

Algumas aplicações da análise limite numérica a problemas geotécnicos

Some applications of numerical limit analysis to geotechnical problems

Eurípedes do Amaral

Vargas Jr.*

Luiz Gonzaga de

Araújo**

Aldo Durand Farfan***

Paulo André

Lemos****

Luiz Eloy Vaz*****

* Professor Associado, Dep. de Engenharia Civil, Universidade Católica do Rio de Janeiro, E-mail: vargas@civ.puc-rio.br

** Professor Adjunto, Dep. de Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto, E-mail: luiz@em.ufop.br

*** Professor Adjunto, Dep. de Engenharia Civil, Universidade Estadual do Norte Fluminense, E-mail: aldo@uenf.br

**** Engenheiro Civil, Msc em Geotecnia, Golder Associates Brasil, E-mail: plemos@golder.com.br

***** Professor Titular, Dep. de Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio de Janeiro, E-mail: eloy@civ.puc-rio.br

RESUMO - Várias formulações numéricas da análise limite têm sido propostas para a solução de problemas geotécnicos de estabilidade. Nestas formulações, o problema de estabilidade é colocado como um problema da Programação Matemática. Este problema pode ser resolvido diretamente por métodos de programação não linear (PNL) ou aproximado por um problema da programação linear (PL). Este trabalho apresenta uma formulação mista de análise limite para solucionar problemas de estabilidade da geotecnia em meios contínuos, meios fraturados ou solos reforçados, sob condição de deformação plana, pelo método dos elementos finitos. Para a descrição do comportamento do maciço rochoso, o critério de Hoek e Brown pode ser usado como função de escoamento. Para o solo é empregado o critério de escoamento de Mohr-Coulomb na forma linearizada e a condição de escoamento de interfaces é descrita pelo critério de Coulomb. O solo, as interfaces e o reforço são idealizados com comportamento rígido-plásticos perfeitos, na hipótese de plasticidade associada. Os exemplos de problemas de estabilidade em rocha foram resolvidos pela programação não linear. Os problemas de estabilidade em solos e solos reforçados foram resolvidos pela técnica de PL. Os resultados obtidos nos exemplos estudados pelas implementações numéricas indicam que a metodologia apresentada tem considerável potencial para ser aplicada a problemas de engenharia geotécnica.

SYNOPSIS - Various formulations for the numerical limit analysis have been proposed for the solution of stability problems in geotechnical engineering, formulated as a Mathematical Programming problem. The problem can be solved directly as a Non-linear Mathematical Programming problem or approximated by a Linear Mathematical programming problem. This paper presents a mixed formulation for limit analysis to solve stability problems in continuum, fractured, and reinforced geological (soil or rock) media under the condition of plane strain and using the Finite Element Method. For the description of the rock mass, Hoek and Brown criterion is used as yield function. For the soil description, Mohr-Coulomb criterion is used in a linearized form. The yield condition for the interfaces is described by the Coulomb criterion. The soil, the interfaces and the reinforcement are idealized as rigid-plastic materials with an associated flow rule. The results obtained in the examples indicate that the methodology presented has considerable potential to be applied to the solution of geotechnical problems.

Palavras-chave – Problema de estabilidade, análise limite, solo reforçado, meio fraturado, programação matemática.

1 - INTRODUÇÃO

Problemas de estabilidade em geotecnia (fundações, taludes, empuxos de terra, etc) são aqueles que tratam da ruptura de massas de solo, solos reforçados ou maciços rochosos.

Na prática da engenharia civil, a solução destes problemas é mais comumente obtida através do método do equilíbrio limite (Terzaghi, 1943). A solução destes problemas pode também ser obtida pela via da análise limite com base nos Teoremas Limites da plasticidade (Drucker *et al.*, 1952). Finn (1967) e Chen (1975) empregam os Teoremas Limites para a solução de um grande número de problemas geotécnicos e o último autor coloca a solução de vários importantes problemas de engenharia civil sob forma analítica, de tabelas ou gráficos.

Em vários trabalhos, os problemas de estabilidade em geotecnia são formulados pelo método dos elementos finitos, obtendo-se um problema de programação matemática não linear (Casciaro e Cascini, 1982; Tamura *et al.*, 1987; Borges, 1991; Singh e Basudhar, 1993-a; Jiang, 1995). A não linearidade do problema, na maioria das formulações, é devida ao critério de escoamento empregado em geotecnia que é normalmente não linear (ver, p. ex., as relações 17 e 18 deste trabalho).

O formato geral do problema não linear está indicado na seção 2.3, onde se observa que na formulação mista a equação de equilíbrio é linear e a não linearidade do problema é causada pelo critério de escoamento do material.

Para a condição de deformação plana, vários autores fazem uma aproximação linear de condição de escoamento do solo para a obtenção de um problema de programação linear (PL).

O formato geral do problema na forma linear está indicado na seção 2.4.

Os problemas de estabilidade em geotecnia diferem da forma padrão dos problemas de PL, uma vez que as variáveis (componentes de tensão) podem assumir valores negativos. Entretanto, este problema de PL, mesmo fora da forma padrão, pode ser resolvido por programas comerciais de computadores.

As primeiras formulações numéricas para a geotecnia estudam os problemas de estabilidade em solos modelados como meios contínuos. Além das formulações não lineares já citadas, podem ser listados os seguintes trabalhos: Lysmer (1970); Christiansen (1981); Sloan (1987-a, 1987-b) e Faria (1992) que empregam a programação linear.

Aplicações numéricas da análise limite a meios fraturados ou descontínuos começaram aparecer mais tarde (Livesley, 1978; Faria, 1992; Yu e Sloan, 1994; Araújo, 1997).

A formulação apresentada neste trabalho pode modelar o comportamento de maciços rochosos pela técnica do contínuo equivalente ou pela técnica discreta. A técnica do contínuo equivalente pode ser aplicada quando o maciço rochoso apresenta famílias regulares de descontinuidades com espaçamento entre as descontinuidades de cada família relativamente pequeno em relação a uma dimensão característica do problema em estudo (Gerrard e Pande, 1985). A técnica discreta pode ser aplicada quando o maciço apresenta um número reduzido de interfaces ou juntas, viabilizando discretização do meio e das juntas.

Os problemas de estabilidade em solos reforçados podem ser modelados pela técnica do contínuo equivalente ou pela técnica discreta.

A técnica do contínuo equivalente pode ser usada quando o espaçamento das camadas do reforço é pequeno em relação a uma dimensão característica do problema. Formulações com proposta de modelagem pela técnica do contínuo equivalente tiveram início na década passada (Singh e Basudhar, 1993-b, Yu e Sloan, 1997; Francescato e Pastor, 1997; Michalowski, 1998; Porbaha *et al.*, 2000; Sousa, 2001 e Lemos, 2002).

A aplicação da técnica discreta é viável quando o número de camadas de reforço é relativamente pequeno, possibilitando a discretização do meio, interfaces solo-reforço e reforço (Sousa, 2001; Lemos, 2002).

Este trabalho apresenta uma formulação mista de análise limite pelo método dos elementos finitos (MEF) para problemas de estabilidade em meios contínuos, fraturados e solos reforçados, na condição de deformação plana. Na formulação, o contínuo é discretizado através de elementos quadriláteros de 4 nós, as interfaces solo-reforço ou as descontinuidades da rocha são modeladas por meio de elementos de interface (junta) de 4 nós e o reforço é modelado através de elementos de barra de 2 nós. A solução do problema de programação matemática resultante pode ser realizada pela técnica linear (PL) ou pela técnica não linear (PNL).

Numa implementação realizada, a modelagem dos problemas de estabilidade em maciços rochosos pode ser feita pelo programa LIMAG, desenvolvido por Durand (2000). Esta implementação trabalha com a formulação não linear, onde é empregado o critério de Hoek e Brown (1980) como função de escoamento (não linear) e o problema de PNL pode ser resolvido por várias técnicas não lineares. Os exemplos apresentados neste trabalho foram resolvidos pelo otimizador MINOS (Murtagh e Saunders, 1987), capaz de resolver problemas não lineares.

Na implementação linear, a modelagem dos problemas de estabilidade pode ser feita pelo programa ANALIM, desenvolvido por Araújo (1997) e Lemos (2002). Esta implementação

emprega a forma linearizada do critério de Mohr-Coulomb para descrever a condição de escoamento do material. A condição de escoamento das interfaces é descrita pelo critério de Coulomb e para o reforço esta condição é caracterizada pela limitação da tensão atuante. As condições de escoamento do reforço e das interfaces são naturalmente lineares. Nos exemplos apresentados neste trabalho, problema de PL resultante é resolvido pelo otimizador linear LINDO (Schrage, 1991).

São hipóteses fundamentais da formulação a validade da teoria das pequenas deformações e comportamento rígido-plástico perfeito para os materiais, interfaces e reforço.

2 - FORMULAÇÃO PARA MEIOS CONTÍNUOS

O problema de estabilidade em meio contínuo, formulado como um problema de análise limite pode ser expresso matematicamente como (Lysmer, 1970; Casciaro e Cascini, 1982):

Dado:

f em V (forças no domínio)
 t em S_t (forças no contorno)

Encontrar: $\lambda, \sigma, \dot{u}, \dot{\epsilon}$ e $\dot{\gamma}$

Tal que sejam satisfeitos:

Equilíbrio estático:

$$\begin{cases} \nabla^T \sigma = \lambda f, & \text{em } V \\ \sigma \eta = \lambda t, & \text{em } S_t \end{cases} \quad (1)$$

Critério de escoamento:

$$F(\sigma) \leq 0, \quad \text{em } V \quad (2)$$

Consistência cinemática:

$$\begin{cases} \dot{\epsilon} = \nabla \dot{u}, & \text{em } V \\ \dot{u} = 0, & \text{em } S_u \end{cases} \quad (3)$$

Lei de fluxo:

$$\dot{\epsilon}^p = \dot{\gamma} \frac{\partial F}{\partial \sigma} \begin{cases} \dot{\gamma} = 0, & \text{se } F(\sigma) < 0 \\ \dot{\gamma} \geq 0, & \text{se } F(\sigma) = 0 \end{cases} \quad (4)$$

onde f é o vetor de forças de massa aplicadas no domínio, t é o vetor de forças aplicadas no contorno

do sistema, η é o vetor normal à superfície S_t , σ é o campo de tensões do sistema, $\dot{u}$ é o campo de taxas de deslocamento ou campo de velocidades do sistema, $\dot{\epsilon}^p$ é o campo da taxa de deformação plásticas do sistema, λ é o fator de colapso do sistema, $\dot{\gamma}$ é o fator de plastificação.

A resolução do problema matemático exposto nas equações (1, 2, 3 e 4) não é simples inclusive numericamente devido às relações de desigualdade (2 e 4). Entretanto, existem técnicas simplificadas de resolução deste sistema orientadas a obter principalmente o fator de colapso λ através das variáveis estáticas (F, σ) ou através das variáveis cinemáticas ($\dot{u}, \dot{\epsilon}^p$). As primeiras técnicas satisfazem às condições do teorema inferior e as segundas satisfazem às condições do teorema superior da análise limite (Drucker *et al.*, 1952; Chen, 1975).

