o último nível de escavação tenham que ser encarados com reserva, parece ser legítimo concluir que o colapso da escavação e da estrutura de suporte pode verificar-se sem esgotamento da resistência lateral e, até, com tendência para redução da parcela anteriormente mobilizada da mesma.

A explicação para o facto reside seguramente no tipo de mecanismo de colapso da cortina. Com efeito, quando a fundação não é competente a parede não se limita a experimentar grandes assentamentos. Em conjugação com estes ocorrem também elevados

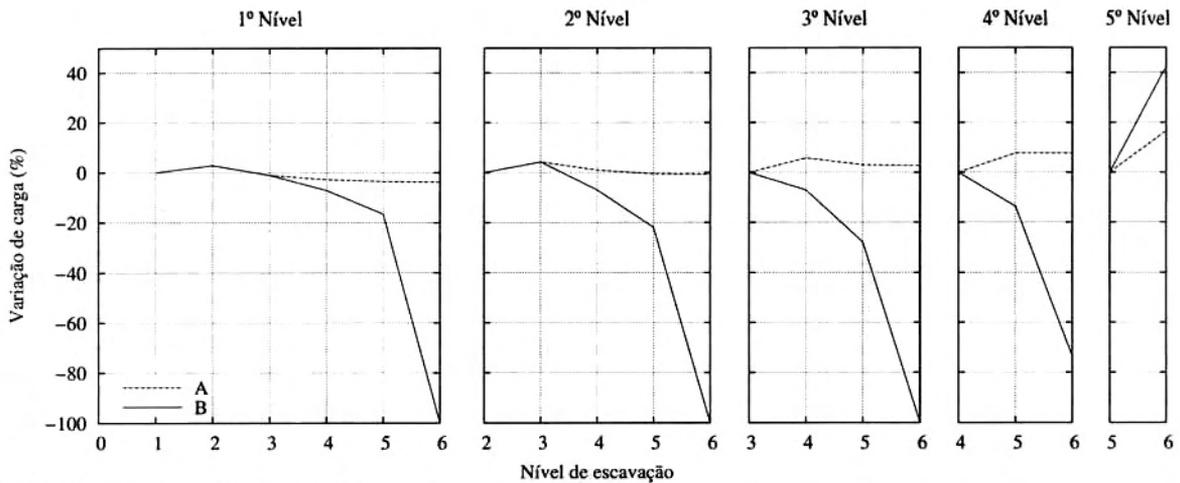


Fig. 9 - Evolução das forças nas ancoragens nos cálculos A e B.

deslocamentos laterais para a escavação, que, por seu turno, induzem assentamentos no maciço suportado e, logo, impedem a mobilização de novas tensões tangenciais ascendentes. Esta redução da resistência mobilizada está igualmente presente nos resultados dos ensaios em modelo reduzido de Plant (1972), anteriormente referidos em 2.2.

É conveniente acrescentar que o assentamento da parede após a cedência dos perfis conduz, no caso da análise B, a um progressivo decréscimo das forças nas ancoragens – como bem patenteia a Figura 9 – o que naturalmente cria as condições para a rotura global da escavação. Note-se, no entanto, que no último nível (tal como nos resultados dos ensaios em modelo reduzido) se verifica um incremento significativo da carga nas ancoragens.

Comentando ainda os resultados da análise B, e embora se tenha verificado que o colapso pode acontecer sem completa mobilização da resistência lateral, pode argumentar-se que, caso a escavação terminasse à profundidade de 15 m (isto é, no 5º nível), se verificaria uma situação de estabilidade para a qual a resistência lateral ascendente da cortina, mobilizada parcialmente, contribui em conjunto com os perfis metálicos verticais.

Será esta contribuição indispensável para a estabilidade? É o que foi investigado correndo um cálculo C, em tudo paralelo ao cálculo B, mas agora admitindo nula a resistência ao corte da interface.

A Figura 10 mostra a evolução comparada dos deslocamentos das duas análises até ao fim do 5º nível de escavação (o colapso ocorre em ambos os cálculos no último nível de escavação). É extremamente curioso verificar que, para os 3º, 4º e 5º níveis de escavação, o desempenho em termos de deslocamentos do cálculo C não é pior, bem pelo contrário, que o do cálculo com interface resistente.

Qual é a explicação para este resultado aparentemente paradoxal?

A Figura 11 mostra as forças em presença nos dois casos no fim do 5º nível de escavação. Basicamente, tendo em conta que a reacção nos perfis verticais é igual nos dois cálculos (em ambos os perfis atingiram a cedência por encurvadura) e que é também igual o peso da parede, no cálculo C a força vertical aplicada à parede pelas ancoragens tem que ser menor, logo, sendo estas inclinadas a 45°, é também menor nesse cálculo a força horizontal aplicada pelas ancoragens ao maciço suportado.

Como explicar então que sendo maior em B a força horizontal aplicada ao maciço, os deslocamentos deste na mesma direcção não sejam inferiores? Precisamente porque nesse cálculo B, pensando agora em termos do maciço suportado, este recebe uma importante força vertical descendente aplicada pela cortina (448 kN/m), a

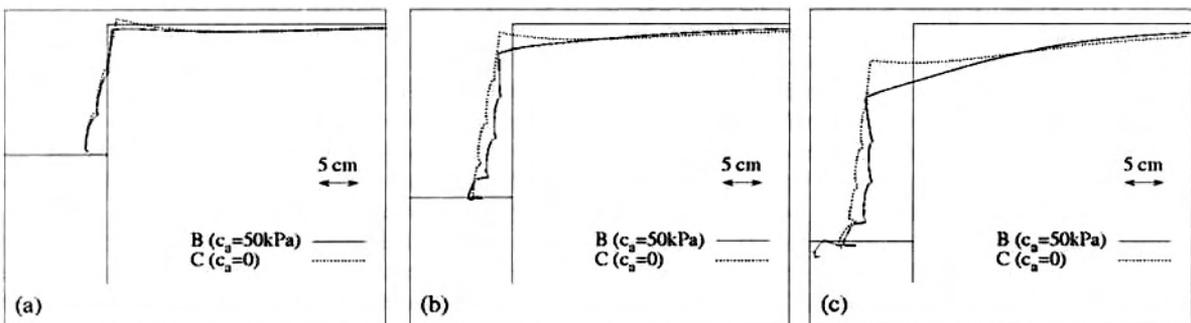


Fig. 10 - Comparação dos deslocamentos para três níveis de escavação entre os cálculos B (interface resistente) e C (interface com resistência nula): a) 3º nível; b) 4º nível; c) 5º nível.

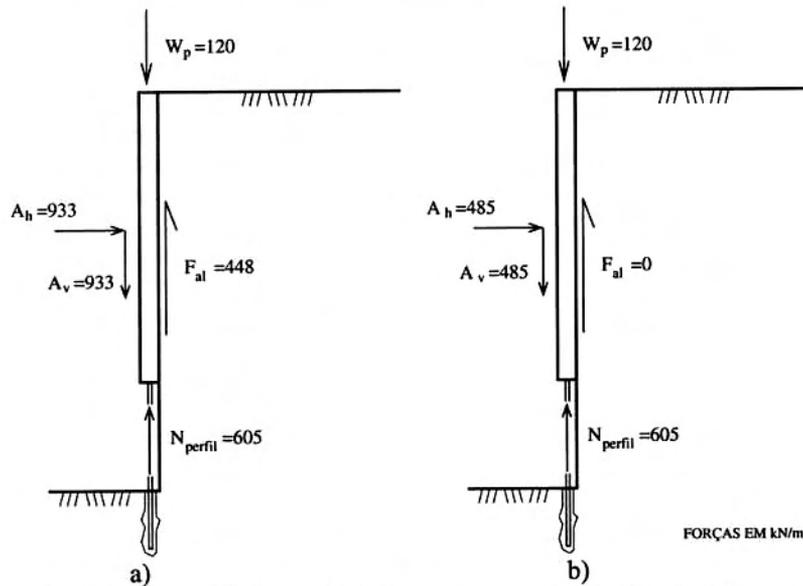


Fig. 11 - Forças envolvidas no equilíbrio vertical da cortina no fim do 5º nível de escavação: a) cálculo B (interface resistente); b) cálculo C (interface com resistência nula).

qual, somando-se ao peso próprio das terras, aumenta a grandeza do impulso, logo requer uma mais elevada força horizontal da estrutura de contenção, isto é, das ancoragens.

Está-se assim perante uma situação muito curiosa: duas interações solo-estrutura com deslocamentos muito similares do maciço mas envolvendo forças de interação de resultante muito discrepante. Tal denota o comportamento extremamente complexo das paredes tipo Berlim.

Apresenta-se, em seguida, para clarificação, uma reapreciação do problema do equilíbrio vertical deste tipo de estrutura através de outras vias.

4 - RESISTÊNCIA MÍNIMA DOS PERFIS METÁLICOS. DEDUÇÃO DE EQUAÇÕES TEÓRICAS

4.1 - Considerações gerais

Para garantir a estabilidade de um maciço terroso não autoportante, a cortina tem que lhe transmitir uma acção horizontal suficiente; caso se instalem tensões tangenciais na interface solo-cortina, o valor mobilizado também condiciona a acção horizontal necessária. Por outro lado, em estruturas tipo Berlim a grandeza dessa acção horizontal estabilizadora é exclusivamente controlada pela carga das ancoragens, dada a desprezável capacidade resistente dos perfis verticais para acções com aquela direcção.

