

ANÁLISE LIMITE RECORRENDO AO CRITÉRIO DE ROTURA DE MATSUOKA-NAKAI ESTENDIDO EM CONDIÇÕES DE DEFORMAÇÃO PLANA

Limit Analysis using the extended Matsuoka-Nakai yield criterion under plane strain conditions

Mário Vicente da Silva^a, Armando M. S. Nunes Antão^a

^aDepartamento de Engenharia Civil, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade NOVA de Lisboa

RESUMO – Este artigo apresenta a implementação do critério de rotura de Matsuoka-Nakai Estendido numa formulação de Análise Limite, em condições de deformação plana. A abordagem apresentada é baseada num modelo misto de elementos finitos de três campos e no algoritmo de otimização que se designa por Método de Direção Alternada de Multiplicadores. Para esse propósito, é estabelecida e explorada uma equivalência entre o critério clássico de Mohr-Coulomb e o critério de Matsuoka-Nakai estendido. São apresentadas três aplicações numéricas para testar e ilustrar as capacidades desta abordagem. Os resultados são confrontados com soluções de outros autores ou com dados experimentais.

ABSTRACT – This paper investigates the implementation of the Extended-Matsuoka-Nakai yield criterion on Limit Analysis formulation under plane strain conditions. The current approach is based on a three-field mixed finite element model and the Alternating Direction Method of Multipliers optimization algorithm. For this purpose, an equivalence between the classical Mohr-Coulomb criterion and the Extended-Matsuoka-Nakai is established and explored. Three numerical applications are presented to test and to illustrate the capabilities of this approach. The results are confronted with other authors' solutions or experimental data.

Palavras Chave – análise limite, critério de Matsuoka-Nakai estendido, estado plano de deformação, método de direcção alternada de multiplicadores (MDAM)

Keywords – limit analysis, Extended-Matsuoka-Nakai criterion, plane strain, alternating direction method of multipliers (ADMM)

1 – INTRODUÇÃO

O critério de Mohr-Coulomb (MC) tem sido amplamente utilizado para representar a resistência ao corte dos solos, particularmente quando submetidos a carregamentos em condições drenadas. Apesar da ampla utilização deste critério, o fato de não ter em conta a tensão principal intermédia leva, geralmente, a uma subestimação daquela resistência, quando se utiliza o ângulo de resistência

E-mail: mjvs@fct.unl.pt (M. Vicente da Silva), amna@fct.unl.pt (A. Antão)

ORCID: 0000-0003-0800-6979 (M. Vicente da Silva), 0000-0003-2835-2780 (A. Antão)

ao corte medido em compressão triaxial. Esse é, por exemplo, o caso particular de trajetórias de tensão em condições de deformação plana, facto reconhecido há muito tempo. Por exemplo, Meyerhof (1963) propôs um aumento de 10% no ângulo de resistência ao corte medido em compressão triaxial para ser utilizado em cálculos de capacidade de carga de fundações superficiais, em condições de deformação plana; Green e Bishop (1969) referem que o ângulo de resistência ao corte em deformação plana pode ser até 5° maior do que o medido em ensaios de compressão triaxial.

Desde pelo menos os anos 70 do século passado que vários autores propuseram novos critérios de rotura que levam em consideração a influência da tensão principal intermédia. Devido a este facto, estes critérios promovem uma melhor representação do comportamento de materiais quando submetidos a trajetórias de tensão diferentes das dos ensaios de compressão triaxial.

Entre esses critérios os mais conhecidos são provavelmente os propostos por Matsuoka e Nakai (1974) e Lade e Duncan (1975), que são capazes de aproximar o comportamento do solos solicitados em condições drenadas, quer sejam areias ou argilas (ver, por exemplo, Matsuoka e Nakai (1985) e Lade e Musante (1978)).