No presente trabalho será utilizada a formulação da análise limite denominada mista e fraca. Mista devido a que são consideradas relações estáticas e cinemáticas na condição de equilíbrio e fraca porque é aplicado o princípio dos trabalhos (potências) virtuais para satisfazer a condição de equilíbrio, como pode ser explicado no próximo item.

2.1 – Condição de equilíbrio

Para a satisfação desta condição é aplicado o princípio dos trabalhos (potências) virtuais:

$$\int_V (\delta \dot{\epsilon}^T \sigma) dV = \lambda \left[\int_V (\delta \dot{u}^T f) dV + \int_{S_t} (\delta \dot{u}^T t) dS_t \right] \quad (5)$$

Discretizam-se os campos de tensões e velocidades do sistema segundo as relações abaixo:

$$\sigma = H_\sigma \hat{\sigma} \quad ; \quad \dot{u} = H_u \hat{u} \quad (6)$$

onde $\hat{\sigma}$ e $\hat{u}$ são os campos nodais de tensões e velocidades, respectivamente. H_σ e H_u representam as matrizes com as funções de interpolação para o campo de tensões e o campo das velocidades, respectivamente.

Em consequência, a taxa de deformação pode ser expressa como:

$$\dot{\epsilon} = \nabla_u \dot{u} = \nabla_u H_u \hat{u} = B_u \hat{u} \quad (7)$$

Substituindo-se as equações (6 e 7) na equação (5) e efetuando-se as simplificações, obtém-se a relação abaixo:

$$\int_V (B_u^T H_\sigma) \hat{\sigma} dV = \lambda \left[\int_V H_f^T f dV + \int_{S_t} H_t^T t dS_t \right] \quad (8)$$

Pode-se observar que para chegar a esta expressão (8) foram utilizadas relações estáticas e cinemáticas e no entanto somente as variáveis estáticas estão presentes na eq. (8).

Se

$$C^T = \int_V B_u^T H_\sigma dV \quad (9)$$

e

$$f_0 = \left[\int_V H_u^T f dV + \int_{S_t} H_u^T t dS_t \right] \quad (10)$$

então a condição de equilíbrio, eq. (8), pode ser escrita na forma matricial como:

$$C^T \hat{\sigma} = \lambda f_0 \quad (11)$$

Se for considerada a matriz H_σ como uma matriz com sub-matrizes unitárias, então ter-se-á um elemento de tensão constante. Assim, a equação (8) pode ser re-escrita como:

$$\int_V B_u^T dV \hat{\sigma} = \lambda \left[\int_V H_u^T f dV + \int_{S_t} H_u^T t dS_t \right] \quad (12)$$

O vetor f_0 representa as forças internas e externas ativas, ou seja, as forças a serem majoradas pelo fator λ até atingir a iminência de colapso do sistema. Caso existam forças passivas, f_p , ou seja, aquelas que não sofrerão majoração pelo fator λ , estas deverão ser colocadas do lado direito da equação (12), obtendo-se a expressão geral abaixo:

$$C^T \hat{\sigma} = \lambda f_0 + f_p \quad (13)$$

2.2 Condição de escoamento do material

As funções de escoamento utilizadas neste trabalho são as de Mohr-Coulomb e de Hoek-Brown. O primeiro critério de escoamento é comumente usado para representar o comportamento dos solos e o segundo, para representar o comportamento de maciços rochosos.

a) Critério de escoamento de Mohr-Coulomb

O critério de escoamento de Mohr-Coulomb no espaço das tensões principais σ_1 , σ_2 e σ_3 pode ser representado pela expressão abaixo:

$$\sigma_1 (1 + \sin(\phi)) - \sigma_3 (1 - \sin(\phi)) - 2c \cos(\phi) \leq 0 \quad (14)$$

onde ϕ (ou φ) e c são, respectivamente, o ângulo de atrito e a coesão do material.

Para o caso plano de deformação, as tensões principais podem ser expressas em função das componentes de tensão σ_{xx} , σ_{yy} e τ_{xy} :

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + (\tau_{xy})^2} \quad (15)$$

$$\sigma_3 = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + (\tau_{xy})^2} \quad (16)$$

A substituição das tensões principais na relação (14) conduz à seguinte relação:

$$F(\sigma) = (\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 - [2c \cos \phi - (\sigma_x + \sigma_y) \sin \phi]^2 \leq 0 \quad (17)$$

A expressão acima representa uma quádrlica no espaço das tensões σ_{xx} , σ_{yy} e τ_{xy} .

A função de escoamento de Mohr-Coulomb se torna uma função não linear no espaço das tensões σ_{xx} , σ_{yy} e τ_{xy} .

b) Critério de escoamento de Hoek e Brown (1980)

Este critério de escoamento no espaço das tensões principais pode ser representado pela expressão abaixo:

$$(\sigma_1 - \sigma_3)^2 - (s \sigma_c^2 - m \sigma_c \sigma_1) \leq 0 \quad (18)$$

onde m e s representam os parâmetros de resistência do maciço rochoso que podem ser obtidos através de classificação geomecânica e o parâmetro σ_c é a resistência a compressão simples do material intacto. Como o critério de escoamento de Mohr-Coulomb, o critério de Hoek e Brown é uma função não linear das tensões σ_{xx} , σ_{yy} e τ_{xy} .

2.3 – Formação do problema de PNL

A consideração da equação de equilíbrio do problema na forma discreta, eq. (13), e a prescrição do critério de escoamento em todos os pontos nodais de tensão conduzem a um problema de programação não linear (PNL). Portanto, o problema de análise limite pode ser expresso como um problema de otimização na forma abaixo:

Max λ

Sujeito a

global dos termos independentes das restrições de escoamento do material.

Definições detalhadas das matrizes e vetores apresentados acima podem ser vistas em Lemos (2002).

O termo à direita das restrições de equilíbrio do problema acima representa o vetor de carregamento nodal equivalente constituído por duas parcelas (Faria, 1992): uma devida às cargas passivas ou permanentes, $\mathbf{f}_p$, e outra devida às cargas ativas, $\mathbf{f}_0$, que são ampliadas pelo escalar λ . O valor de λ que resolve o problema anterior é denominado fator de colapso.

A montagem dos vetores $\mathbf{f}_p$ e $\mathbf{f}_0$ segue a sistemática padrão do MEF e entende-se por cargas permanentes aquelas que não são ampliadas pelo fator λ .

O problema de PL, acima colocado, não está na sua forma padrão, uma vez que as componentes de tensão podem assumir valores negativos. Este problema de PL, mesmo não estando na forma padrão, pode ser resolvido por programas comerciais, como p. ex., o programa LINDO (Schrage, 1991) usado neste trabalho. O número de variáveis do problema é igual a $3.n_t + 1$ e o número de restrições de escoamento é dado por $p.n_t$.

3 - FORMULAÇÃO PARA MEIOS FRATURADOS

Nesta seção, apresenta-se uma extensão da formulação para a modelagem do colapso de maciços rochosos. As técnicas para modelagem do problema, aqui apresentadas, podem ser do contínuo equivalente ou de juntas discretas.

O modelo do contínuo equivalente é adequado quando o maciço rochoso apresenta uma ou mais famílias de descontinuidades com espaçamento médio muito menor que a dimensão característica do problema em questão (Gerrard e Pande, 1985).

Um modelo que pode representar este tipo de problema é conhecido por modelo multilaminar (Zienkiewicz e Pande, 1977).

O maciço rochoso real é substituído por um contínuo (material equivalente) onde a lei constitutiva é tal que sua resposta seja idêntica à do maciço rochoso com seu sistema de descontinuidades.

As características do material equivalente são estabelecidas admitindo-se que a influência de cada família de descontinuidade esteja presente em qualquer ponto do meio e que cada família, por hipótese, ocupe um volume desprezível do maciço rochoso. Portanto, admite-se que o mesmo estado de tensão seja experimentado pela rocha e pelas descontinuidades. As hipóteses mais importantes do modelo (Gerrard e Pande) são

- o estado de tensão num dado ponto do meio é experimentado pela rocha intacta e pelas descontinuidades;

- o incremento da deformação do material equivalente é igual à soma dos incrementos da deformação da rocha intacta e das descontinuidades.

Para a descrição do comportamento da rocha intacta e das descontinuidades, podem ser usados quaisquer modelos constitutivos que se julgarem apropriados. A análise pode considerar ou não a possibilidade de fluxo da rocha intacta. Geralmente, não há fluxo do material intacto, porque as descontinuidades são relativamente mais fracas.

A modelagem discreta das juntas é viável quando o número de juntas presentes no domínio da análise é reduzido. A análise numérica neste caso pode ser conduzida mediante a discretização do meio em elementos finitos, inclusive as juntas. As juntas são discretizadas em elementos especiais, chamados elementos de junta ou de interface.

Os elementos de junta são elementos especiais capazes de simular movimentos relativos na interface da junta. Os movimentos podem ser de deslizamento, separação ou fechamento da junta. Os modelos de elementos de junta podem considerar juntas com ou sem espessura na sua idealização.

Neste trabalho, as juntas são idealizadas como elementos sem espessura por conveniência matemática.

3.1 – Formulação para meios fraturados pela técnica do contínuo equivalente

A Figura 1 mostra, esquematicamente, um meio multilaminado ou multilaminar, contendo uma única família de descontinuidades.

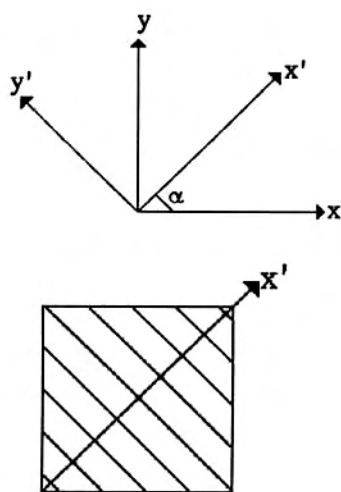


Fig. 1 - Meio multilaminado com uma família de descontinuidade e sua orientação.

O estado de tensão σ , num dado ponto do meio, é experimentado pela descontinuidade e pelo material intacto.

3.1.1 - Equilíbrio do elemento

Por se tratar de uma abordagem do tipo contínuo, a equação de equilíbrio do problema permanece na forma da eq. (13).

3.1.2 – Condição de escoamento

Para examinar a possibilidade de fluxo na descontinuidade, no ponto em consideração, o estado de tensão σ deve ser representado no sistema de referência da descontinuidade. Admite-se que o critério de escoamento da descontinuidade seja o de Coulomb, como esboçado na Figura 2, onde o plano de fraqueza (descontinuidade) tem coesão c_j e ângulo de atrito ϕ_j .

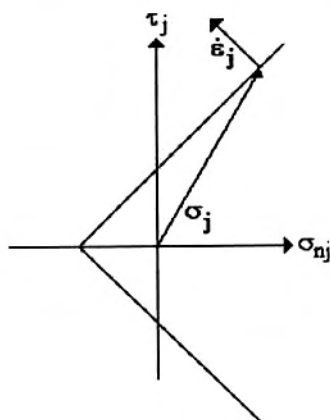


Fig. 2 - Critério de escoamento de Coulomb para a junta ou interface.