Como foi posto em evidência nos estudos de modelação numérica, no tipo de estruturas em consideração, caso os perfis metálicos possuam uma resistência limitada, para equilibrar a componente vertical da carga das ancoragens (mais o peso da parede) tem que se mobilizar total ou parcialmente a resistência tangencial (com sentido ascendente sobre a parede). Do ponto de vista do maciço suportado, a

aplicação de tensões tangenciais na interface solo-cortina com sentido descendente é equivalente ao aumento do peso do maciço, pelo que exige uma maior força horizontal de suporte. Conclui-se, então, que, para evitar o colapso do maciço, é necessário que os perfis possuam uma determinada resistência. Caso contrário, a carga das ancoragens descerá a um nível tal que a componente horizontal que fornecem ao maciço não é suficiente para garantir o seu equilíbrio, agravado pela actuação da força vertical descendente causada pelas tensões tangenciais mobilizadas.

Para uma análise mais detalhada desta questão, considere-se separadamente a cortina e o maciço suportado, como ilustra a Figura 12. Na figura estão representadas as forças relevantes, incluindo as de interacção entre a parede e o maciço. Supondo que na interface solo-cortina se mobiliza uma fracção, p , da adesão, c_a , o equilíbrio das forças verticais actuantes na cortina obriga a que

$$\begin{aligned} A \sin \beta &= (N_{\text{perfil}} - W_p) + p c_a H_p = \\ &= (N_{\text{perfil}} - W_p) + \frac{2\mu}{N_s} \chi_{\text{am}} \end{aligned} \quad (2)$$

em que A e β representam, respectivamente, a resultante das forças e a inclinação das ancoragens em relação à horizontal, N_{perfil} a força instalada nos perfis metálicos, W_p o peso da parede e H_p a altura da parede já construída. Além disso, denotando γ e c_u o peso volúmico e a resistência não drenada do maciço, respectivamente, e H a profundidade do corte, tem-se:

$$\mu = \frac{1}{2} \gamma H^2; N_s = \frac{\gamma H}{c_u}; \chi_{\text{am}} = \frac{p c_a H_p}{c_u H} \quad (3)$$

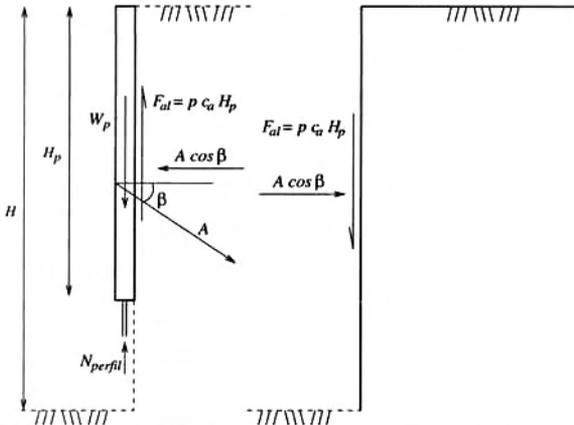


Fig. 12 - Forças actuantes na parede e forças que esta aplica ao maciço suportado.

sendo N_S o factor de estabilidade da escavação e χ_{am} a adesão normalizada mobilizada. O valor de χ_{am} varia entre $-0,9$ e $0,9$ (tensões tangenciais positivas quando actuam sobre a parede com o sentido ascendente e negativas no caso contrário), visto que, mesmo em escavações muito profundas, a relação H_p / H dificilmente alcança $0,9$.

Tendo presente que o maciço tem que suportar a força vertical $p c_u H_p$, procure-se avaliar a força horizontal que garante que o maciço não colapsa. Uma avaliação desta força, ainda que insegura, isto é, inferior à efectivamente necessária, pode ser encontrada aplicando o Teorema da Região Superior (TRS). No que se segue fazem-se duas deduções alternativas, considerando, no âmbito da aplicação do TRS, superfícies de escorregamento – sobre as quais se concentram as deformações plásticas – plana, em primeiro lugar, e circular, em segundo.

4.2 - Superfície de escorregamento plana

Considere-se o campo de deformações plásticas cinematicamente compatível que consiste em supor que as deformações plásticas se concentram sobre uma superfície plana que passa pelo pé do corte e é definida pelo ângulo α em relação à horizontal (ver Figura 13). Essas deformações fazem com que o bloco superior se desloque relativamente ao remanescente de um certo valor δ , na direcção da superfície de deslizamento. Igualando o trabalho das forças exteriores e o trabalho de deformação plástica e derivando para se obter o ângulo α que maximiza N_{perfil}^{lim} , força axial que é necessário mobilizar nos perfis verticais para assegurar que o maciço está em estado limite, deduz-se no Anexo 1 a seguinte equação:

$$\frac{1}{\mu} (N_{perfil}^{lim} - W_p) = \left(1 - \sqrt{1 - \chi_{am} \frac{4}{N_S}} \right) \text{tg}\beta - \frac{2 \chi_{am}}{N_S} \quad (4)$$

em que μ , N_S e χ_{am} são definidos pelas expressões 3. Para o caso do maciço autoportante, uma vez que $c_{am} = 0$ ($\chi_{am} = 0$), $N_{perfil}^{lim} = 0$, $W_p = 0$, N_S assume o seu valor crítico, que é igual a $N_S = N_{Scrit} = 4$.

Portanto, um maciço é autoportante se o factor de estabilidade, N_S , for inferior ou, no máximo, igual ao valor crítico, N_{Scrit} (factor de estabilidade crítico). Como a dedução anterior se baseia no TRS, $N_{Scrit} = 4$ é um valor inseguro. Com efeito, o caso do talude vertical autoportante tem sido intensamente estudado através de metodologias de análise limite, sendo conhecidos os seguintes valores mais precisos dos factores de estabilidade críticos (Pastor et al., 2000): i) $N_{Scrit} = 3,760$, baseado no Teorema da Região Inferior (seguro); ii) $N_{Scrit} = 3,786$, baseado no Teorema da Região Superior (inseguro).

Tendo-se visto que na equação 4 o valor “4” pode ser interpretado como representando o factor de estabilidade crítico, propõe-se a seguinte expressão aproximada em que se substitui “4” por “ N_{Scrit} ”

$$\frac{1}{\mu} (N_{perfil}^{lim} - W_p) = \left(1 - \sqrt{1 - \chi_{am} \frac{N_{Scrit}}{N_S}} \right) \text{tg}\beta - \frac{2 \chi_{am}}{N_S} \quad (5)$$

O valor de N_{Scrit} a usar nesta expressão será discutido adiante.

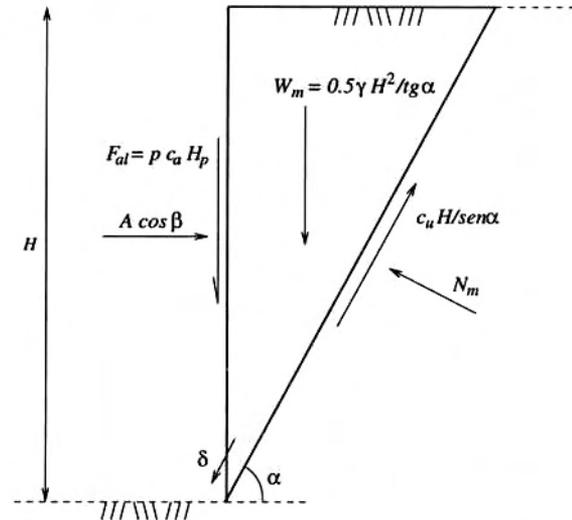


Fig. 13 - Avaliação dos trabalhos considerando a superfície de deslizamento plana.

4.3 - Superfície de escorregamento circular

Considere-se o campo de deformações plásticas cinematicamente compatível que consiste em supor que as deformações plásticas se concentram sobre uma superfície circular de raio R que passa pelo pé do corte e é definida pelo ângulo ao centro λ e pelo ângulo α que faz com a horizontal a corda que

subtende o arco que delimita a massa deslizante. Nestas condições, são válidas as expressões inscritas na Figura 14. Essas deformações correspondem a uma rotação de um certo ângulo δ do bloco superior relativamente ao remanescente, em torno do centro da circunferência.

Igualando o trabalho das forças exteriores e o trabalho de deformação plástica e derivando parcialmente em relação aos ângulos α e λ por forma a obter o par de valores respectivos que maximiza a força axial que é necessário mobilizar nos perfis verticais para assegurar que o maciço está em estado limite, deduz-se no Anexo 2 a seguinte equação:

$$\frac{1}{\mu} (N_{\text{perfil}}^{\text{lim}} - W_p) = \left(1 - \frac{S}{N_s} \right) \text{tg}\beta - \frac{2 \chi_{\text{am}}}{N_s} \quad (6)$$

em que, para cada valor de χ_{am} , S assume a grandeza indicada no Quadro 2. Comparando as expressões 5 e 6 comprova-se que $N_{\text{Scrit}} = S / \sqrt{1 - \chi_{\text{am}}}$, o que conduz aos valores variáveis de N_{Scrit} também mostrados no Quadro 2.