Em relação ao campo da Análise Limite, considerando que esses critérios fornecem uma boa aproximação dos resultados da resistência ao corte dos solos determinados experimentalmente, seria de se esperar a existência de trabalhos sobre a estabilidade de estruturas geotécnicas que os utilizem. No entanto, apesar do grande crescimento na produção de trabalhos em Análise Limite sobre os mais variados problemas geotécnicos registado nos últimos anos, não se conhece a utilização dos referidos critérios nesses trabalhos. Considerando as aplicações que utilizam o teorema da Região Superior, nomeadamente as abordagens baseadas em mecanismos de rotura definidos analiticamente, uma explicação plausível pode ser a falta de funções que permitam a determinação da dissipação plástica em materiais governados por esses critérios. No que diz respeito ao teorema da Região Inferior, a justificação pode estar relacionada com a forma da superfície do critério e as consequentes dificuldades em lidar com ela do ponto de vista numérico.

O objetivo do presente trabalho é apresentar a implementação numérica do critério Matsuoka-Nakai estendido (MNE) (Matsuoka et al., 1990) num software de Análise Limite por Elementos Finitos (ALEF) e mostrar a sua validade e aplicabilidade a problemas geotécnicos. O critério MNE resulta da generalização do critério original de Matsuoka-Nakai, de forma a permitir a existência de um valor não nulo de coesão efetiva.

2 – FORMULAÇÃO DE ELEMENTOS FINITOS PARA ANÁLISE LIMITE

Esta secção contém uma breve descrição de uma formulação de Análise Limite por Elementos Finitos desenvolvida pelos autores com base no Método de Direção Alternada de Multiplicadores (MDAM, ou Alternating Direction Method of Multipliers na nomenclatura Inglesa). Para obter uma descrição detalhada o leitor é remetido a trabalhos anteriores (Vicente da Silva e Antão, 2007, 2008; Antão et al., 2012; Vicente da Silva et al., 2020).

É um fato bem conhecido que os teoremas de Análise Limite podem ser exprimidos como problemas de otimização. Para tal, considere-se um sólido com comportamento perfeitamente plástico e plasticidade associada. Sobre esse corpo agem carregamentos que podem ser agrupados em distribuições de forças de massa, b_α , e de tensões nas fronteiras, t_α , que estão sujeitas ao efeito multiplicador de um escalar α . Sobre o corpo agem também uma distribuição de forças de massa, b_0 , e tensões nas fronteiras, b_0 , não afetadas por nenhum multiplicador de qualquer espécie.

Encontrar a solução do problema do teorema da Região Inferior (LB, relativa a Lower Bound na nomenclatura Inglesa) consiste em encontrar o valor máximo do multiplicador α , que não causará o colapso do corpo:

$$\text{maximizar } \alpha \tag{1a}$$

$$\text{sujeito a: } \mathbf{D}\boldsymbol{\sigma} + \alpha\mathbf{b}_\alpha + \mathbf{b}_0 = \mathbf{0} \quad \text{em } \Omega \tag{1b}$$

$$\mathbf{N}\boldsymbol{\sigma} = \alpha\mathbf{t}_\alpha + \mathbf{t}_0 \quad \text{em } \Gamma_\sigma \tag{1c}$$

$$f(\boldsymbol{\sigma}) \leq 0 \tag{1d}$$

Em complementaridade, o problema do teorema da Região Superior (UB, relativa a Upper Bound na nomenclatura Inglesa) da análise de limite procura determinar o menor multiplicador de carga que causará o colapso (ou iminência de colapso) do corpo em questão:

$$\text{minimizar } \alpha(\dot{\mathbf{u}}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) = \int_{\Omega} \mathcal{D}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}})d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{b}_0^T \dot{\mathbf{u}}d\Omega + \int_{\Gamma_\sigma} \mathbf{t}_0^T \dot{\mathbf{u}}d\Gamma_\sigma \tag{2a}$$

$$\text{sujeito a: } \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{D}^* \dot{\mathbf{u}} \quad \text{em } \Omega \tag{2b}$$

$$\mathbf{u} = 0 \quad \text{em } \Gamma_u \tag{2c}$$

$$\int_{\Omega} \mathbf{b}_\alpha^T \dot{\mathbf{u}}d\Omega + \int_{\Gamma_\sigma} \mathbf{t}_\alpha^T \dot{\mathbf{u}}d\Gamma_\sigma = 1 \tag{2d}$$