O estado de tensão σ irá produzir as componentes de tensão τ_j no plano da descontinuidade e σ_n normal ao mesmo plano.

σ_j , que tem componentes no sistema de referência local da descontinuidade, pode ser calculada em função de σ , expressa no sistema global de referência pela seguinte expressão (Jaeger e Cook, 1979):

$$\sigma_i = \mathbf{T}\sigma \quad (28)$$

onde

$$\sigma_j^T = [\tau_j \quad \sigma_{nj}] \quad (29)$$

$$\sigma^T = [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy}] \quad (30)$$

onde

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\sin 2\alpha & \frac{1}{2}\sin 2\alpha & \cos 2\alpha \\ \cos^2 \alpha & \sin^2 \alpha & \sin 2\alpha \end{bmatrix} \quad (31)$$

é a matriz de rotação de tensões.

As tensões na junta devem obedecer ao critério de escoamento de Coulomb, definindo a região viável (ver Figura 5)

$$\tau_i \leq -\sigma_{ni} \operatorname{tg} \varphi_i + c_i \quad (32)$$

$$-\tau_i \leq -\sigma_{ni} \operatorname{tg} \varphi_i + c_i \quad (33)$$

As inequações acima podem ser colocadas na forma matricial abaixo:

$$\begin{bmatrix} 1 & \operatorname{tg} \varphi_j \\ -1 & \operatorname{tg} \varphi_i \end{bmatrix} \sigma_j \leq R_j \quad (34)$$

onde

$$\mathbf{R}_j^T = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_j & \mathbf{c}_j \end{bmatrix} \quad (35)$$

O sistema de inequações pode ser expresso em função de σ , resultando a expressão

$$\begin{bmatrix} 1 & \text{tg } \varphi_j \\ -1 & \text{tg } \varphi_i \end{bmatrix} \mathbf{T}\boldsymbol{\sigma} \leq \mathbf{R}_j \quad (36)$$

que é da forma

$$\mathbf{Q}_i^T \boldsymbol{\sigma} \leq \mathbf{R}_i \quad (37)$$

onde

$$\mathbf{Q}_j^T = \begin{bmatrix} 1 & \text{tg } \varphi_j \\ -1 & \text{tg } \varphi_j \end{bmatrix} \mathbf{T} \quad (38)$$

Estas restrições, relação (37), devem ser aplicadas a todos os pontos nodais de tensão.

Se for considerada a possibilidade de escoamento da rocha intacta, devem, ainda, ser respeitadas as restrições adicionais sobre as componentes de tensão nos pontos impostas pelo critério de escoamento da rocha intacta, relação (24).

Assim, a presença de uma família de descontinuidades (juntas) no maciço rochoso impõe certas restrições adicionais no campo de tensão. Para o caso do modelo de escoamento em consideração, há duas restrições adicionais nas componentes de tensão em cada ponto para cada família de descontinuidades, relação (37), além das restrições de fluxo do material intacto (relação 24, no caso de

aproximação linear do critério de escoamento da rocha).

3.1.3 – Formação do problema de PL pela técnica do contínuo equivalente

A montagem da equação de equilíbrio para todos os elementos da malha e a imposição do critério de escoamento do material intacto e das famílias de descontinuidades em todos os pontos nodais de tensão conduzem a um problema de programação linear (PL) do tipo definido no item 2.4 que pode ser posto sob a forma abaixo:

Max λ
 Sujeito a

$$\mathbf{C}^T \mathbf{X} = \mathbf{f}_p + \lambda \mathbf{f}_0 \quad (\text{restrições de equilíbrio})$$

$$\mathbf{Q}^T \mathbf{X} \leq \mathbf{R} \quad (\text{restrições de escoamento})$$

No problema acima, as restrições de escoamento englobam as restrições para o material intacto e para as famílias de descontinuidades.

3.2 – Formulação para meios fraturados pela técnica discreta

3.2.1 - Equilíbrio do elemento de interface

A Figura 3 ilustra um elemento de junta ou interface linear em velocidades e de tensão constante e de comprimento L_i , por unidade de largura, e sem espessura.

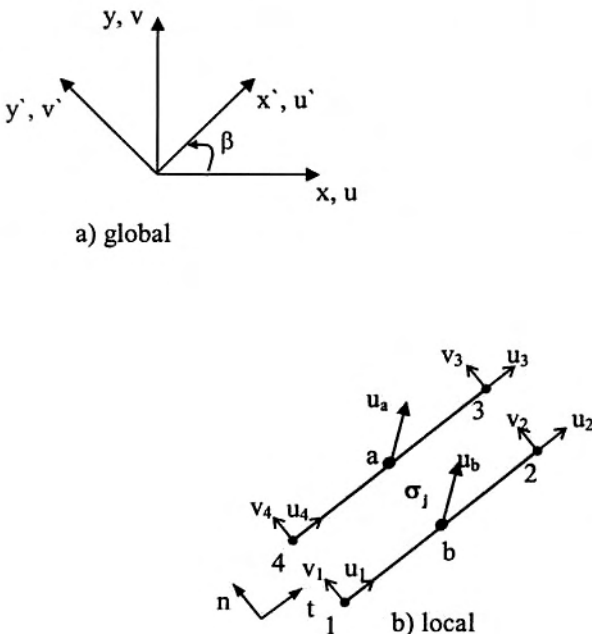


Fig. 3 – Sistema de coordenadas do elemento de interface.

A deformação da interface no seu sistema de referência local pode ser definida por

$$\epsilon_j = \mathbf{u}_a - \mathbf{u}_b \quad (39)$$

Interpolando-se as velocidades nos pontos a e b, de mesmas coordenadas, obtêm-se as seguintes equações:

$$\mathbf{u}_a = h_2 \mathbf{u}_3 + h_1 \mathbf{u}_4 \quad (40)$$

$$\mathbf{u}_b = h_1 \mathbf{u}_1 + h_2 \mathbf{u}_2 \quad (41)$$

onde $\mathbf{u}_a^T = [u_a \quad v_a]$ é a velocidade no ponto a;

$\mathbf{u}_b^T = [u_b \quad v_b]$ é a velocidade no ponto b;

$h_1 = 1 - \frac{x}{L_i}$; $h_2 = \frac{x}{L_i}$ são as funções de

interpolação das velocidades e $\mathbf{u}_k^T = [u_k \quad v_k]$ é a velocidade no ponto nodal k ($k = 1, \dots, 4$).

A substituição das velocidades nos pontos a e b, eq. (40) e eq. (41), na eq. (39), fornece a deformação da interface, na forma abaixo:

$$\epsilon_j = [-\mathbf{H}_1 \mid -\mathbf{H}_2 \mid \mathbf{H}_2 \mid \mathbf{H}_1] \hat{\mathbf{u}}_j \quad (42)$$

onde

$$\mathbf{B}_j = [-\mathbf{H}_1 \mid -\mathbf{H}_2 \mid \mathbf{H}_2 \mid \mathbf{H}_1] \quad (43)$$

$$\mathbf{H}_k = h_k \mathbf{I}; k = 1, 2 \quad (44)$$

$\mathbf{I}$ = matriz de identidade (2x2)

$$\hat{\mathbf{u}}_j^T = [\mathbf{u}_1^T \mid \mathbf{u}_2^T \mid \mathbf{u}_3^T \mid \mathbf{u}_4^T] \quad (45)$$

é o vetor das velocidades nos pontos nodais do elemento da interface.

A relação (42) pode ser escrita sob a forma abaixo:

$$\epsilon_j = \mathbf{B}_j \hat{\mathbf{u}}_j \quad (46)$$

O vetor das forças internas ($\mathbf{f}_{in}$) do elemento de interface pode ser expresso pela equação abaixo:

$$\mathbf{f}_{in} = \int_S \mathbf{B}_j^T \sigma_j dS \quad (47)$$

onde $\sigma_j^T = [\tau \quad \sigma_N]$ é o vetor das tensões atuantes na interface (tensão de cisalhamento e tensão normal ao plano da interface).

Para o elemento de interface de tensão constante vale a seguinte expressão:

$$\sigma_j = \mathbf{I} \hat{\sigma}_j \quad (48)$$

A substituição da tensão atuante na interface, eq. (48), na eq. (47), fornece a equação de equilíbrio do elemento de interface sob a forma:

$$\mathbf{f}_{in} = \mathbf{C}_j^T \hat{\sigma}_j \quad (49)$$

Integrando-se $\mathbf{B}_j^T$, obtém-se a matriz de equilíbrio no sistema local de coordenadas da interface, sob a forma abaixo:

$$\mathbf{C}_j^T = \int_s \mathbf{B}_j^T \mathbf{I} ds = \frac{L_i}{2} \begin{bmatrix} -\mathbf{I} \\ -\mathbf{I} \\ \mathbf{I} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (50)$$

A colocação da equação de equilíbrio no sistema global de coordenadas é feita pela pré-multiplicação da matriz $\mathbf{I}$, eq. (50), pela matriz de rotação de vetores, resultando a expressão abaixo:

$$(\mathbf{C}_j^T)^{gl} = \frac{L_i}{2} \begin{bmatrix} -\mathbf{M}^T \\ -\mathbf{M}^T \\ \mathbf{M}^T \\ \mathbf{M}^T \end{bmatrix} \quad (51)$$

onde

$$\mathbf{M}^T = \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix} \quad (52)$$

é a matriz de rotação de vetores.

3.2.2 - Condição de escoamento da interface

O critério de escoamento de Coulomb é usado para modelar a condição de escoamento da interface e pode ser escrito sob a forma:

$$(\mathbf{Q}_i^j)^T \sigma_i^j \leq \mathbf{R}_i^j \quad (53)$$

onde

$$(\mathbf{Q}_i^j)^T = \begin{bmatrix} 1 & \tan\phi_{in} \\ -1 & \tan\phi_{in} \end{bmatrix} \quad (54)$$

é a matriz das restrições de escoamento num elemento de interface; $(\sigma_i^j)^T = [\tau \quad \sigma_N]$ é o vetor das tensões atuantes no interior do elemento de interface; $(\mathbf{R}_i^j)^T = [c_{in} \quad c_{in}]$ é o vetor dos termos independentes das restrições de escoamento num elemento de interface; c_{in} é a coesão da interface e ϕ_{in} é o ângulo de atrito da interface.

3.2.3 - Formação do problema de PL pela técnica discreta e com elemento de interface

A montagem da matriz de equilíbrio dos elementos de rocha e da matriz de equilíbrio da interface para todos os elementos de rocha e interface, conduz à equação de equilíbrio global, na forma abaixo:

$$\mathbf{C}^T \mathbf{X} = \lambda \mathbf{f}_0 + \mathbf{f}_p \quad (55)$$

onde

$$\mathbf{C}^T = [(\mathbf{C}_r)^T \mid (\mathbf{C}_j)^T] \quad (56)$$

é a matriz global de equilíbrio resultante da contribuição dos elementos de rocha e de interface;

$$\mathbf{X}^T = [\sigma_1^T \mid \sigma_2^T \mid \dots \mid \sigma_m^T \mid (\sigma_i^j)^T \mid \dots \mid (\sigma_n^j)^T] \quad (57)$$

é o vetor das componentes de tensão em todos os elementos de rocha e de interface; m é o número de pontos nodais de tensão; n_j é o número de elementos de interface.