No caso do maciço autoportante, N_s assume o valor crítico, que é igual a $N_s = N_{\text{Scrit}} = S = 3,831$. Este valor está muito mais próximo da solução exacta do que o anteriormente obtido supondo a superfície de deslizamento plana. Com efeito, enquanto o erro na avaliação de N_{Scrit} , em relação às duas soluções muito próximas da exacta indicadas por Pastor *et al.* (2000), no caso anterior se situa entre 5,7 e 6,4% (4 sobre 3,786 e 3,760,

respectivamente), agora varia entre 1,2 e 1,9% (3,831 em vez de 4). Logo, parece que a equação 6 traduz uma solução que, embora insegura (Teorema da Região Superior), é muito próxima da exacta.

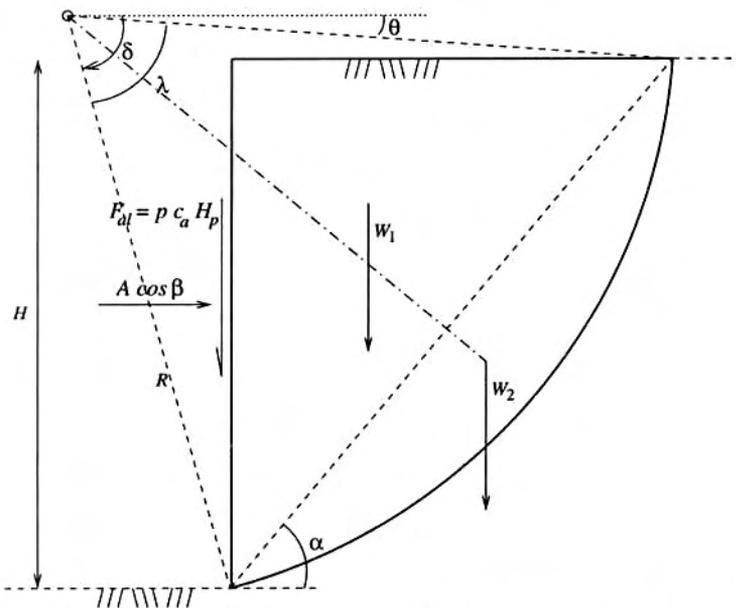
4.4 - Comparação e análise das duas soluções

Para dadas resistências da interface solo-cortina, c_a , e do maciço, c_u , as expressões 5, deduzida para superfícies de deslizamento planas, e 6, em que aquelas superfícies são circulares, permitem estimar os valores mínimos da resistência dos perfis metálicos que garantem a estabilidade do maciço terroso. Essa estimativa depende da percentagem, p , de mobilização da resistência na interface no estado limite, a qual não é conhecida à partida.

Na Figura 15 apresenta-se esses valores mínimos, $N_{\text{perfil}}^{\text{lim}}$, deduzidos do peso da parede, W_p , e normalizados por μ , $(N_{\text{perfil}}^{\text{lim}} - W_p) / \mu$, obtidos pelas expressões 5 – vários valores de N_{Scrit} – e 6, para vários pares de valores de N_s e de β e em função da grandeza da adesão normalizada mobilizada no estado limite, χ_{am} .

Em primeiro lugar, constata-se que os resultados de 5 podem conduzir a erros significativos na avaliação de $N_{\text{perfil}}^{\text{lim}}$, a menos que N_{Scrit} seja seleccionado adequadamente (ver Quadro 2).

Em segundo lugar, note-se que a forma como $(N_{\text{perfil}}^{\text{lim}} - W_p) / \mu$ varia com χ_{am} (ou seja, com p e c_a) conduz à seguinte importante e, de certa forma, inesperada conclusão: a resistência mínima dos perfis metálicos necessária para assegurar a



$$R = \frac{H}{2 \text{sen}\alpha \text{sen}(\lambda/2)}$$

$$\theta = 90 - (\alpha + \lambda/2)$$

$$\frac{R}{H} \text{sen}\theta = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\text{tg}\alpha \text{tg}(\lambda/2)} - 1 \right)$$

$$\frac{R}{H} \text{cos}\theta = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\text{tg}(\lambda/2)} + \frac{1}{\text{tg}\alpha} \right)$$

Fig. 14 - Avaliação dos trabalhos considerando a superfície de deslizamento circular.

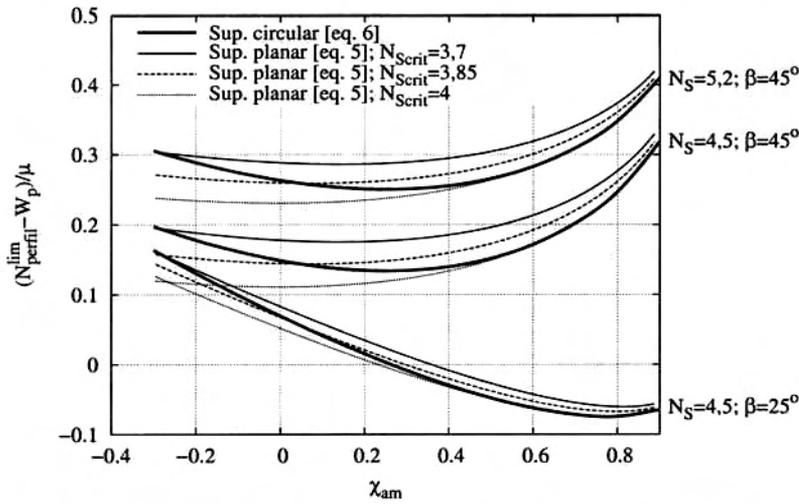


Fig. 15 - Valores de $(N_{\text{perfil}}^{\text{lim}} - W_p)/\mu$, em função de χ_{am} , obtidos pelas expressões 5 – vários N_{Scrit} – e 6, para vários pares N_S e β .

Quadro 2 - Valores de S – expressão 6 – e de N_{Scrit} – expressão 5 – em função de χ_{am}

χ_{am}	-0,3	-0,2	-0,1	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
S	4,212	4,100	3,973	3,831	3,672	3,494	3,295	3,071	2,818	2,528	2,191	1,789	1,265
N_{Scrit}	3,694	3,743	3,789	3,831	3,871	3,907	3,938	3,965	3,985	3,997	4,000	4,000	4,000

estabilidade do maciço não diminui necessariamente à medida que aumenta a grandeza da adesão mobilizada na interface solo-cortina no estado limite ou, dito de outro modo, a mobilização de maiores parcelas da adesão pode ser desfavorável a partir de certo limiar, o qual depende essencialmente da inclinação das ancoragens, β . Com efeito, para um dado valor de β , o aumento da adesão mobilizada é favorável (conduz à diminuição da resistência necessária para os perfis metálicos) até atingir um certo valor crítico, $\chi_{\text{am-crit}}$, sendo desfavoráveis os aumentos subsequentes; da Figura 15 retira-se que o referido limiar é $\chi_{\text{am-crit}} \approx 0,25$, quando $\beta = 45^\circ$, e $\chi_{\text{am-crit}} \approx 0,75$, quando $\beta = 25^\circ$.

O inesperado desta conclusão resulta do facto de ela parecer contraditória. Com efeito, à partida, numa perspectiva de equilíbrio da cortina em relação às forças verticais, parece que quanto mais elevada for a adesão mobilizada menos robustos necessitam ser os perfis verticais (ver equações 1 e 2). Contudo, este raciocínio é unilateral, logo incompleto, porque não entra em linha de conta com a estabilidade do maciço suportado, a qual fica prejudicada com o aumento da adesão mobilizada. Daí que, numa perspectiva global, que contemple tanto o equilíbrio da cortina como o do maciço terroso, se imponha a conclusão de, próximo do estado limite, a adesão mobilizada poder ser contraproducente, a partir de certo limiar, exigindo perfis metálicos mais robustos.

É de salientar que esta conclusão permite explicar os resultados do cálculo C face aos do cálculo B, ambos introduzidos e comentados na parte final de 3 (ver Figuras 10 e 11).

Em terceiro lugar, no que respeita à influência do valor de N_S sobre $N_{\text{perfil}}^{\text{lim}}$ confirma-se o que seria de esperar, isto é, maciços com piores características mecânicas (maiores N_S) exigem perfis metálicos mais robustos.

Realce-se que ao valor da resistência avaliado pelas expressões deduzidas estão associados deslocamentos da estrutura que podem ser muito elevados, geralmente incompatíveis com o seu adequado desempenho. Daí que o valor da resistência dos perfis metálicos a usar em estruturas reais deva ser substancialmente superior ao derivado a partir das equações 5 ou 6. Mais adiante aprofunda-se a discussão desta questão.