Nos problemas de otimização 1 e 2, $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$ e \mathbf{u} representam os campos de tensão, deformação plástica e deslocamento, respetivamente; \mathbf{D} é o operador de equilíbrio (adjunto do operador de compatibilidade, \mathbf{D}^*), enquanto que \mathbf{N} coleta as componentes do vetor normal unitário externo ao sólido, associado ao operador de equilíbrio. \mathcal{D} representa a taxa de dissipação de energia plástica por unidade de volume expressa como uma função da taxa de deformação plástica. Nas restrições (1b-1c) e (2b-2c), Ω representa o domínio do sólido, enquanto que Γ_σ e Γ_u denotam as suas fronteiras estática e cinemática, respetivamente.

Por sua vez, o MDAM é um esquema de otimização iterativo capaz de resolver problemas não lineares de programação matemática que podem ser formulados na seguinte forma padrão (Boyd et al., 2011):

$$\text{minimizar } g(\mathbf{x}) + h(\mathbf{z}) \tag{3a}$$

$$\text{sujeito a } \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{z} = \mathbf{0} \tag{3b}$$

onde \mathbf{x} e \mathbf{z} são as variáveis de decisão primárias e \mathbf{A} e \mathbf{B} são matrizes de transformação linear; $g(\mathbf{x})$ e $h(\mathbf{z})$ são funções de valor estendido, sendo que a primeira geralmente introduz o carácter de não linearidade no problema. O problema de otimização (3) pode ser transformado num problema de ponto de sela sem restrições equivalente, recorrendo ao método dos multiplicadores de Lagrange. Nesse caso, a função objetivo é dada por:

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{y}) = g(\mathbf{x}) + h(\mathbf{z}) + \mathbf{y}^T (\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{z}) + \frac{\rho}{2} \|\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{z}\|^2 \tag{4}$$

onde \mathbf{y} denota uma variável de decisão dual suplementar. Além disso, à função Lagrangiana foi acrescentado um termo quadrático de penalidade ponderado por ρ , um parâmetro escalar de penali-

dade. O esquema de solução é resumido no Algoritmo 1, e consiste num procedimento de minimização em duas etapas, onde as variáveis primárias são atualizadas alternadamente. Adicionalmente, esse processo é intercalado pela atualização da variável dual.

Algoritmo 1 Esquema de solução do MDAM

Escolher arbitrariamente \mathbf{z}^0 e \mathbf{y}^0	▷ inicialização
$k \leftarrow 0$	
repetir	
$\mathbf{x}^{k+1} \leftarrow \min_{\mathbf{x}} \mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{z}^k, \mathbf{y}^k)$	▷ passo de minimização em \mathbf{x}
$\mathbf{z}^{k+1} \leftarrow \min_{\mathbf{z}} \mathcal{L}(\mathbf{x}^{k+1}, \mathbf{z}, \mathbf{y}^k)$	▷ passo de minimização em \mathbf{z}
$\mathbf{r}_p^{k+1} \leftarrow \mathbf{A}\mathbf{x}^{k+1} + \mathbf{B}\mathbf{z}^{k+1}$	▷ estimativa residual de viabilidade primal
$\mathbf{y}^{k+1} \leftarrow \mathbf{y}^k + \rho \mathbf{r}_p^{k+1}$	▷ atualização da variável dual
$\mathbf{r}_d^{k+1} \leftarrow \rho \mathbf{A}^T \mathbf{B}(\mathbf{z}^{k+1} - \mathbf{z}^k)$	▷ estimativa residual de viabilidade dual
atualização do parâmetro de penalidade ρ	▷ passo opcional
$k \leftarrow k + 1$	
até $\ \mathbf{r}_p^k\ < \text{TOL}_{\text{primal}} \wedge \ \mathbf{r}_d^k\ < \text{TOL}_{\text{dual}}$	▷ critério de paragem

A ideia subjacente por trás da formulação de ALEF apresentada é a de deduzir uma versão discreta dos problemas de análise de limite (1) e (2), definidos sob a forma padrão do MDAM (3), e usar o Algoritmo 1 como ferramenta de otimização.