Da imposição da condição de escoamento da rocha, relação (24) e da interface, relação (53), obtém-se as restrições de escoamento global, sob a forma abaixo:

$$\mathbf{Q}^T \mathbf{X} \leq \mathbf{R} \quad (58)$$

onde

$$\mathbf{Q}^T = \begin{bmatrix} (\mathbf{Q}_m^R)^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & (\mathbf{Q}_n^j)^T \end{bmatrix} \quad (59)$$

é a matriz global das restrições de escoamento da rocha e da interface;

$$\mathbf{R}^T = [(\mathbf{R}_m^R)^T \mid (\mathbf{R}_n^j)^T] \quad (60)$$

é vetor global dos termos independentes das restrições de escoamento dos materiais;

A formulação conduz ao problema de PL, que pode ser colocado sob a forma abaixo:

Max λ
sujeito a

$$C^T X = f_p + \lambda f_0 \quad (\text{restrições de equilíbrio})$$

$$Q^T X \leq R \quad (\text{restrições de escoamento})$$

4 – FORMULAÇÃO PARA SOLOS REFORÇADOS

4.1 - Formulação para solos reforçados pela técnica do contínuo equivalente

Na formulação pela técnica do contínuo equivalente, a condição de escoamento do meio equivalente é descrita através do critério de escoamento do solo, da interface solo-reforço e do reforço (Sousa, 2001).

Sob condição de deformação plana (plano x-y) e admitindo-se a hipótese de validade do modelo contínuo equivalente (condição $d/h \ll 1$, Figura 4), Yu e Sloan (1997) encontraram as seguintes equações para as componentes de tensão atuante no solo expressas no sistema global de coordenadas:

$$\sigma_x^s = \sigma_x - \sigma^r \cos^2 \beta \quad (61)$$

$$\sigma_y^s = \sigma_y - \sigma^r \sin^2 \beta \quad (62)$$

$$\tau_{xy}^s = \tau_{xy} - \sigma^r \cos \beta \sin \beta \quad (63)$$

onde

$$(\sigma^s)^T = [\sigma_x^s \quad \sigma_y^s \quad \tau_{xy}^s] \quad (64)$$

é a parcela da componente de tensão atuante no contínuo equivalente devida ao solo;

$$\sigma^T = [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy}] \quad (65)$$

é o vetor das componentes de tensão atuante no contínuo equivalente;

$$\sigma^r = \frac{d}{h} \sigma_t^r \quad (66)$$

é a parcela da componente de tensão atuante no contínuo equivalente devida ao reforço e β é o

ângulo formado pelo plano do reforço com o eixo ox (Figura 4).

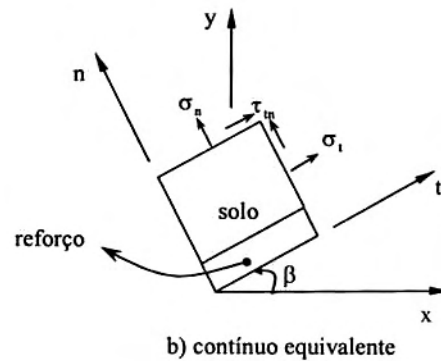
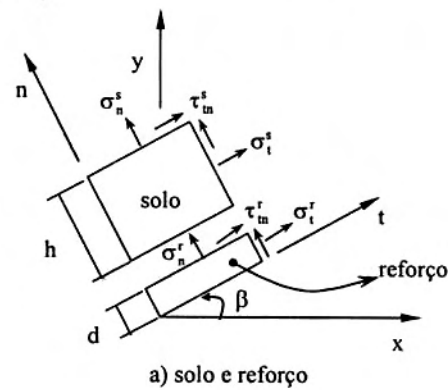


Fig. 4 - Esquema de tensões no contínuo equivalente.

4.1.1 – Condição de equilíbrio

Por se tratar de uma abordagem do tipo contínuo, a equação de equilíbrio do problema permanece na forma da eq. (13).

4.1.2 - Condição de escoamento do solo

O critério de escoamento de Mohr-Coulomb, para condição plana de deformação, relação (17), pode ser colocado na forma da relação abaixo:

$$F_s = (\sigma_x^s - \sigma_y^s)^2 + (2\tau_{xy}^s)^2 - [2c \cos \phi - (\sigma_x^s + \sigma_y^s) \sin \phi]^2 \leq 0 \quad (67)$$

A substituição das componentes de tensão no solo, eq. (61), (62) e (63), no critério acima definido, permite reescrevê-lo em função das tensões no contínuo equivalente (σ_x , σ_y e τ_{xy}) e da tensão no reforço (σ^r), na forma:

$$F_s = (\sigma_x - \sigma_y - \sigma^r \cos 2\beta)^2 + (2\tau_{xy} - \sigma^r \sin 2\beta)^2 - [2c \cos \phi - (\sigma_x + \sigma_y - \sigma^r \sin \phi)]^2 \leq 0 \quad (68)$$

O critério de escoamento em consideração pode ser colocado sob a forma linearizada (Yu e Sloan, 1997):

$$A_k \sigma_x + B_k \sigma_y + C_k \tau_{xy} + D_k \sigma^r \leq 2c \cos \phi \cos(\pi/p) \quad (69)$$

$k = 1, 2, \dots, p$

ou sob a forma matricial:

$$\mathbf{Q}_i^T \boldsymbol{\sigma}_i + (\mathbf{Q}_i^*)^T \boldsymbol{\sigma}_i^r \leq \mathbf{R}_i^s \quad (70)$$

onde $\mathbf{Q}_i^T$ é a matriz das restrições de escoamento devido ao solo, eq. (70); $\boldsymbol{\sigma}_i$ é o vetor das componentes de tensão num ponto nodal de tensão; $(\mathbf{Q}_i^*)^T$ é a matriz das restrições de escoamento devido ao reforço; $\boldsymbol{\sigma}_i^r$ é a tensão atuante no reforço num ponto nodal de tensão i e $\mathbf{R}_i^s$ é o vetor dos termos independentes das restrições de escoamento.

A imposição do critério de escoamento, relação (70), em todos os pontos nodais de tensão (nt), permite escrever a seguinte matriz global das restrições de escoamento do solo na forma:

$$(\mathbf{Q}^s)^T = [\mathbf{Q}^T \mid (\mathbf{Q}^*)^T] \quad (71)$$

4.1.3 - Condição de escoamento da interface solo-reforço

Condições de escoamento da interface solo-reforço podem ser impostas na análise pela técnica do contínuo equivalente. O critério de escoamento de Coulomb define a região viável, Figura 5, conforme as seguintes relações:

$$\tau \leq c_{in} - \sigma_N \tan \phi_{in} \quad (72)$$

$$-\tau \leq c_{in} - \sigma_N \tan \phi_{in} \quad (73)$$

onde c_{in} é a coesão da interface solo-reforço e ϕ_{in} é o ângulo de atrito da interface solo-reforço.

A relação (37) pode ser usada para descrever as restrições de escoamento da interface solo-reforço num ponto nodal de tensão i sob a forma:

$$(\mathbf{Q}_i^j)^T \boldsymbol{\sigma}_i \leq \mathbf{R}_i^j \quad (74)$$

onde $(\mathbf{Q}_i^j)^T$ é a matriz das restrições de escoamento da interface solo-reforço e $(\mathbf{R}_i^j)$ é o vetor dos termos independentes das restrições de escoamento da interface solo reforço.

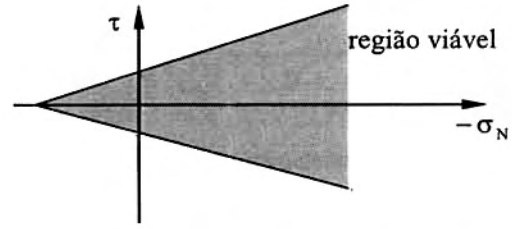


Fig. 5 – Região viável para o critério de escoamento de Coulomb.

A imposição do critério de escoamento em todos pontos nodais de tensão (nt) conduz à seguinte matriz global das restrições de escoamento da interface solo-reforço:

$$(\mathbf{Q}^j)^T = \begin{bmatrix} (\mathbf{Q}_i^j)^T & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & (\mathbf{Q}_{nt}^j)^T \end{bmatrix} \quad (75)$$

4.1.4 - Condição de escoamento do reforço

Condição de escoamento do reforço num ponto pode ser definida conforme a seguinte expressão:

$$0 \leq \sigma^r \leq \sigma_{esc} \quad (76)$$

onde σ_{esc} é o produto da percentagem de reforço (d/h) pela tensão de escoamento do reforço (σ_{yield}), ou seja,

$$\sigma_{esc} = \frac{d}{h} \sigma_{yield} \quad (77)$$

As restrições de escoamento do reforço num ponto nodal i , colocadas sob a forma matricial, podem ser expressas pela seguinte relação:

$$(\mathbf{Q}_i^r)^T \boldsymbol{\sigma}_i^r \leq \mathbf{R}_i^r \quad (78)$$

onde $(\mathbf{Q}_i^r)^T$ é a matriz das restrições de escoamento do reforço; $\boldsymbol{\sigma}_i^r$ é a tensão atuante no reforço e $\mathbf{R}_i^r$ é o vetor dos termos independentes das restrições de escoamento do reforço.

A imposição do critério de escoamento em todos os pontos nodais de tensão (nt) conduz à seguinte matriz global das restrições de escoamento do reforço:

$$(Q^r)^T = \begin{bmatrix} (Q_1^r)^T & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & (Q_{nt}^r)^T \end{bmatrix} \quad (79)$$

Detalhes da montagem das matrizes anteriores podem ser vistos em Lemos (2002).

4.1.5 - Formação do problema de PL na técnica do contínuo equivalente

A montagem da equação de equilíbrio para todos os elementos da malha e a imposição do critério de escoamento do solo, da interface solo-reforço e do reforço em todos pontos nodais de tensão conduzem a um problema de PL, que pode ser colocado sob a forma compacta abaixo:

Max λ
 Sujeito a

$$C^T X = f_p + \lambda f_0 \quad (\text{restrições de equilíbrio})$$

$$Q^T \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \leq R \quad (\text{restrições de escoamento})$$

onde X é o vetor das componentes de tensão atuante no contínuo equivalente em todos os pontos nodais de tensão; Q^T é a matriz resultante de todas as matrizes globais das restrições de escoamento do solo, da interface solo-reforço e do reforço; Y é o vetor global das componentes de tensão atuantes no reforço em todos os pontos nodais de tensão (nt) e R é o vetor global de todos termos independentes de todas as restrições de escoamento (solo, interface e reforço).