4.5 - Força nas ancoragens no estado limite

Nas situações em que N_S é inferior a 6 e esteja garantida a estabilidade da base da escavação, é razoável adoptar, para definição do pré-esforço das ancoragens, um diagrama com a forma do desenhado na Figura 6 e pressão máxima variável entre 0,2 e 0,4 γH . A resultante desse diagrama é $A_{pe} = 1,5 \rho_{pe} \mu$, com $\rho_{pe} = 0,2-0,4$ e μ dado pela equação 3. Por outro lado, introduzindo a equação 6 na equação 2, obtém-se uma expressão que define a força nas ancoragens no estado limite:

$$A_{lim} = \left(1 - \frac{S}{N_s}\right) \frac{\mu}{\cos\beta} \Leftrightarrow \quad (7)$$

$$\Leftrightarrow \rho_{lim} = \frac{A_{lim}}{1,5\mu} = \left(1 - \frac{S}{N_s}\right) \frac{1}{1,5\cos\beta}$$

Na Figura 16 apresenta-se os valores de $(N_{perfil}^{lim} - W_p)/\mu$ e os valores de ρ_{lim} associados, em função de χ_{am} , supondo quer distintos ângulos β , para o mesmo $N_s = 4,5$, quer vários N_s , mantendo constante $\beta = 45^\circ$. O mais relevante consiste em comprovar que, no estado limite, existe uma relação monótona crescente entre a adesão mobilizada na interface solo-cortina e a força total que tem que se instalar nas ancoragens para garantir o equilíbrio do maciço suportado, ou seja, a uma maior adesão mobilizada tem de corresponder inelutavelmente a instalação de uma maior força total nas ancoragens.

Note-se ainda que a valores elevados de χ_{am} (quando N_s e β são elevados, basta serem superiores a cerca de 0,15), estão associados ρ_{lim} superiores a 0,3, isto é, superiores à grandeza média usual do pré-esforço ($\rho_{pe} = 0,2-0,4$, geralmente).

Estas constatações, conjugadas com as anteriormente discutidas respeitantes à força nos perfis metálicos, mostram o carácter não necessariamente favorável, mesmo eventualmente desfavorável, da mobilização da resistência da interface. Com efeito, é evidente que, para valores de χ_{am} superiores a $\chi_{am-crit}$, a mobilização da adesão é sempre desfavorável pois acarreta a necessidade de valores mais elevados tanto da resistência dos perfis como da força nas ancoragens. Em compensação, quando inferiores a $\chi_{am-crit}$, maiores mobilizações da adesão na interface solo-cortina implicam tanto diminuição da resistência dos perfis como aumento da força nas ancoragens; nestas condições, o par de valores N_{perfil}^{lim} e ρ_{lim} para o qual se estabelece o equilíbrio vai necessariamente depender da interacção entre as várias componentes da estrutura (maciço de fundação, maciço suportado, cortina e interface entre eles, perfis metálicos e ancoragens) e das respectivas deformabilidades relativas. Adiante volta-se a esta questão.

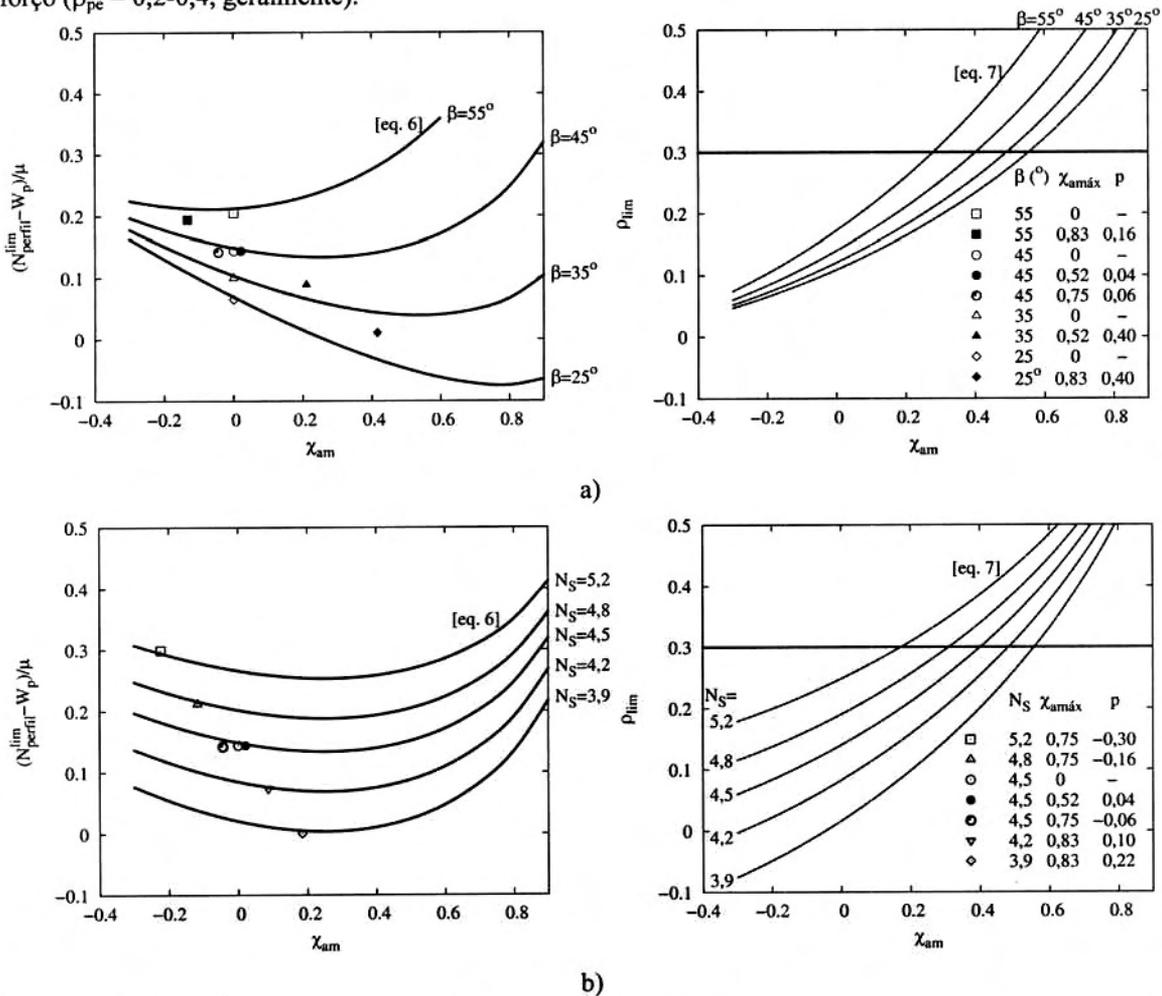


Fig. 16 - Valores de $(N_{perfil}^{lim} - W_p)/\mu$ e de ρ_{lim} , em função de χ_{am} , obtidos pelas expressões 6 e 7 e pelo método dos elementos finitos (os primeiros): a) distintos β ($N_s = 4,5$); b) distintos N_s ($\beta = 45^\circ$).

5 - COMPARAÇÃO COM OS RESULTADOS DA APLICAÇÃO DE OUTRAS METODOLOGIAS DE ANÁLISE LIMITE

Uma via alternativa de aplicação do Teorema da Região Superior da análise limite ao estudo da estabilidade de maciços terrosos suportados por contenções tipo Berlim é uma implementação numérica, recorrendo à técnica dos elementos finitos.

Em geral, a aplicação do TRS a um determinado sistema mecânico necessita do cálculo do trabalho que as forças exteriores realizam num determinado campo de deslocamentos, W_e , assim como do trabalho dissipado plasticamente nesse mesmo campo de deslocamentos, W_i .

O campo de deslocamentos deve ser criteriosamente escolhido. Isto, porque, para um mesmo conjunto de forças, alguns campos de deslocamentos conduzirão a um trabalho realizado pelas forças exteriores superior ao dissipado plasticamente, enquanto que outros, para o mesmo conjunto de forças, apresentam um trabalho dissipado superior ao trabalho das forças exteriores. No primeiro caso concluir-se-á que as forças exteriores conduzem à rotura plástica do sistema; no segundo caso, nada é possível concluir sobre essas mesmas forças.

Os campos de deslocamentos cinematicamente admissíveis aceitam componentes descontínuas. Aliás, a aplicação usual do teorema da região superior passa pela escolha de campos de deslocamentos constantes em determinadas zonas da estrutura implicando a existência de descontinuidades no campo de deslocamentos. Esses campos de deslocamentos, chamados de mecanismos de blocos rígidos, são feitos depender de algumas variáveis, geralmente em número reduzido. É o caso dos mecanismos apresentados no ponto 4 deste trabalho. A minimização, em função dessas variáveis, da diferença entre o trabalho das forças exteriores e o

trabalho dissipado plasticamente permite, no caso dessa diferença ser negativa, posicionar o carregamento considerado como não suportável pela estrutura.

Apesar de haver ainda a hipótese de se impor ao sistema campos de deslocamentos contínuos, de forma relativamente simples, ou de se considerar um misto das duas hipóteses (ver por exemplo Leca e Dormieux, 1992), as possibilidades de minimização estarão sempre dependentes das restrições impostas nos campos de deslocamentos utilizados e do conhecimento que se tem do problema em causa. Emerge assim a conveniência de uma ferramenta que, automaticamente e sem nenhuma imposição *a priori* sobre o campo de deslocamentos, permita obter uma boa (se não a ótima) minimização da diferença entre os trabalhos.