Em trabalhos anteriores, os autores mostraram que tal formulação pode ser obtida para o problema UB usando um modelo de elemento finito misto de três campos (Vicente da Silva e Antão, 2007; Antão et al., 2012; Vicente da Silva e Antão, 2012). Na presente formulação, as variáveis primais representam os valores de velocidade nodal e taxa de deformação plástica associados às respectivas aproximações. As variáveis duais são valores nodais da aproximação do campo tensorial de tensão. Devido ao facto de múltiplos campos serem aproximados independentemente no domínio dos elementos finitos, a formulação é considerada mista. A implementação em deformação plana emprega elementos triangulares com interpolações quadráticas contínuas para o campo de velocidade e interpolações lineares por elemento para a taxa de deformação e campo de tensão, como mostrado esquematicamente no Quadro 1. Como de costume e em contraste com a interpolação do campo de velocidades, tais aproximações não garantem a continuidade das deformações/tensões entre os elementos.

Mais recentemente, a formulação para o problema LB foi deduzida com base no mesmo método de otimização e explorando conceitos de dualidade (Vicente da Silva et al., 2020). A estratégia implementada faz também uso dum modelo de elemento finito híbrido-misto de três campos. No entanto, na formulação LB, os valores nodais das aproximações dos campos de velocidade e tensão atuam como variáveis primárias, enquanto os valores nodais da aproximação da taxa de deformação plástica correspondem às variáveis duais. Como no elemento UB, ambas as interpolações dos campos tensoriais recorrem a funções lineares no elemento. Por outro lado, a aproximação do campo de velocidades é bastante peculiar: enquanto é adotada uma aproximação de campo de velocidades constante no domínio do elemento, utilizam-se interpolações lineares em cada uma das suas fronteiras, resultando num triângulo de elemento finito não convencional de 7 nós (ver o Quadro 1). Para lidar com este campo de velocidades incoerente, um operador de compatibilidade discreto consistente foi introduzido em Vicente da Silva et al. (2020). Uma vez que o elemento LB utiliza aproximações nas fronteiras e no domínio simultaneamente, esta formulação é também considerada híbrida.

Quadro 1 – Elementos Finitos utilizados

Elemento Finito	Variáveis do MDAM		
	x	z	y
UB (variável nodal)	 (velocidade)	 (taxa de deformação)	 (tensão)
LB (variável nodal)	 (velocidade)	 (taxa de deformação)	 (tensão)

● 2 componentes/nó
○ 3 componentes/nó

Para concluir esta secção, vale a pena mencionar que as formulações apresentadas foram desenvolvidas de forma a produzir aproximações estritas (inferiores ou superiores) da carga de colapso exata.

3 – CRITÉRIO ESTENDIDO DE MATSUOKA-NAKAI

Comece-se por rever brevemente o critério de resistência de Mohr-Coulomb (MC). A sua superfície pode ser escrita em termos de tensões principais na seguinte forma:

$$\sigma_I(1 - \sin(\phi')) - \sigma_{III}(1 + \sin(\phi')) = 2c' \cos(\phi') \quad (5)$$

onde ϕ' denota o ângulo de resistência ao corte e c' é a coesão efetiva do material. As tensões principais são ordenadas de acordo com as suas magnitudes, $\sigma_I \geq \sigma_{II} \geq \sigma_{III}$, sendo as componentes de compressão consideradas positivas.

A expressão (5) pode ser reescrita usando o raio,

$$r = \frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2} \quad (6)$$

e a abcissa do ponto central,

$$C = \frac{\sigma_I + \sigma_{III}}{2} \quad (7)$$

da representação do círculo de Mohr definido por σ_I e σ_{III} . Assim, introduzindo as definições (6) e (7) em (5), resulta em,

$$C + \frac{c'}{\tan(\phi')} = \frac{1}{\sin(\phi')} r \quad (8)$$

No espaço de tensões de Haigh-Westergaard, esta superfície de rotura é representada por uma pirâmide centrada no eixo hidrostático e com uma secção transversal hexagonal irregular. De forma semelhante ao critério de rotura de Tresca, a sua superfície não é continuamente diferenciável (regular) uma vez que a influência da tensão principal intermédia, σ_{II} , não é levada em conta.