4.2 - Formulação para solos reforçados pela técnica discreta

O problema de estabilidade em solo reforçado, tratado pela técnica discreta, pode ser resolvido por duas formulações. Na primeira formulação, considerada simplificada, as condições de compatibilidade são satisfeitas em todo o domínio do problema, isto é, movimentos relativos na interface solo-reforço não são modelados. Na segunda formulação, a interação solo-reforço é modelada com o emprego de elementos de interface. Neste caso, o solo, as interfaces solo-reforço e o reforço são discretizados em elementos finitos. O elemento de interface formulados na seção 3.2 pode ser usado para modelagem da interação solo-reforço. Na seção seguinte será apresentada a formulação do elemento de reforço sem espessura por conveniência

matemática. Nesta formulação movimentos relativos entre solo e reforço podem ser considerados, porém ela dá origem a um problema de maior tamanho pelo aumento do número de pontos nodais e de elementos de interface (ver Figura 6).

A Figura 6 ilustra um esquema de solo reforçado e detalhes da discretização do meio sem e com interface (sem espessura).

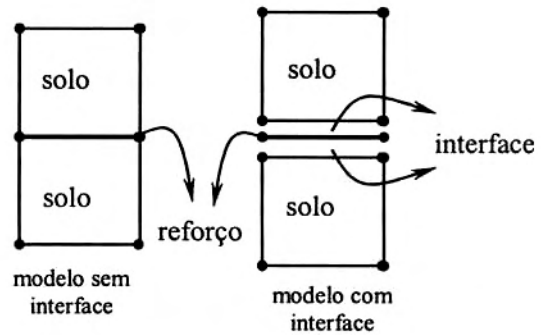
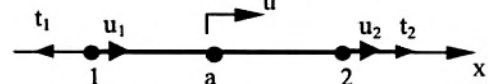


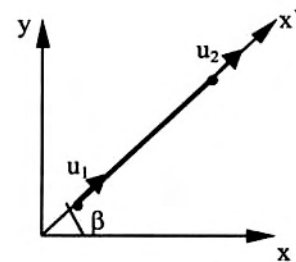
Fig. 6- Modelos de interação solo-reforço.

4.2.1 - Equilíbrio do elemento de reforço

A Figura 7 ilustra um do elemento de reforço (elemento de barra de 2 nós) de comprimento L , seção transversal A_r , por unidade de largura, e β é o ângulo formado entre o plano do reforço e o eixo ox



a) Sistema local



b) Sistema global

Fig. 7- Representação esquemática do elemento de reforço.

Interpolando-se a velocidade e tensão no sistema local de coordenadas do elemento, têm-se as equações abaixo:

$$u(x) = H_u \hat{u} \quad (80)$$

$$t(x) = H_{\sigma} \hat{t} \quad (81)$$

em que

$$H_u = H_{\sigma} = [h_1 \quad h_2] \quad (82)$$

$$\hat{u}^T = [u_1 \quad u_2] \quad (83)$$

$$\hat{t}^T = [t_1 \quad t_2] \quad (84)$$

$$h_1 = 1 - \frac{x}{L_r} \text{ e } h_2 = \frac{x}{L_r} \quad (85)$$

onde $u(x)$ é a velocidade num ponto (ponto a) do elemento de reforço; $t(x)$ é a tensão de tração no elemento de reforço; H_u e H_{σ} são matrizes das funções de interpolação; $\hat{u}$ é o vetor das velocidades nodais; $\hat{t}$ é o vetor das tensões de tração nos pontos nodais.

O vetor das forças internas (f_{in}) do elemento de reforço é definido pela expressão abaixo:

$$f_{in} = \int B^T t(x) A_r dx \quad (86)$$

onde

$$B = \frac{dH_u}{dx} = \frac{1}{L_r} [-1 \quad 1] \quad (87)$$

é a matriz que relaciona velocidade e taxa de deformação.

Substituindo-se a tensão de tração, eq. (81), na eq. (86), tem-se a expressão abaixo:

$$f_{in} = C_R^T \hat{T} \quad (88)$$

onde

$$C_R^T = \int_0^{L_r} B^T H_{\sigma} dx = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (89)$$

é a matriz de equilíbrio do elemento de reforço no sistema local de coordenadas;

$$\hat{T} = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} = A_r \hat{t} \quad (90)$$

é o vetor das forças internas atuantes nos pontos nodais do elemento de reforço.

Expressando-se o vetor f_{in} no sistema global de coordenadas, tem-se a seguinte relação:

$$f_{in}^g = R^T C_R^T \hat{T} = C_g^T \hat{T} \quad (91)$$

onde

$$C_g^T = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\cos\beta & -\cos\beta \\ -\sin\beta & -\sin\beta \\ \cos\beta & \cos\beta \\ \sin\beta & \sin\beta \end{bmatrix} \quad (92)$$

é a matriz de equilíbrio do reforço no sistema global de coordenadas;

$$R^T = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 \\ \sin\beta & 0 \\ 0 & \cos\beta \\ 0 & \sin\beta \end{bmatrix} \quad (93)$$

é a matriz de rotação de vetores (ver, p. ex., Cook *et al.*, 1989).

4.2.2 Condição de escoamento do reforço

As restrições de escoamento do reforço são dadas por:

$$0 \leq T \leq T_e \quad (94)$$

onde, T é a força interna atuante num ponto nodal do reforço e T_e é a força de escoamento do reforço à tração, definida por

$$T_e = A_r \sigma_{yield} \quad (95)$$

As restrições de escoamento do reforço, em um ponto i do elemento, colocadas sob a forma matricial, podem ser expressas pela seguinte relação:

$$(Q_i^r)^T T_i \leq R_i^r \quad (96)$$

onde

$$(Q_i^r)^T = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (97)$$

é matriz de escoamento do reforço e $(\mathbf{R}_i^T)^T = [0 \quad \mathbf{T}_e]$ é o vetor dos termos independentes das restrições de escoamento do reforço.

4.2.3 – Formação do problema de PL pela técnica discreta

A montagem da matriz de equilíbrio do solo, do reforço e da interface para todos os elementos de solo, reforço e interface, conduz à equação de equilíbrio global, na forma abaixo:

$$\mathbf{C}^T \mathbf{X} = \lambda \mathbf{f}_0 + \mathbf{f}_p \quad (98)$$

onde

$$\mathbf{C}^T = [(\mathbf{C}_s)^T \mid (\mathbf{C}_j)^T \mid (\mathbf{C}_r)^T] \quad (99)$$

é a matriz global de equilíbrio resultante da contribuição dos elementos de solo, interface e reforço;

$$\mathbf{X}^T = [\sigma_1^T \mid \sigma_2^T \mid \dots \mid \sigma_{nt}^T \mid (\sigma_1^j)^T \mid \dots \mid (\sigma_{nj}^j)^T \mid \mathbf{T}_1 \mid \dots \mid \mathbf{T}_{nr}]$$

é o vetor das componentes de tensão em todos os elementos de solo, interface e reforço; nt é o número de pontos nodais de tensão; nj é o número de elementos de interface; nr é o número de pontos nodais onde existe reforço.

Da imposição da condição de escoamento do solo, do reforço e da interface, obtêm-se as restrições de escoamento global, sob a forma abaixo:

$$\mathbf{Q}^T \mathbf{X} \leq \mathbf{R} \quad (100)$$

onde

$$\mathbf{Q}^T = \begin{bmatrix} (\mathbf{Q}_{nr}^s)^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & (\mathbf{Q}_{nj}^j)^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & (\mathbf{Q}_{nr}^r)^T \end{bmatrix} \quad (101)$$

é a matriz de escoamento global das restrições de escoamento do solo, do reforço e da interface;

$$\mathbf{R}^T = [(\mathbf{R}_{nr}^s)^T \mid (\mathbf{R}_{nj}^j)^T \mid (\mathbf{R}_{nr}^r)^T] \quad (102)$$

é vetor global dos termos independentes das restrições de escoamento dos materiais.

A formulação conduz ao problema de PL, que pode ser colocado sob a forma abaixo:

Max λ
sujeito a

$$\mathbf{C}^T \mathbf{X} = \mathbf{f}_p + \lambda \mathbf{f}_0 \quad (\text{restrições de equilíbrio})$$

$$\mathbf{Q}^T \mathbf{X} \leq \mathbf{R} \quad (\text{restrições de escoamento})$$

5 – IMPLEMENTAÇÕES REALIZADAS

5.1 - Metodologia linear

5.1.1 - Tipos de elementos implementados

Para os problemas de estabilidade em meios contínuos, fraturados ou reforçados, estudados neste trabalho, foram implementados os elementos bidimensionais quadriláteros de 4 nós para discretizar o solo, elementos unidimensionais de 2 nós para discretizar o reforço e elementos de interface de 4 nós sem espessura para a discretização das interfaces.

a) Modelagem de contínuo ou contínuo equivalente

Para a modelagem de problemas de estabilidade em meios contínuos, fraturados ou meios reforçados pela técnica do contínuo equivalente, foram implementados dois tipos de elementos bidimensionais:

- elemento quadrilateral de 4 nós, bilinear em velocidade e tensão, elemento Q_4 ;
- elemento quadrilateral de 4 nós, bilinear em velocidade e de tensão constante, elemento Q_4^C .

b) Modelagem discreta de meios fraturados

Neste caso são empregados elementos Q_4^C para modelar o material intacto e elementos de interface sem espessura de 4 nós, linear em velocidade e de tensão constante, para modelar as juntas.

c) Modelagem discreta de solos reforçados sem emprego de elementos de interface

Para este caso, foram feitas duas implementações com os seguintes elementos:

- elemento Q_4 para modelar o solo e o elemento unidimensional de 2 nós, linear em velocidade e tensão, para modelar o reforço;
- elemento Q_4^C para modelar o solo e o elemento unidimensional de 2 nós, linear em velocidade e de tensão constante, para modelar o reforço.

d) Modelagem discreta de solos reforçados com emprego de elementos de interface

A implementação neste caso foi feita com os seguintes elementos: elemento Q_4^C para modelar o solo, o elemento unidimensional de 2 nós, linear em velocidade e tensão, para modelar o reforço e o elemento de interface sem espessura de 4 nós, linear em velocidade e de tensão constante, para modelar o efeito da interface solo-reforço.

5.1.2 - Critérios de escoamento implementados

Para o solo envolvido no problema, adotam-se os critérios de escoamento de Mohr-Coulomb ou Tresca, sendo o critério de Tresca tratado como um caso particular do anterior para solo puramente coesivo ($\phi = 0$). A aproximação do critério de escoamento do solo pela forma linearizada foi utilizada no caso da formulação linear do problema de estabilidade.

Para a modelagem da interface solo-reforço, adota-se o critério de escoamento de Coulomb.

A condição de escoamento do reforço é imposta pela limitação da tensão atuante no reforço ao limite de escoamento do material. Por outro é desprezada a resistência do reforço à compressão

5.1.3 - Procedimentos para solução numérica

A etapa do pré-processamento é executada pelo programa MTOOL desenvolvido pelo grupo de Computação Gráfica da PUC/Rio. Nesta etapa é gerada a malha de elementos finitos planos que é armazenada num arquivo denominado "Neutral file", de extensão ".nf".