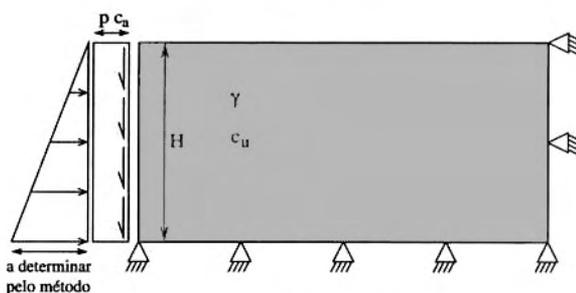


Fig. 17 - Colocação do problema para resolução através de ferramenta numérica de análise limite.

Uma implementação numérica deste princípio foi feita em Antão (1997), sendo uma aplicação ao estudo da estabilidade de maciços terrosos apresentada em Antão (2003).

Como se viu na Figura 12 o problema em estudo pode ser resumido, sob o ponto de vista do maciço, à aplicação de duas forças à superfície vertical deste: uma força normal e uma tangencial. Usando o programa de elementos finitos indicado e aplicando

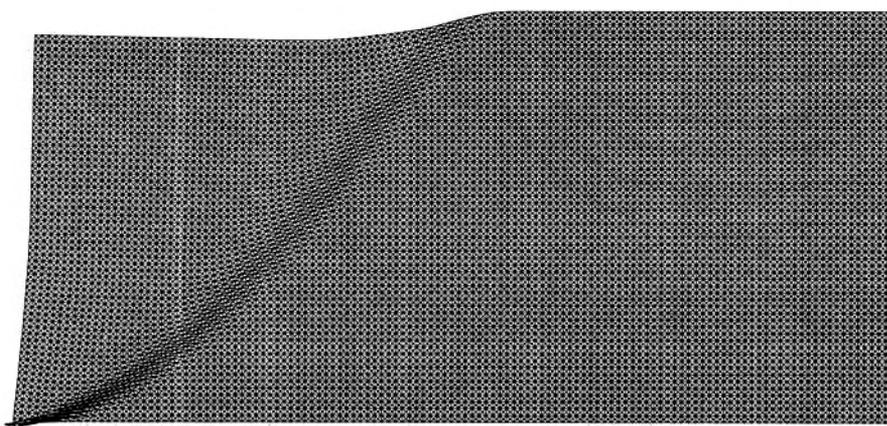


Fig. 18 – Desenvolvimento do mecanismo automaticamente calculado para a situação de adesão nula.

as referidas forças através da distribuição de tensões indicada na Figura 17, pode procurar-se combinações destas forças que causam o colapso do maciço. Na situação estudada, para um dado problema (profundidade de corte, peso volumico e resistência não drenada constantes), fixou-se a tensão tangencial aplicada, determinando-se de seguida a tensão normal (com distribuição triangular) que conduz ao colapso.

Na Figura 18, para a situação de adesão nula, mostra-se o desenvolvimento do mecanismo automaticamente obtido pela ferramenta numérica utilizada.

Sucessivos cálculos do mesmo tipo conduziram aos resultados indicados na Figura 19, que aqui se apresentam sobrepostos às curvas obtidas pela expressão 6.

Constata-se que a coincidência entre os resultados da aplicação da expressão e da metodologia agora introduzida é muito boa. Até valores de χ_{am} inferiores a 0,5 a coincidência é quase perfeita, acentuando-se a partir daí as diferenças entre as duas metodologias, sendo sempre inferiores os valores deduzidos a partir da expressão 6.

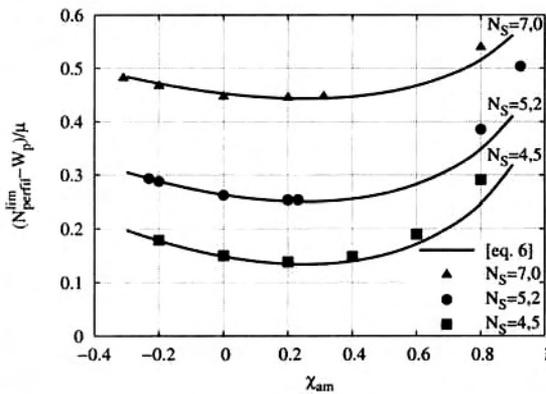


Fig. 19 - Valores de $(N_{\text{perfil}}^{\text{lim}} - W_p) / \mu$, em função de χ_{am} , obtidos pela expressão 6 e pela metodologia numérica de análise limite para distintos N_s ($\beta = 45^\circ$).

6 - COMPARAÇÃO COM OS RESULTADOS DA APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Usou-se também, como alternativa, o programa de elementos finitos referido em 3 para efectuar comparações com os resultados das expressões deduzidas. De facto, procedendo a cálculos sucessivos em que se faz variar a resistência dos perfis metálicos, mantendo constantes todas as restantes grandezas, é evidentemente possível encontrar, com uma reduzida margem de imprecisão, o valor da resistência dos perfis para o qual o maciço colapsa. Para definir este valor atendeu-se quer ao critério de convergência do

cálculo baseado no valor das forças residuais (com tolerância de 0,1%, após 20000 iterações), quer à análise da evolução dos deslocamentos. Ademais, os resultados do cálculo por elementos finitos também permitem estimar a correspondente percentagem, p , de adesão mobilizada na interface solo-cortina, ficando assim completamente definido o par de valores $(N_{\text{perfil}}^{\text{lim}} - W_p) / \mu$ e χ_{am} .

Aplicou-se esta metodologia ao caso ilustrado na Figura 6, fazendo variar a inclinação das ancoragens, β , a resistência não drenada, c_u , e a adesão da interface, c_a . Na maioria dos cálculos considerou-se $H = 18$ m e $H_p = 15$ m, mas houve alguns com $H = 12$ m e $H_p = 9$ m. Para duas das situações consideradas ($H = 18$ m, $c_u = 80$ kPa, $\beta = 45^\circ$ e $c_a = 0$ ou 50 kPa), ilustra-se na Figura 20 o processo seguido, representando-se os sucessivos valores de $(N_{\text{perfil}} - W_p) / \mu$ e os respectivos deslocamentos do vértice superior do maciço suportado. Esta figura é comentada mais adiante. Por sua vez, na Figura 16 inclui-se o conjunto de resultados obtidos, sendo as diferentes situações diferenciadas pelos valores de β , de $\chi_{am\text{máx}} = (c_a H_p) / (c_u H) = \chi_{am(p=1)}$ e de p .

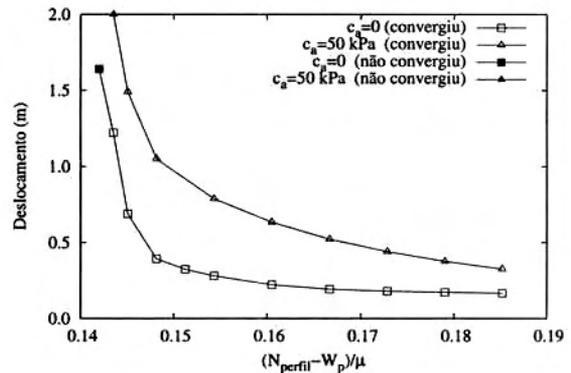


Fig. 20 - Resultados dos cálculos por elementos finitos - deslocamento do vértice superior do maciço suportado em função da resistência normalizada atribuída aos perfis metálicos, $(N_{\text{perfil}} - W_p) / \mu$.

De uma forma genérica (ver Figura 16), os pares de valores $(N_{\text{perfil}}^{\text{lim}} - W_p) / \mu$ e χ_{am} calculados por elementos finitos ajustam-se bem ao previsto pela expressão 6. Não obstante, uma análise mais fina da figura obriga a considerar separadamente as situações em que os resultados são condicionados ou não pelo valor adoptado para a adesão da interface, mais concretamente, diferenciar as situações em que $c_a = 0$ das restantes, visto que neste grupo não se inclui nenhum caso em que se verifique a mobilização total da adesão disponível.

Os resultados do primeiro grupo ($\chi_{am} = 0$) obtidos nas análises por elementos finitos coincidem com os provenientes da expressão teórica. Com efeito, nos quatro casos considerados ($\beta = 25^\circ, 35^\circ$,

45° e 55°, sendo $N_s = 4,5$ em todos os casos) as diferenças nos valores de $(N_{\text{perfil}}^{\text{lim}} - W_p)/\mu$ obtidos pelas duas vias situam-se entre 0,004 e 0,007, correspondendo as grandezas mais elevadas aos maiores β .

Os pontos representativos dos resultados dos diferentes cálculos incluídos no segundo grupo dispõem-se de uma forma peculiar: a ancoragens menos inclinadas (menores β) e terrenos mais resistentes (menores N_s) correspondem, no suposto estado limite, menores resistências dos perfis necessárias para garantir o equilíbrio e maiores percentagens de adesão mobilizada. (Note-se que, para inclinações superiores a 45° e factores de estabilidade superiores a 4,5, a adesão mobilizada é negativa, isto é, actua de forma ascendente sobre o terreno). A primeira constatação está de acordo com o previsto pela expressão 6, mas a segunda só parcialmente e de forma incompleta pode ser intuída através dessa expressão. Com efeito, quando se faz variar a inclinação das ancoragens (Figura 16a), o valor de $\chi_{\text{am-crit}}$ aumenta com a diminuição dessa inclinação, o que vai no sentido do que se constata nos resultados dos cálculos por elementos finitos, embora os valores de χ_{am} no suposto estado limite resultantes destas análises sejam bastante inferiores a $\chi_{\text{am-crit}}$; em compensação, quando variam as resistências dos terrenos (Figura 16b), $\chi_{\text{am-crit}}$ permanece inalterado, o que não concorda com os resultados dos cálculos por elementos finitos.