O critério de resistência proposto por Matsuoka e Nakai (Matsuoka e Nakai, 1974, 1985) pode ser interpretado como uma generalização do critério de Mohr-Coulomb. Em contraste com a pirâmide hexagonal irregular associada ao critério de MC, a superfície de cedência de MN apresenta uma forma cónica regular (exceto no ápice), que coincide com a superfície puramente friccional do

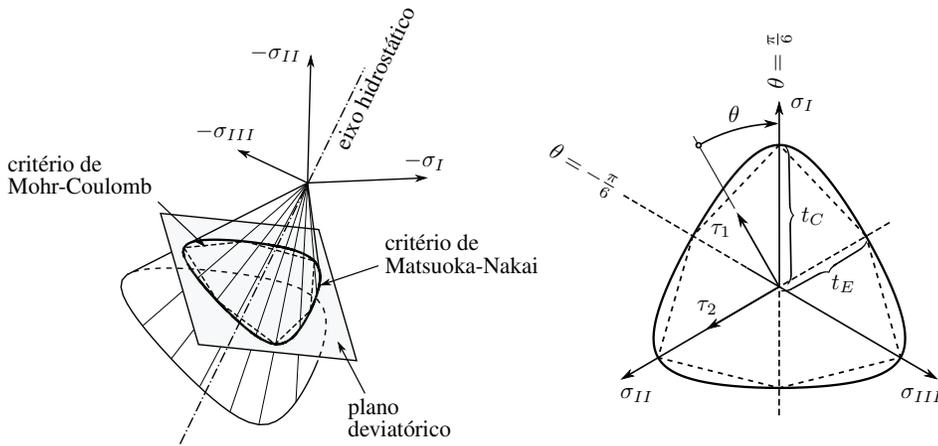


Fig. 1 – Superfícies dos critérios de Matsuoka-Nakai e Mohr-Coulomb.

critério de MC ao longo do ápice e das arestas (ver Figura 1). A função do critério de MN pode ser expressa em termos dos invariantes básicos do tensor das tensões da seguinte forma:

$$f(I_1, I_2, I_3) = I_1 I_2 - K_{MN} I_3 \quad (9)$$

onde K_{MN} é um parâmetro adimensional do material e onde as expressões dos invariantes básicos do tensor de tensão são:

$$I_1 = \sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III} \quad (10a)$$

$$I_2 = \sigma_I \sigma_{II} + \sigma_{II} \sigma_{III} + \sigma_{III} \sigma_I \quad (10b)$$

$$I_3 = \sigma_I \sigma_{II} \sigma_{III} \quad (10c)$$

Neste ponto, é oportuno introduzir o sistema de coordenadas cilíndricas de Lode (θ, t, s). Aqui, o eixo s coincide com o eixo da tensão hidrostática, enquanto θ e t representam um ângulo azimutal e a respetiva distância radial no plano deviatórico. Estas coordenadas estão relacionadas com as coordenadas das tensões principais ($\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}$) da seguinte forma:

$$s = \frac{I_1}{\sqrt{3}} \quad (11a)$$

$$t = \sqrt{\frac{(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{III} - \sigma_I)^2}{3}} \quad (11b)$$

$$\theta = \frac{1}{3} \arcsin \left(\frac{3\sqrt{6}J_3}{t^3} \right) \quad (11c)$$

onde J_3 é o terceiro invariante do tensor das tensões deviatóricas:

$$J_3 = \frac{2}{27} I_1^3 - \frac{1}{3} I_1 I_2 + I_3 \quad (12)$$

Dada a ordenação adotada para as tensões principais, o intervalo do ângulo de Lode é $-\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{6}$. Os valores limite de $\theta = -\frac{\pi}{6}$ e $\theta = \frac{\pi}{6}$ correspondem às condições de ensaios triaxiais de extensão