O arquivo gerado na etapa anterior é usado para a entrada de dados do programa computacional ANALIM (Araújo, 1997; Lemos, 2002), que gera o modelo de PL. O programa ANALIM gera a função objetivo a ser otimizada, as restrições de fluxo dos materiais e as restrições de equilíbrio do problema. No arquivo gerado pelo programa ANALIM, de extensão ".lin", armazenam-se, na notação usual da matemática, as restrições acima mencionadas.

Na implementação deste trabalho, arquivo gerado na etapa anterior é usado para a entrada de dados do programa LINDO (Schrage, 1991), que resolve o modelo de PL gerado na etapa anterior. No arquivo de saída do programa LINDO, de extensão ".prm", armazenam-se o fator de colapso e os valores das tensões, incógnitas do problema.

5.2 - Metodologia não linear

5.2.1 - Tipo de elemento implementado

A modelagem da rocha (meio contínuo) é feita através do elemento quadrilateral bilinear em velocidades e tensão constante, elemento Q_4^C .

5.2.2 - Critério de escoamento empregado

A implementação deste trabalho emprega o critério de Hoek-Brown (1980) para descrever a condição de escoamento do maciço rochoso.

5.2.3 - Procedimento para solução numérica

O pré-processamento é também feito pelo programa MTOOL, que gera um arquivo de extensão ".nf" contendo as informações da malha de elementos finitos.

Este arquivo é usado para entrada do programa computacional LIMAG (Limit Analysis for Geotechnics) desenvolvido por Durand (2000).

Durand implementou o programa LIMAG em linguagem Fortran baseado na formulação mostrada na seção 2.3. Este programa incorpora os algoritmos de otimização não linear tais como LANCELOT, Minos, Lingo e Han-Powell.

Em particular, nos exemplos referentes ao presente trabalho foi utilizado o programa de otimização não linear Minos (Murtagh e Saunders, 1987).

6 - PROBLEMAS ESTUDADOS

6.1 - Problemas estudados pela PNL

6.1.1 - Capacidade de carga de fundação em maciço rochoso

Serrano e Olalla (1994) apresentam uma solução analítica do problema de capacidade de carga em fundações superficiais sobre maciços rochosos. O trabalho destes autores está baseado no método das características considerando o meio contínuo com critério de ruptura de Hoek e Brown sendo desconsiderado o peso do material. Neste item apresenta-se uma comparação dos resultados obtidos por Serrano e Olalla (1994) com resultados dos mesmos problemas resolvidos através da análise limite. Para isto foram simuladas numericamente quatro condições de fundações superficiais através do programa LIMAG. Nestes casos, procurou-se variar a inclinação da carga e a inclinação do terreno adjacente à fundação. Foi resolvido também um caso de fundação apoiada a 2 m de profundidade ($D=2m$) Para todos os casos simulados, o meio contínuo foi discretizado com uma malha de elementos finitos de quatro nós utilizando funções de interpolação constante para H_x e bi-linear para H_y , tal como explicado no item 2.3. O tipo de fundação foi considerado como flexível.

A seguir são apresentados os resultados numéricos e analíticos do problema de capacidade de carga obtidos num maciço com as seguintes propriedades: $\gamma = 0,026 \text{ MN/m}^3$, $\sigma_c = 20,0 \text{ MPa}$, $m = 0,621$ e $s = 0,0044$ (Serrano e Olalla, 1994).

A Figura 8 apresenta as curvas da variação da capacidade de carga (numérica e analítica) numa fundação, quando a carga é inclinada de 5° , 10° , 20° e 30° em relação ao eixo vertical. Como era de se esperar a curva analítica se apresenta abaixo da curva numérica, isto devido ao fato da solução analítica não considerar o peso próprio do maciço rochoso e enquanto o LIMAG considera este efeito. Observa-se que até dez graus de inclinação da carga as soluções numérica e analítica são similares, no entanto, para vinte graus de inclinação ha uma variação de 20% e para trinta graus de inclinação existe uma variação de 50% da carga numérica em relação à carga analítica. Na Figura 9 para ilustração são mostradas a distribuição das velocidades nodais e a distribuição do campo da tensão principal maior para a carga inclinada de 20° .

A Figura 10 mostra o caso de uma fundação na crista de um talude. Neste caso as curvas (numérica e analítica) de capacidade de carga mostram variação em função da inclinação do terreno adjacente (talude). A carga da fundação é considerada centrada. Como já foi observado no caso anterior, quando a carga é centrada a solução numérica e analítica são similares com uma variação em torno de 4%.

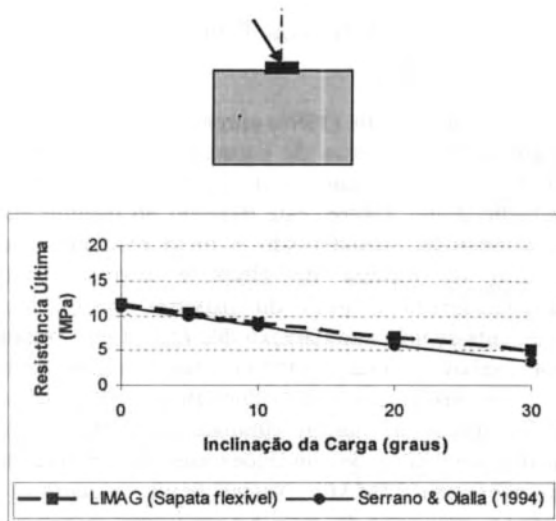
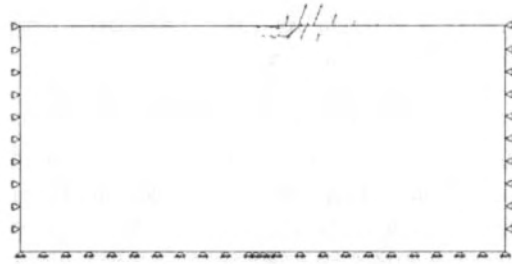
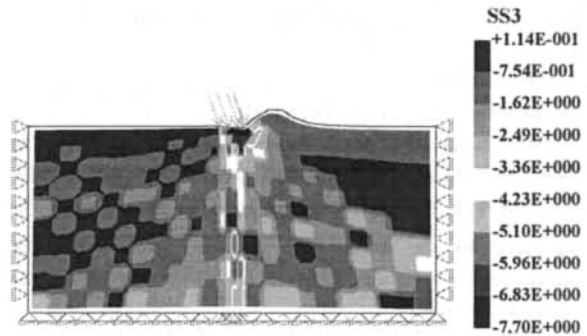


Fig. 8 - Variação da capacidade de carga de fundação superficial ($D = 0$) em função do ângulo de inclinação da carga .



(a) Distribuição do campo de velocidades (mecanismo de ruptura)



(b) Distribuição das tensões principais maiores (tração positiva)

Fig. 9 - Fundação superficial e carga inclinada de 20° em relação ao eixo vertical.

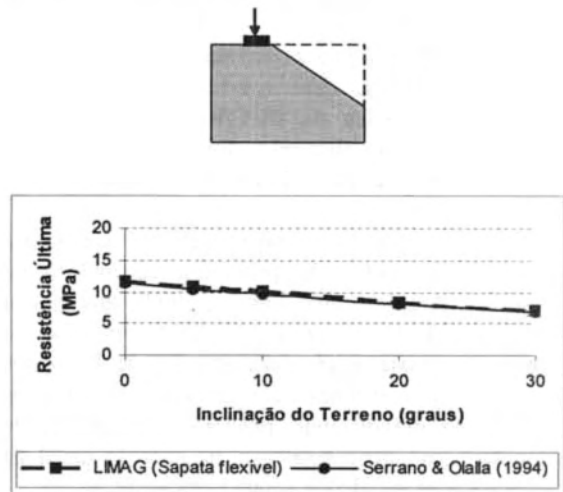


Fig. 10 - Variação da capacidade de carga de fundação superficial em função da inclinação do terreno adjacente.

Os valores de capacidade de carga quando o talude adjacente à fundação tem uma inclinação de 30° estão mostrados na Figura 11. As curvas (numérica e analítica) mostram a capacidade de carga de uma fundação centrada e com inclinações da carga solicitante de 5° , 10° e 20° . Neste caso, os resultados analítico e numérico são bastante próximos para a fundação centrada e com inclinação

de 5 graus. Já para as inclinações de dez e vinte graus existe uma variação da solução numérica em relação à analítica de 9% e 24% a mais, respectivamente.

No último caso analisado, a fundação é colocada a uma profundidade de 2 m. Neste caso, além da curva analítica, também são mostradas duas curvas adicionais que correspondem à condição de sapata flexível e sapata rígida como indicado nas Figuras 12 e 13. Na Figura 12 pode ser observada a grande discrepância da solução numérica em relação à analítica. No caso da sapata flexível esta variação vai de 29% a 140% e no caso de sapata rígida vai de 34% até 290%, neste último caso inclusive a capacidade de carga se mantém constante até quando a inclinação da carga solicitante é de dez graus. Um motivo que poderia explicar a discrepância encontrada pode ser atribuída ao fato da solução analítica não considerar diretamente o peso próprio do material. Isto é feito de forma indireta, isto é, o peso próprio é considerado através da atribuição de uma sobrecarga corresponde ao peso do material acima da cota de apoio como pode ser observado na Figura 13-a. Na figura nota-se que o mecanismo de ruptura envolve tanto o maciço localizado acima como abaixo da cota de apoio. Portanto, considerar somente como sobre-carga o material acima da cota de apoio na solução analítica (carga uniformemente distribuída igual a γh) não é suficiente para representar este comportamento. A Figura 13-b mostra, ilustrativamente, a distribuição de tensão principal maior quando a carga solicitante da sapata tem uma inclinação de 20°.

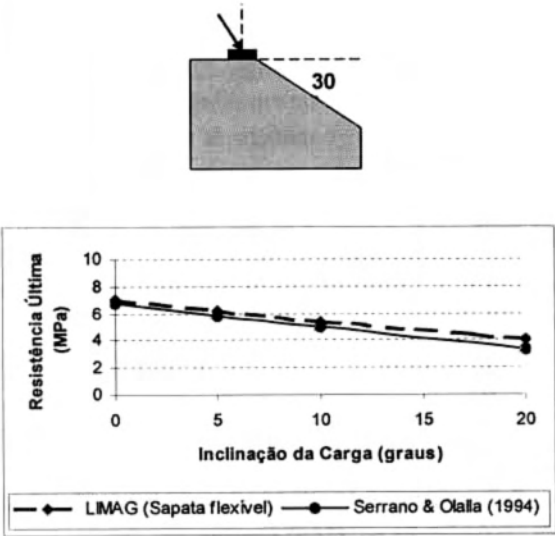


Fig. 11 - Variação da capacidade de carga de fundação superficial em função do ângulo de inclinação da carga para inclinação do terreno de 30°.