Para encontrar uma explicação cabal para a segunda das constatações atrás enunciadas tenha-se presente que, como se aprecia na Figura 16, no estado limite, a força total nas ancoragens cresce com a adesão mobilizada, sendo, além disso, tanto maior quanto mais inclinadas forem as ancoragens e menos resistente for o terreno.

Por outro lado, nos cálculos por elementos finitos procura-se simular a realidade impondo um valor inicial para a força nas ancoragens através da aplicação do pré-esforço, o qual, no caso das análises cujos resultados estão a ser comentados, foi definido por $\rho_{pe} = 0,3$, valor representado na Figura 16. Quando nos sucessivos cálculos por elementos finitos se diminui a resistência dos perfis metálicos, mantendo constantes todas as restantes grandezas, por forma a procurar encontrar o valor da resistência dos perfis para o qual o maciço colapsa, os deslocamentos da cortina e do maciço suportado vão sucessivamente aumentando, até se tornarem incontroláveis – como se mostra na Figura 20 – e, em correspondência, vai diminuindo a força total instalada nas ancoragens e aumentando a adesão mobilizada na interface. Portanto, o conjunto de valores de χ_{am} , N_{perfil} e ρ e, no estado limite, de χ_{am} , $N_{\text{perfil}}^{\text{lim}}$ e ρ_{lim} , para o qual se estabelece o equilíbrio, está interrelacionado, sendo essa inter-relação necessariamente dependente dos deslocamentos e, conseqüentemente, da interacção entre as várias

componentes da estrutura (maciço de fundação, maciço suportado, cortina e interface entre eles, perfis metálicos e ancoragens) e das respectivas deformabilidades relativas.

Mas, a possibilidade de diminuição da força total nas ancoragens, partindo do valor definido por $\rho_{pe} = 0,3$ e alcançando ρ_{lim} , é tanto menor quanto mais inclinadas forem as ancoragens e menos resistente for o terreno, encontrando-se assim a justificação que se procurava para a disposição peculiar dos pontos representativos dos resultados dos cálculos por elementos finitos (Figura 16).

Regresse-se agora à Figura 20, onde se mostra, para duas situações ($H = 18$ m, $c_u = 80$ kPa, $\beta = 45^\circ$ e $c_a = 0$ ou 50 kPa), os valores dos deslocamentos do vértice superior do maciço suportado em função da resistência atribuída aos perfis metálicos, a partir da qual se calculou $(N_{\text{perfil}} - W_p)/\mu$. São também indicados os casos em que se obteve convergência, bem como aqueles em que a mesma não foi alcançada. O que desde logo chama à atenção é o facto de o deslocamento do vértice superior do maciço suportado ser mais elevado no caso em que é maior a adesão da interface solo-cortina, o que, sob outro ponto de vista, confirma as conclusões anteriores sobre o efeito desfavorável que a resistência da interface pode ter quando o maciço terroso se encontra próximo do equilíbrio limite. Verifica-se, ainda, que nos dois casos é idêntico o valor mínimo da resistência dos perfis metálicos que garante a estabilidade do maciço. Face aos resultados resumidos na Figura 16 parece poder afirmar-se que essa coincidência é fortuita, quer dizer, verifica-se para as condições particulares consideradas ($N_s = 4,5$ e $\beta = 45^\circ$); para outras condições, por exemplo, se se mantiver N_s e se alterar β , deixa de se verificar essa coincidência, como se constata observando a figura em causa.

7 - CONCLUSÕES

O mecanismo de colapso de cortinas ancoradas por perda de equilíbrio vertical pode, com base na revisão bibliográfica de casos de estudo, de ensaios em modelo reduzido e de estudos numéricos, ser caracterizado por: deslocamentos verticais e horizontais do terreno e da parede muito elevados induzindo uma progressiva perda de carga nas ancoragens e conduzindo ao colapso do sistema.

No caso particular das cortinas tipo Berlim o mecanismo de colapso é desencadeado pela rotura dos perfis verticais, quer por encurvadura, quer por insuficiente capacidade de carga da sua fundação.

Devido à inexistência de lado passivo nas cortinas tipo Berlim a mobilização de tensões de corte na interface do lado activo constitui um factor determinante na compreensão do problema do equilíbrio vertical. De uma forma simplificada, se a resistência dos perfis verticais for elevada, transmitem-se tensões de corte dirigidas para baixo à

cortina que vão aumentando com o faseamento construtivo. Nesta situação ocorrem normalmente pequenos deslocamentos verticais e horizontais e pequenas variações de carga nas ancoragens. É este o comportamento adequado de uma estrutura de suporte ancorada.

No caso de rotura dos perfis a parede vai sofrer assentamentos que conduzem à mobilização de tensões de corte dirigidas para cima na interface da parede. Tais assentamentos induzem, como se viu, perda de carga nas ancoragens e, conseqüentemente, deslocamentos horizontais e verticais do terreno suportado. É particularmente interessante constatar que, quando se considera nula a resistência na interface, o comportamento global da escavação (nas situações de um fraco equilíbrio vertical) não piora.

Uma reavaliação do problema do equilíbrio vertical usando a análise limite permitiu clarificar esta aparente contradição. Admitindo mecanismos constituídos por blocos rígidos, com interfaces definidas por superfícies de deslizamento planas e circulares, procedeu-se à determinação da resistência mínima dos perfis verticais necessária para assegurar a estabilidade. Esta resistência depende das características geométricas e mecânicas da escavação e do maciço e é fortemente influenciada pela inclinação das ancoragens. A adequabilidade das soluções obtidas – em particular para a situação da superfície circular – foi confirmada por resultados de cálculos de elementos finitos, elasto-plásticos e de análise limite.

Face aos resultados obtidos e aceitando como base para o dimensionamento a situação limite apresentada neste trabalho, constituiria uma opção aceitável dimensionar os perfis verticais de cortinas tipo Berlim através da expressão 2 considerando nula a adesão mobilizada na interface solo-cortina. De facto, se N_s e β forem inferiores a 4,5 e a 45° , respectivamente, aquela opção está do lado da segurança visto que, no estado limite, o equilíbrio se estabelece sempre para valores de $N_{\text{perfil}}^{\text{lim}}$ inferiores aos respeitantes a $\chi_{\text{am}} = 0$; em contrapartida, para N_s e β superiores a 4,5 e a 45° , respectivamente, aquela opção pode ficar do lado da insegurança, embora pouco, atendendo à forma achatada das curvas de definição de $N_{\text{perfil}}^{\text{lim}}$ (equação 6) quando $\chi_{\text{am}} < 0$, valores para os quais se estabelece o equilíbrio nesses casos. Assim, tem-se das equações 2 e 6, respectivamente:

$$(N_{\text{perfil}} - W_p) = A \text{ sen} \beta = 1,5 \rho \mu \text{ sen} \beta \quad (8)$$

$$(N_{\text{perfil}}^{\text{lim}} - W_p) = \left(1 - \frac{3,831}{N_s}\right) \text{tg} \beta \mu \quad (9)$$

Fazendo $(N_{\text{perfil}} - W_p) = (N_{\text{perfil}}^{\text{lim}} - W_p)$, encontra-se uma expressão simples que define o

valor mínimo de ρ a adoptar no dimensionamento dos perfis metálicos através da equação 8, valor esse que é suposto ser sempre superior ou igual a 0,2, visto ser este o valor mínimo de ρ_{pe} :

$$\rho_{\text{mín}} = \left(1 - \frac{3,831}{N_s}\right) / 1,5 \cos \beta \geq 0,2 \quad (10)$$

Na Figura 21 apresenta-se os resultados obtidos. Como era de esperar, $\rho_{\text{mín}}$ aumenta quando pioram as características do terreno (N_s mais elevado) e aumenta a inclinação das ancoragens (β mais elevado).

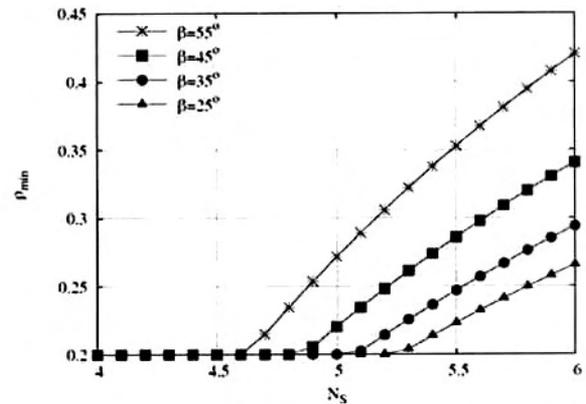


Fig. 21 - Valores de $\rho_{\text{mín}}$ em função de N_s e para várias inclinações β das ancoragens.