($\sigma_I = \sigma_{II} \geq \sigma_{III}$) e compressão ($\sigma_I \geq \sigma_{II} = \sigma_{III}$) clássicos, respetivamente. De acordo com o critério de MC, os raios deviatóricos de extensão e compressão são,

$$t(\theta = -\frac{\pi}{6}) = t_E = \frac{2\sqrt{2}\sin(\phi')}{3 + \sin(\phi')}s \quad (13a)$$

$$t(\theta = \frac{\pi}{6}) = t_C = \frac{2\sqrt{2}\sin(\phi')}{3 - \sin(\phi')}s \quad (13b)$$

Para calibrar ambos os critérios de modo a que ambos ajustem os dados dos testes triaxiais de compressão, a seguinte igualdade deve ser mantida (Griffiths e Huang, 2009):

$$K_{MN} = \frac{9 - \sin^2(\phi')}{1 - \sin^2(\phi')} \quad (14)$$

Adicionalmente, é conveniente definir um sistema de coordenadas cartesianas adicional (τ_1, τ_2, s) definido pela seguinte transformação linear:

$$\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ s \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} \sigma_I \\ \sigma_{II} \\ \sigma_{III} \end{bmatrix} \quad (15)$$

com,

$$R = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix} \quad (16)$$

onde os versores τ_1 e τ_2 são paralelos ao plano deviatórico (como mostrado na Figura 1). Essas coordenadas deviatóricas (τ_1, τ_2) e as coordenadas de Lode (θ, t) para um determinado ponto de tensão estão relacionadas da seguinte forma:

$$\tau_1 = t \cos(\theta) \quad (17a)$$

$$\tau_2 = -t \sin(\theta) \quad (17b)$$

Finalmente, fazendo uso das coordenadas de Lode, a função do critério MN (9) pode ser reescrita na seguinte forma alternativa:

$$f(\theta, t, s) = -\sqrt{2}K_{MN} \sin(3\theta)t^3 + (3K_{MN} - 9)t^2s + (18 - 2K_{MN})s^3 \quad (18)$$

Embora pensado inicialmente para materiais puramente friccionais, é possível estender o critério de MN para lidar também com materiais apresentando coesão efetiva ou um intercepto de coesão (Matsuoka et al., 1990). A ideia é aplicar uma translação à superfície de critério de MN ao longo do eixo da tensão hidrostática para posicionar o ápice do critério no valor de tensão desejado, $\sigma_0 = c'/\tan(\phi')$. Esta transformação pode ser obtida substituindo nas expressões dos invariantes básicos (10) os valores das tensões principais por tensões equivalentes,

$$\bar{\sigma}_k = \sigma_k - \sigma_0, \quad k = \{I, II, III\} \quad (19)$$

CONDIÇÕES DE DEFORMAÇÃO PLANA

Considerando que a regra da normalidade da deformação plástica é válida, o que significa que o vetor da taxa de deformação plástica, $\dot{\varepsilon}^p$, é normal à superfície da função potencial de fluxo plástico, e assumindo por sua vez que esta função potencial coincide com o critério de cedência, tem-se que:

$$\dot{\varepsilon}^p = \lambda \nabla f \quad (20)$$

onde λ é um escalar positivo ($\lambda \geq 0$) e o gradiente da função definidora do critério de rotura é,

$$\nabla f = \begin{bmatrix} \partial f / \partial \sigma_I \\ \partial f / \partial \sigma_{II} \\ \partial f / \partial \sigma_{III} \end{bmatrix} \quad (21)$$

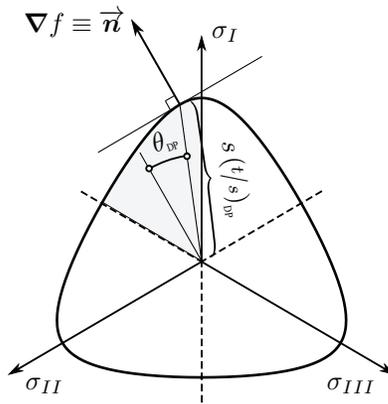


Fig. 2 – Regra da normalidade de escoamento e plasticidade associada para o critério de Matsuoka-Nakai em condições de deformação plana.