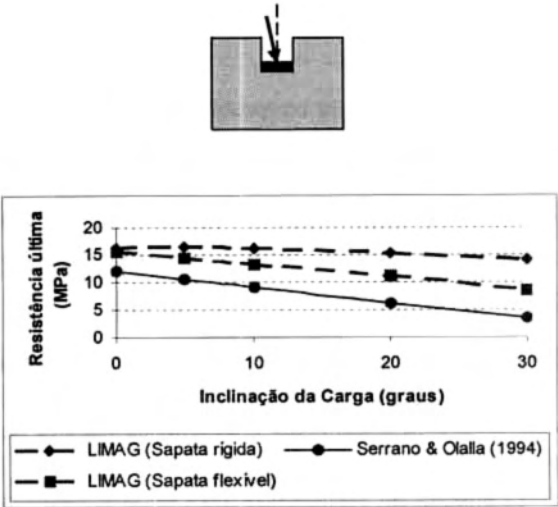


Fig. 12 - Variação da capacidade de carga de fundação embutida ($D = 2$ m) em função do ângulo de inclinação da carga

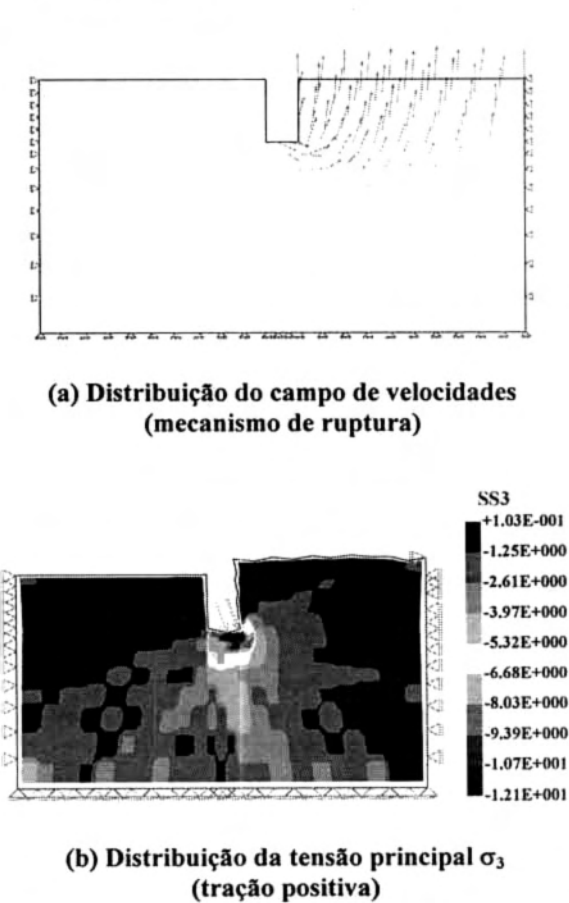


Fig. 13 - Fundação flexível embutida ($D = 2$ m) para carga inclinada de 20° em relação ao eixo vertical

6.2 - Problemas estudados pela PL

6.2.1 – Estabilidade de talude vertical em meio homogêneo

A Figura 14 ilustra um problema de estabilidade de um talude vertical de altura $H = 6$ m constituído de um solo coesivo ($c = 6$ kPa e ϕ variável) e peso específico inicial unitário ($\gamma_0 = 1$ kN/m³). O peso específico do solo no colapso (ruptura) pode ser calculado pela expressão:

$$\gamma = \lambda \gamma_0 \quad (103)$$

onde γ é o peso específico do solo na ruptura do talude; λ é o fator de colapso.

O número de estabilidade (N_s) pode ser escrito sob a forma (Chen, 1975):

$$N_s = \frac{H_c \gamma}{c} \quad (104)$$

A substituição dos valores da altura e dos parâmetros do solo, na equação acima, fornece a expressão:

$$N_s = \lambda \quad (105)$$

Portanto, o número de estabilidade se iguala ao fator de colapso.

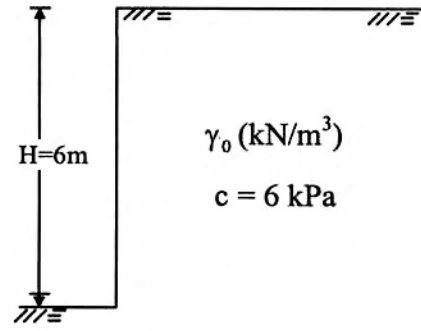
A malha de elementos finitos empregada na análise numérica está representada na Figura 14-b.

A Tabela 1 apresenta a variação de N_s em função de ângulo de atrito do material, onde $N_s(Q_4)$ = solução numérica via elemento Q_4 ; $N_s(Q_4^c)$ = solução numérica via elemento Q_4^c .

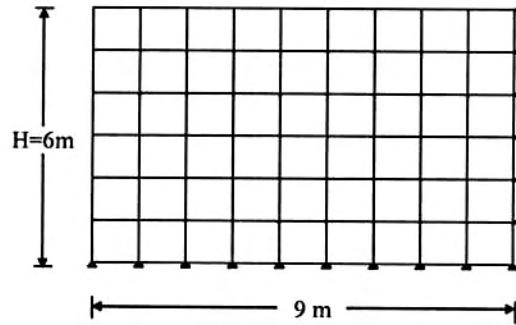
Tabela 1- Número de estabilidade em função de ϕ

ϕ (°)	$N_s(Q_4)$	$N_s(Q_4^c)$	N_s Chen
10	3,72	3,57	3,83
15	4,79	4,69	5,02
20	5,23	5,17	5,50
30	6,31	6,47	6,69
40	7,90	8,47	8,29

A tabela anterior mostra que as soluções numéricas aproximam adequadamente o problema em estudo.



a) Definição esquemática



b) Malha de elementos finitos

Fig. 14— Talude vertical em meio homogêneo.

6.2.2 - Estabilidade de talude vertical em meio reforçado

A Figura 15 ilustra um talude vertical de 6 metros de altura constituído por um material não coesivo e modelado pela técnica do contínuo equivalente, estudado por Sousa (2001) e Yu e Sloan (1997), via formulação de equilíbrio, que chegaram à seguinte relação para o número de estabilidade (λ):

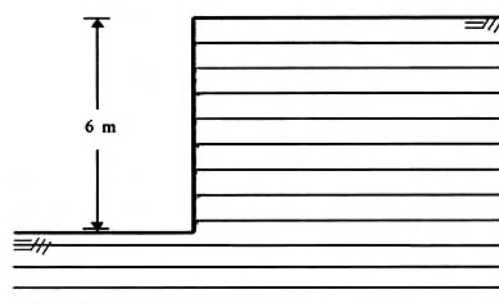
$$\lambda = \frac{\gamma H}{\sigma_0} \quad (106)$$

onde H é a altura do talude vertical; γ é o peso específico do solo.

$$\sigma_0 = \frac{d}{h} \sigma_{\text{yield}}$$

A substituição dos dados do problema, $H = 6$ m e $\sigma_0 = 6$ kPa, na eq. (106) fornece

$$\lambda = \gamma \quad (107)$$



a) Definição esquemática

Fig. 15 - Estabilidade de talude pela técnica do contínuo equivalente

Os resultados obtidos, utilizando-se a malha de elementos finitos indicada na Figura 14, para vários ângulos de atrito, são apresentados na tabela 2. Encontram-se, também, na tabela 2 os valores encontrados por Sousa (2001) e Sawicki (Yu e Sloan, 1997), pelas formulações do limite inferior e superior, respectivamente.

Tabela 2 - Números de estabilidade para um problema de talude reforçado

ϕ (°)	λ_{ss}	λ_{Q_4}	$\lambda_{Q_4^f}$	λ_{sw}
10	1,9	2,03	2,05	2,9
15	2,4	2,50	2,64	3,4
20	3,0	3,27	3,33	4,2
30	4,8	5,10	5,30	6,0
40	7,2	7,99	8,65	9,1

Legenda:

λ_{ss} - Número de estabilidade encontrado por Sousa (2001);

λ_{sw} - Número de estabilidade encontrado por Sawicki (Yu e Sloan, 1997);

λ_{Q_4} - Número de estabilidade encontrado via elemento Q_4 ;

$\lambda_{Q_4^f}$ - Número de estabilidade encontrado via elemento Q_4^f .

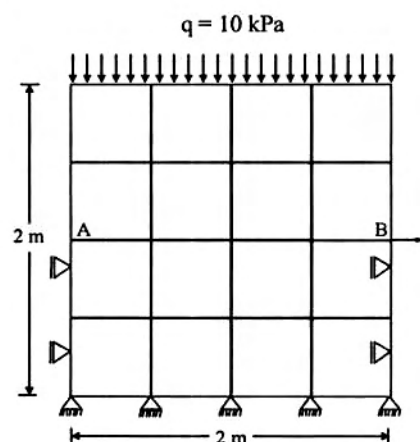
Um exame da Tabela 2 mostra que as soluções numéricas apresentam resultados concordantes com os obtidos pelas formulações dos limites inferior e superior.

6.2.3 - Arrastamento de bloco de rocha

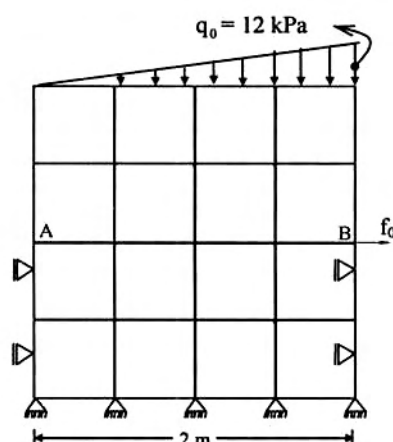
O problema trata da determinação da força para iniciar o deslizamento do bloco superior indicado na figura 16, onde o reforço, representado pela linha A-

B, é puxado por uma força inicial unitária ($f_0 = 1$ kN) aplicada em B, ampliada por λ até o colapso.

As condições de contorno são tais que o bloco inferior permanece fixo. As propriedades do material adotadas ($c = 10$ kPa, $\gamma = 0$ e $\phi = 30^\circ$) obrigam que o escoamento ocorra somente na interface bloco-reforço.



(a) Carregamento uniforme



(b) Carregamento triangular

Fig. 16 - Arrastamento de bloco de rocha

A solução numérica da força de puxamento do reforço pode ser definida pela seguinte expressão:

$$F = \lambda f_0 \quad (108)$$

onde F = força máxima de puxamento do reforço; λ = fator de colapso.

As soluções analíticas das forças de puxamento do reforço, para os carregamentos apresentados, podem ser definidas conforme as seguintes expressões (Sousa, 2001):

$$F_p = L_r (c_{in} + q \operatorname{tg} \phi_{in}) \quad (109)$$

para o carregamento uniforme,

$$F_p = L_r (c_{in} + \frac{q_0}{2} \operatorname{tg} \phi_{in}) \quad (110)$$

para o carregamento triangular; onde c_{in} é a coesão da interface; ϕ_{in} é o ângulo de atrito da interface; L_r é o comprimento do reforço (2 m).

A Tabela 3 apresenta o resultado da análise paramétrica da força de puxamento do reforço em função das propriedades da interface. Na análise admite-se que o reforço não entre em escoamento (resistência muito elevada).