Faz-se notar que os resultados apresentados neste trabalho (e em particular os referidos na Figura 21) têm como referência uma situação limite. As características de deformabilidade do terreno suportado e da estrutura têm necessariamente efeitos nas cargas dos perfis verticais. Em algumas situações constata-se a aplicação aos perfis de cargas superiores às que as metodologias usadas neste trabalho permitem obter. Uma forma para o seu dimensionamento foi sugerida em Guerra et al. (2003).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Anderson, W. F., Hanna, T. H., Ponniah, D. A. e Shah, S. A. (1982) *Laboratory scale tests on anchored retaining walls supporting backfill with surface loading*. Canadian Geotechnical Journal, 19(3), pp. 213-224.
- Anderson, W. F., Hanna, T. H. e Ponniah, D. A. (1975) *Behaviour of laboratory scale anchored retaining walls supporting surcharged backfills*. Proc. First Baltic Conf. Soil Mech. Found. Engng, vol. 3, section III, pp. 1-10, Gdansk.
- Antão, A. (1997) *Analyse de la stabilité des ouvrages souterrains par une méthode cinématique régularisée*. Tese de Doutoramento. École Nationale des Ponts et Chaussées, Paris.

- Antão, A. (2003) *Implementação numérica do teorema cinemático da análise limite. Aplicação à determinação dos coeficientes de impulso activo e passivo de um meio puramente atritivo*. Actas do VII Congresso Nacional de Mecânica Teórica, Aplicada e Computacional, Évora, Vol. IV, pp.1989-1998.
- Barley, A. D. (1997) *Contribuição para a discussão na sessão 5*. Littlejohn, G. S., editor, Ground anchorages and anchored structures. Proceedings of the international conference organized by the Institution of Civil Engineers, pp. 592-596, Londres, Thomas Telford.
- Broms, B. B. e Stille, H. (1976) *Failure of anchored sheet pile walls*. ASCE Journal of Geotechnical Engineering Division, 102 (3), pp. 235-251.
- Cacoilo, D., Tamaro, G. e Edinger, P. (1998) *Design and performance of a tied-back sheet pile wall in soft clay*. ASCE Geotechnical Special Publication n. 83, Design and Construction of Earth Retaining Systems, pp. 14-25.
- Clough, G. W. e O'Rourke, T. D. (1990) *Construction induced movements of in situ walls*. ASCE Geotechnical Special Publication n. 25, Design and Performance of Earth Retaining Structures, pp. 439-470.
- Gould, J. P., Tamaro, G. J. e Powers, J. P. (1992) *Excavation and support systems in urban settings*. Excavation and Support for the Urban Infrastructure, ASCE Geotechnical Special Publication n. 33, pp. 144-171.
- Guerra, N. M. da C. (1999) *Mecanismo de colapso de estruturas de contenção tipo Berlim por perda de equilíbrio vertical*. Tese de Doutoramento, Instituto Superior Técnico, Universidade Técnica de Lisboa.
- Guerra, N. M. da C., Matos Fernandes, M., Cardoso, A. S., Gomes Correia, A. (2003) *Dimensionamento expedito dos perfis verticais de estruturas de contenção tipo Berlim definitivas*. Geotecnia 99, pp. 81-103.
- Hanna, T. H. (1968) *Design and behaviour of tied-back retaining walls*. Proc. 3rd Budapest Conf. Soil Mech. Found. Eng., pp. 410-418, Budapeste.
- Hanna, T. H. e Matallana, G. A. (1970). *The behaviour of tied-back retaining walls*. Can. Geotech. J., Ottawa, 7(4), pp. 372-396.
- Hanna, T. H. e Abu-Taleb, M. G. A. (1972) *Anchor supported walls: research and practice*. Ground Engineering, 5(2), pp. 16-20.
- Leca, E. e Dormieux, L. (1992) *Contribution à l'étude de la stabilité du front de taille d'un tunnel en milieu cohérent*. Revue Française de Géotechnique, 61, pp. 5-16.
- Matos Fernandes, M. A. (1983) *Estruturas flexíveis para suporte de terras*. Tese de Doutoramento, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto.
- Matos Fernandes, M. A. (1985) *Escavações suportadas por cortinas ancoradas: capacidade de carga do maciço à solicitação vertical transmitida pela estrutura de suporte*. Geotecnia, 4, pp. 43-64.
- Matos Fernandes, M. A., Cardoso, A. S., Trigo, J. F. C. e Marques, J. C. (1993). *Bearing capacity failure of tied-back retaining walls: a complex case of soil-wall interaction*. Computers and Geotechnics, 15, pp. 87-103.
- Matos Fernandes, M. A., Cardoso, A. S., Trigo, J. F. C. e Marques, J. C. (1994) *Soil-structure interaction: numerical analysis and modelling*, Chap. 9, Finite element modeling of supported excavations. E FN Spon.
- McRostie, G. C., Burn, K. N. e Mitchell, R. J. (1972) *The performance of tied-back sheet piling in clay*. Canadian Geotechnical Journal, 9, pp. 206-218.
- Pastor, J., Thai, T. H. e Francescato, P. (2000) *New bounds for the height limit of a vertical slope*. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 24, pp. 165-182.
- Plant, G. W. (1972) *anchors inclination – its effects on the performance of a laboratory scale tied-back retaining wall*. Proc. Inst. of Civil Eng., London, 53, part 2, pp. 257-274.
- Shannon, W. L. e Strazer, R. J. (1970) *Tied-back excavation wall for Seattle First National Bank*. ASCE Civil Engineering, 40, pp. 62-64.
- Slater, W. M. (1967) *Prestressed anchors and tie-backs in greater use*. Daily Commercial News and Building Record, pp. 16-17, referida por Hanna (1968).
- Stocker, M. F. (1991) *Contribuição para a discussão na sessão 4b*. Proceedings of 10th European Conference of Soil Mechanics and Foundation Engineering, Florença.
- Trigo, J. F. C. (1990) *A estabilidade de cortinas ancoradas em relação às acções verticais. Análise por elementos finitos*. Dissertação de Mestrado, Universidade de São Paulo, São Carlos.
- Ulrich, E. J. J. (1989) *Tieback supported cuts in overconsolidated soils*. ASCE Journal of Geotechnical Engineering Division, 115 (4), pp. 521-545.
- Ware, K. R., Mirsky, M. e Leuniz, W. E. (1973) *Tiedback wall construction – results and controls*. ASCE Journal of Soil Mechanics and Foundation Division, 99 (12), pp. 1135-1152.
- White, R. E. (1974) *Anchored walls adjacent to vertical rock cuts*. Proceedings Conference on Diaphragm Walls, pp. 35-42, Institution of Civil Engineers, referida por Clough e O'Rourke (1990)
- Winter, D. G. (1990) *Pacific First Center performance of the tieback shoring wall*. ASCE Geotechnical Special Publication n. 25, Design and Performance of Earth Retaining Structures, pp. 764-777.

ANEXO 1 - SUPERFÍCIE DE ESCORREGAMENTO PLANA

Atendendo ao campo de deformações plásticas cinematicamente compatível esquematizado na Figura 13 e igualando o trabalho das forças exteriores e o de deformação plástica, obtém-se:

$$\begin{aligned} (W_m + p c_u H_p) \delta \sin \alpha - A_{lim} \cos \beta \delta \cos \alpha = \\ = \frac{c_u H}{\sin \alpha} \delta \end{aligned} \quad (1.1)$$

em que A_{lim} e W_m representam, respectivamente, a força nas ancoragens necessária para assegurar que o maciço está em estado limite e o peso da cunha definida pela superfície de cedência. Após algumas transformações obtém-se:

$$\begin{aligned} 1 - \frac{A_{lim} \cos \beta}{\mu} + \\ + \left(\frac{1}{2} \chi_{am} \operatorname{tg} \alpha - \frac{1}{\operatorname{sen} 2\alpha} \right) \frac{4}{N_s} = 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

em que μ , N_s e χ_{am} são definidos pelas expressões 3. Introduzindo o valor de A_{lim} retirado da expressão 2 na equação 1.2, vem:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu} (N_{perfil}^{lim} - W_p) = \\ = \left[1 + \left(\frac{1}{2} \chi_{am} \operatorname{tg} \alpha - \frac{1}{\operatorname{sen} 2\alpha} \right) \frac{4}{N_s} \right] \operatorname{tg} \beta - \frac{2 \chi_{am}}{N_s} \end{aligned} \quad (1.3)$$

O ângulo α que maximiza N_{perfil}^{lim} , força axial que é necessário mobilizar nos perfis verticais para assegurar que o maciço está em estado limite, pode ser obtido do seguinte modo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_{perfil}^{lim}}{\partial \alpha} = 0 \Rightarrow \\ \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{2} \chi_{am} \operatorname{tg} \alpha - \frac{1}{\operatorname{sen} 2\alpha} \right) = 0 \Rightarrow \\ \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - \chi_{am}}} \end{aligned} \quad (1.4)$$

Note-se que $\alpha = 45^\circ$ quando a adesão mobilizada é nula. Introduzindo a equação 1.4 na equação 1.3, vem, finalmente:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu} (N_{perfil}^{lim} - W_w) = \\ = \left(1 - \sqrt{1 - \chi_{am}} \frac{4}{N_s} \right) \operatorname{tg} \beta - \frac{2 \chi_{am}}{N_s} \end{aligned} \quad (1.5)$$

ANEXO 2 - SUPERFÍCIE DE ESCORREGAMENTO CIRCULAR

O campo de deformações plásticas cinematicamente compatível esquematizado na Figura 14 obriga a que o bloco superior rode um certo ângulo δ , relativamente ao remanescente, em torno do centro da circunferência. No Quadro 2.1 clarificam-se as forças exteriores envolvidas no mecanismo representado na Figura 14, os deslocamentos que experimentam os seus pontos de aplicação em consequência daquela rotação e calculam-se os respectivos trabalhos. Avalia-se igualmente o trabalho de deformação plástica.

Igualando o trabalho das forças exteriores e o trabalho de deformação plástica e tendo presente as relações inscritas na Figura 14, obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2 \operatorname{tg} \alpha} \left(\frac{1}{\operatorname{tg}(\lambda/2)} - \frac{1}{3 \operatorname{tg} \alpha} \right) + \frac{1}{6 (\operatorname{sen} \alpha)^2} + \\ + \frac{\chi_{am}}{N_s} \left(\frac{1}{\operatorname{tg}(\lambda/2)} - \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \right) - \\ - \frac{A_{lim} \cos \beta}{2 \mu} \left(\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg}(\lambda/2)} + \frac{1}{3} \right) = \\ = \frac{\lambda}{2 N_s} \frac{1}{(\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen}(\lambda/2))^2} \end{aligned} \quad (2.1)$$

em que A_{lim} representa a força nas ancoragens necessária para assegurar que o maciço está em estado limite. Após algumas transformações obtém-se:

$$\begin{aligned} 1 - \frac{A_{lim} \cos \beta}{\mu} + \\ + \frac{\frac{1}{2} \chi_{am} (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}(\lambda/2)) - \frac{\lambda}{\operatorname{sen} 2\alpha \operatorname{sen} \lambda} \frac{4}{N_s}}{1 + \frac{1}{3} \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg}(\lambda/2)} = 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Note-se que quando $\lambda = 0$, ou seja, quando a superfície de deslizamento é plana, a expressão anterior se transforma na equação 1.2, visto que $\lambda / \operatorname{sen} \lambda = 1$ quando λ tende para 0. Introduzindo o valor de A_{lim} , retirado da expressão 2, na equação 2.2, vem:

$$\frac{1}{\mu} (N_{\text{perfil}}^{\text{lim}} - W_p) = \left[1 + \frac{\frac{1}{2} \chi_{\text{am}} (\text{tg} \alpha - \text{tg}(\lambda/2)) - \frac{\lambda}{\text{sen} 2\alpha \text{ sen} \lambda}}{1 + \frac{1}{3} \text{tg} \alpha \text{ tg}(\lambda/2)} \right] \text{tg} \beta - \frac{2 \chi_{\text{am}}}{N_s} \quad (2.3)$$

O par de valores dos ângulos α e λ , α^* e λ^* , respectivamente, que maximiza $N_{\text{perfil}}^{\text{lim}}$, força axial que é necessário mobilizar nos perfis verticais para assegurar que o maciço está em estado limite, pode ser obtido através do seguinte sistema de duas equações:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\frac{1}{\mu} (N_{\text{perfil}}^{\text{lim}} - W_p) \right] = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\frac{\frac{1}{2} \chi_{\text{am}} (\text{tg} \alpha - \text{tg}(\lambda/2)) - \frac{\lambda}{\text{sen} 2\alpha \text{ sen} \lambda}}{1 + \frac{1}{3} \text{tg} \alpha \text{ tg}(\lambda/2)} \right] = 0 \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \left[\frac{1}{\mu} (N_{\text{perfil}}^{\text{lim}} - W_p) \right] = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[\frac{\frac{1}{2} \chi_{\text{am}} (\text{tg} \alpha - \text{tg}(\lambda/2)) - \frac{\lambda}{\text{sen} 2\alpha \text{ sen} \lambda}}{1 + \frac{1}{3} \text{tg} \alpha \text{ tg}(\lambda/2)} \right] = 0$$

Após algumas transformações obtém-se as seguintes equações:

$$\left[1 - \chi_{\text{am}} \left(1 + \frac{1}{3} (\text{tg}(\lambda^*/2))^2 \right) \frac{\text{sen} \lambda^*}{\lambda^*} \right] (\text{tg} \alpha^*)^2 - \frac{2}{3} \text{tg}(\lambda^*/2) \text{tg} \alpha^* - 1 = 0 \quad (2.5)$$

$$\frac{1}{\text{tg}(\lambda^*/2)} \left(1 - \frac{\lambda^*}{\text{tg} \lambda^*} \right) + \frac{1}{3} \text{tg} \alpha^* \left(1 - \frac{\lambda^*}{\text{tg}(\lambda^*/2)} \right) + \frac{1}{2} \chi_{\text{am}} \left(1 + \frac{1}{3} (\text{tg} \alpha^*)^2 \right) \text{sen} 2\alpha^* = 0$$

Este sistema tem que ser resolvido por tentativas, para cada valor de χ_{am} . No Quadro 2.2 apresenta-se os valores de λ^* e α^* obtidos. Introduzindo os valores de λ^* e α^* na equação 2.3, vem, finalmente:

$$\frac{1}{\mu} (N_{\text{perfil}}^{\text{lim}} - W_p) = \left(1 - \frac{S}{N_s} \right) \text{tg} \beta - \frac{2 \chi_{\text{am}}}{N_s} \quad (2.6)$$

em que S é definido por:

$$S = -4 \frac{\frac{1}{2} \chi_{\text{am}} (\text{tg} \alpha^* - \text{tg}(\lambda^*/2)) - \frac{\lambda^*}{\text{sen} 2\alpha^* \text{ sen} \lambda^*}}{1 + \frac{1}{3} \text{tg} \alpha^* \text{ tg}(\lambda^*/2)} \quad (2.7)$$

e assume os valores definidos no Quadro 2.2, em função de χ_{am} .

Quadro 2.1 - Superfície de escorregamento circular: cálculo das forças e dos deslocamentos

Forças, F_i	Deslocamentos, d_i	Trabalhos, $F_i d_i / \mu H \delta$
Trabalho das forças exteriores		
$W_1 = \frac{\gamma H^2}{2 \text{tg} \alpha} = \frac{\mu}{\text{tg} \alpha}$	$\left(\frac{R}{H} \cos \theta - \frac{2}{3 \text{tg} \alpha} \right) H \delta$	$\left(\frac{R}{H} \cos \theta - \frac{2}{3 \text{tg} \alpha} \right) \frac{1}{\text{tg} \alpha}$
$W_2 = \frac{R^2}{2} (\lambda - \text{sen} \lambda) \gamma = \left(\frac{R}{H} \right)^2 (\lambda - \text{sen} \lambda) \mu$	$\frac{4}{3} \frac{R}{H} \frac{(\text{sen}(\lambda/2))^3}{\lambda - \text{sen} \lambda} \text{sen} \alpha H \delta$	$\frac{4}{3} \left(\frac{R}{H} \text{sen}(\lambda/2) \right)^3 \text{sen} \alpha$
$p c_a H_p = p c_a H_p \frac{2 \mu}{\gamma H^2} \frac{\gamma H}{c_u N_s} = 2 \frac{\chi_{\text{am}}}{N_s} \mu$	$\left(\frac{R}{H} \cos \theta - \frac{1}{\text{tg} \alpha} \right) H \delta$	$\left(\frac{R}{H} \cos \theta - \frac{1}{\text{tg} \alpha} \right) 2 \frac{\chi_{\text{am}}}{N_s}$
$A \cos \beta = \frac{A \cos \beta}{\mu}$	$\left(\frac{R}{H} \text{sen} \theta + \frac{2}{3} \right) H \delta$	$\left(\frac{R}{H} \text{sen} \theta + \frac{2}{3} \right) \frac{A \cos \beta}{\mu}$
Trabalho de deformação plástica		
$\lambda R c_u = \lambda R c_u \frac{2 \mu}{\gamma H^2} \frac{\gamma H}{c_u N_s} = \lambda \frac{2}{N_s} \frac{R}{H} \mu$	$\frac{R}{H} H \delta$	$\lambda \frac{2}{N_s} \left(\frac{R}{H} \right)^2$

Quadro 2.2 - Valores de λ^* e α^* , obtidos por tentativas, e de S

χ_{am}	-0,3	-0,2	-0,1	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
$\lambda^*(\chi_{am})$	43,17	38,82	34,44	30,02	25,56	21,05	16,51	11,95	7,39	2,90	0,00	0,00	0,00
$\alpha^*(\chi_{am})$	44,71	45,55	46,49	47,55	48,75	50,11	51,66	53,45	55,53	58,03	61,29	65,91	72,45
S	4,212	4,100	3,973	3,831	3,672	3,494	3,295	3,071	2,818	2,528	2,191	1,789	1,265