Tabela 3 – Força de puxamento no reforço (kN)

c_{in} (kPa)	ϕ_{in} (°)	Carga uniforme		Carga triangular	
		F	F_p	F	F_p
0	0	0,00	0,00	0,00	0,00
	30	11,55	11,55	6,93	6,93
5	0	10,00	10,00	10,00	10,00
	30	21,55	21,55	16,93	16,93
10	0	20,00	20,00	20,00	20,00
	30	31,55	31,55	26,93	26,93

A tabela acima mostra a exatidão da solução numérica para o caso estudado.

6.2.4 Capacidade de carga de fundação em meio fraturado (multilaminado)

A Figura 17 esquematiza o problema da capacidade de carga de uma sapata rasa e flexível, em meio multilaminado, constituído de um solo sem peso e ângulo de atrito variável ($c = 1$ kPa e $\gamma = 0$). A carga inicial unitária ($q_0 = 1$ kPa) será ampliada pelo fator λ , conforme a expressão abaixo:

$$q_u = \lambda q_0 \quad (111)$$

onde q_u = solução numérica da capacidade de carga da fundação.

A capacidade de carga de uma sapata corrida superficial e solo sem peso ($q_{ult.}$) é calculada pela seguinte equação (Terzaghi, 1943):

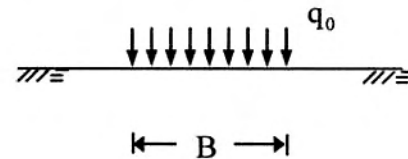
$$q_{ult.} = c N_c \quad (112)$$

onde c é a coesão do solo; N_c é o fator de capacidade de carga de Terzaghi que depende de ϕ .

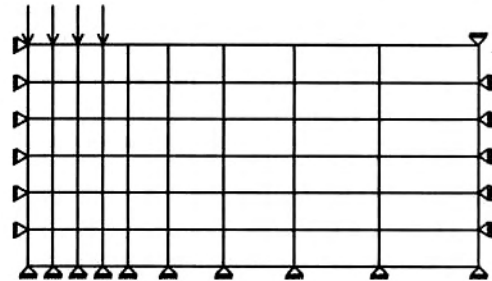
Para o caso de sapata rasa em solo com $c = 1$ kPa, a capacidade de carga ($q_{ult.}$) é dada pela expressão abaixo:

$$q_{ult.} = N_c \quad (113)$$

Como $q_0 = 1$ kPa, a solução numérica do problema (λ) iguala ao fator N_c .



a) Esquema da sapata corrida



b) Malha de elementos finitos

Fig. 17– Capacidade de carga de uma sapata.

A malha de elementos finitos, com detalhes das condições de contorno, empregada na análise, está ilustrada na Figura 17-b.

A Figura 18 mostra um gráfico, comparando as soluções do problema encontradas pelo ANALIM, Davis (1980), via método das características e Yu e Sloan (1994), via formulação de equilíbrio, onde foram empregadas as seguintes propriedades:

$$c_j/c = 0,1, \phi = \phi_j = 35^\circ,$$

onde c é a coesão do material intacto; c_j é a coesão da descontinuidade; ϕ é o ângulo de atrito do material intacto; ϕ_j é o ângulo de atrito da descontinuidade; w é o ângulo do plano da descontinuidade com a vertical.

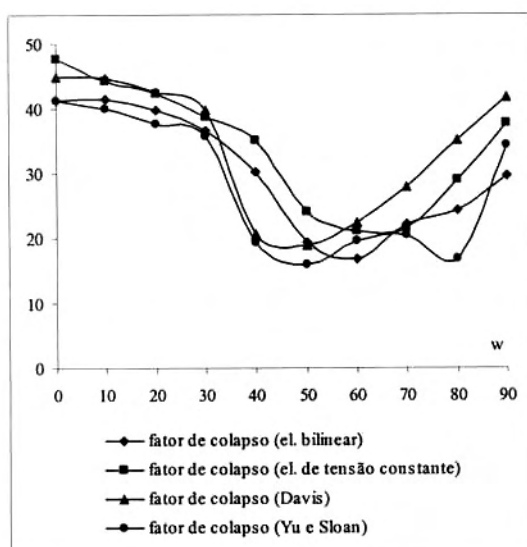


Fig. 18 - Comparação do fator N_c obtido por vários métodos.

Um exame do gráfico da Figura 18 permite concluir que a solução numérica obtida pelo ANALIM está, no geral, em boa concordância com as outras soluções e que para as inclinações mais críticas do planos de fraqueza existe uma grande redução da capacidade de carga da fundação.

7 - CONCLUSÕES

O presente trabalho apresenta formulações mistas de análise limite, via MEF, para solucionar problemas de estabilidade da geotecnia em meios geológicos (solos e rochas), na condição de deformação plana, pelas técnicas do contínuo equivalente ou discreta. As situações analisadas se referem a meios contínuos (solos e rochas), meios fraturados e meios reforçados.

As implementações realizadas são capazes de resolver problemas de estabilidade formulados via programação linear (PL) e programação não linear (PNL). Os exemplos estudados pelas implementações numéricas efetuadas apresentaram bons resultados, sugerindo que a metodologia exposta neste trabalho tem potencial de aplicação a problemas práticos de engenharia geotécnica.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Araújo, L. G. (1997) *Estudo numérico de problemas de estabilidade em materiais geotécnicos através da análise limite*. Tese de Doutorado, PUC/Rio.
 Bathe, K. J. (1982) *Finite element procedures in engineering analysis*. Prentice Hall.
 Borges, L. A. (1991) *Formulação e solução para análise limite com superfície de escoamento não linear*. Tese de Doutorado, PUC/Rio.

Casciaro, R. e Cascini, L. (1982) *A mixed formulation and mixed finite elements for limit analysis*. Int. J. num. Meth. Engng, v.18, p.211-243.
 Chen, W. F. e Liu, X. L. (1990) *Limit Analysis in Soil Mechanics*. Elsevier, 477 p.
 Chen, W. F. (1975) *Limit analysis and soil plasticity*. Elsevier Science Publishers, BV, Amsterdam, The Netherlands.
 Christiansen, E. (1981) *Computation of limit loads*. Int. J. Num. Meth. Engng, v.17, pp. 1547-1570.
 Cook, R. D.; Malkus, D. S.; e Plesha, M. E. (1989) *Concepts and applications of finite element analysis*. Wiley & Sons, Inc..
 Davis, E. H. (1980) *A Note on Some Plasticity Solutions Relevant to the Bearing Capacity of Brittle and Fissured Materials*. Proc. Int. Conf. on Structural Foundations on Rock, Vol. 3.
 Drucker, D. C., Greenberg, H. J. e Prager, W. (1952) *Extended Limit Design Theorems for Continuous Media*. Quarterly Applied Mathematic., Vol. 9.
 Durand, A. F. (2000) *Aplicação da Análise Limite a Problemas Geotécnicos Modelados como meios Contínuos Convencionais e Meios de Cosserat*. Tese de Doutorado, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.
 Faria, P. O. (1992) *Análise limite de problemas geotécnicos*. Dissertação de Mestrado, PUC/Rio.
 Finn, W. D. L. (1967) *Application of limit plasticity in soil mechanics*. J. of Soil Mechanics and Foundation Division. ASCE.
 Francescato, P. e Pastor, J. (1997) *Lower and upper numerical bounds to the off-axis strength of unidirectional fiber-reinforced composites by limit analysis methods*. Eur. J. Mech., A/Solids, v.16. n.2, p.213-234.
 Gerrard, G. M. e Pande, G. N. (1985) *Numerical Modeling of Reinforced Jointed Rock Masses*. Computers and Geomechanics, vol. 1.
 Hoek, E. e Brown, E. T. (1980) *Empirical Strength Criterion for Rock Masses*. J. Geoth. Eng. Division.
 Jaeger, J. C. e Cook, N. G. W. (1979) *Fundamentals of Rock Mechanics*, Ed. Chapman and Hall.
 Jiang, G. L. (1995) *Non-linear finite element formulation of kinematic limit analysis*. Int. J. for Num. And Anal. Meth. in Eng.
 Lemos, P. A. (2002) *Estudo numérico pela análise limite de problemas geotécnicos em solos reforçados*. Dissertação de mestrado UFOP.
 Livesley, R. L. (1978) *Limit analysis of structures formed from rigid blocks*. Int. J. Num. Met. Eng, Vol. 12.
 Lysmer, J. (1970) *Limit analysis of plane problems in soil mechanics*. J. of Soil Mech. and Foundations Div., ASCE, v. 96, SM4, pp. 1311-1334.

- Michalowski, R. L. (1998) *Limit analysis in stability calculations of reinforced soil structures*. Geotextiles and Geomembranes, v.16, p.311-331.
- Murtagh, B. A. e Saunders M. A. (1987) *MINOS 5.1 user's guide*. Technical Report SOL 83-20R, Stanford University: California.
- Porbaha, A.; Zhao, A.; Kobayashi, M. e Kishida, T. (2000) *Upper bound estimate of scaled reinforced soil retaining walls*. Geotextiles and Geomembranes, v.18, p.403-413.
- Schrage, L. (1991) *Lindo User's Manual*. The Scientific Press.
- Serrano, A. e Olalla, C. (1994) *Ultimate bearing capacity of rock*. Int. J. Mech. Sci. & Geomech. Elsevier Science Ltd.: Vol. 31, No 2, pp 93-106.
- Singh, D. N. e Basudhar, P. K. (1993a) *Determination of the optimal lower bound bearing capacity of reinforced soil-retaining walls by using finite elements and non-linear programming*. Geotextiles and Geomembranes, v.12, p.665-686.
- Singh, D. N. e Basudhar, P. K. (1993b) *Optimal lower bound bearing capacity of strip footings*. Soils and Foundations, v.33, n.4, p.18-25.
- Sloan, S. W. (1987a) *Lower bound limit analysis using finite elements and linear programming*. Report N° 020.01.87, The University Of New Castle, Australia.
- Sloan, S. W. (1987b) *Upper bound limit analysis using finite elements and linear programming*. Report N° 025.01.1987, The University Of New Castle, Austrália.
- Sousa, L. S. M. R. (2001) *Estudo numérico de problemas de estabilidade de solos reforçados via análise limite*. Dissertação de Mestrado, UFOP.
- Tamura, T.; Kobayashi, S. e Sumi, T. (1987) *Rigid-plastic finite element method for frictional materials*. Soils and Foundations, v.27, n.3, p.1-12.
- Terzaghi, K. (1943) *Theoretical soil mechanics*. Wiley.
- Yu, H. S. e Sloan, S. W. (1994) *Bearing capacity of jointed rock*. Computer Methods and Advances in Geomechanics, pp. 2403-2408.
- Yu, H. S. e Sloan, S. W. (1997) *Finite element limit analysis of reinforced soils*. Computers & Structures, v.63, n.3, pp. 567-577.
- Zienkiewicz, O. C. e Pande, G. N. (1977) *Time-Dependent Multilaminated Model of Rocks - A Numerical Study of Deformation and Failure of Rock Masses*. Int. J. for Num. and. Anal. Meth. in Geomech, vol. 1.