Em condições de deformação plana, é necessário evitar a deformação plástica fora do plano em que $\varepsilon = 0$. De uma análise atenta da Figura 2 é possível concluir que para $-\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{6}$ esta condição só pode ser satisfeita se a direção fora do plano coincidir com a direção da tensão principal intermédia. A partir da imposição de deformações fora do plano nulas, é necessário que a seguinte equação seja válida:

$$n_{II} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{II}} = 0 \quad (22)$$

Pode-se assim deduzir a expressão para a componente n_{II} do vetor normal. Levando em consideração (15) e aplicando a regra da derivação da função composta é possível escrever:

$$n_{II} = \frac{\partial f}{\partial \tau_1} \frac{\partial \tau_1}{\partial \sigma_{II}} + \frac{\partial f}{\partial \tau_2} \frac{\partial \tau_2}{\partial \sigma_{II}} + \frac{\partial f}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial \sigma_{II}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\sqrt{2} \frac{\partial f}{\partial \tau_2} + \frac{\partial f}{\partial s} \right) \quad (23)$$

A matriz Jacobiana da transformação (17) do sistema de coordenadas cilíndricas de Lode para o sistema de coordenadas cartesianas do plano deviatórico, $(t, \theta) \rightarrow (\tau_1, \tau_2)$, é dada por:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \partial \tau_1 / \partial \theta & \partial \tau_2 / \partial \theta \\ \partial \tau_1 / \partial t & \partial \tau_2 / \partial t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t \sin(\theta) & -t \cos(\theta) \\ \cos(\theta) & -\sin(\theta) \end{bmatrix} \quad (24)$$

Assim, as derivadas parciais em (23) podem ser expressas em relação às coordenadas de Lode,

$$n_{II} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\frac{\partial f}{\partial s} + \sqrt{2} \left(\frac{\partial f}{\partial \theta} J_{21}^{-1} + \frac{\partial f}{\partial t} J_{22}^{-1} \right) \right] = \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\frac{\partial f}{\partial s} - \sqrt{2} \left(\frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\cos(\theta)}{t} + \frac{\partial f}{\partial t} \sin(\theta) \right) \right] \quad (25)$$

Por fim, introduzindo a definição da função de rotura (18) em (25) resulta em:

$$\frac{1}{\sqrt{3}} n_{II}(\theta, t, s) = 2K_{MN} \cos(3\theta) \cos(\theta) t^2 + (K_{MN} - 3) t^2 + \left[2K_{MN} \sin(3\theta) t^2 - 2\sqrt{2} (K_{MN} - 3) ts \right] \sin(\theta) + (18 - 2K_{MN}) s^2 \quad (26)$$

Combinando as Eqs. (18), (22) e (26), é possível obter um sistema de duas equações não lineares que permite definir os pontos na superfície de escoamento em deformação plana.

$$\begin{cases} F_1(\theta, t/s) = -\sqrt{2} K_{MN} \sin(3\theta) \left(\frac{t}{s}\right)^3 + (3K_{MN} - 9) \left(\frac{t}{s}\right)^2 + 18 - 2K_{MN} & = 0 \\ F_2(\theta, t/s) = 2K_{MN} \left(\frac{t}{s}\right)^2 [\cos(3\theta) \cos(\theta) + \sin(3\theta) \sin(\theta)] + (K_{MN} - 3) \left(\frac{t}{s}\right)^2 - \\ \qquad \qquad \qquad 2\sqrt{2} (K_{MN} - 3) \sin(\theta) \left(\frac{t}{s}\right) + 18 - 2K_{MN} & = 0 \end{cases} \quad (27)$$

Por uma questão de completude, apresenta-se em Apêndice um possível esquema de solução para este sistema de equações. Doravante, as raízes relevantes de (27) são indicadas com a sigla *DP* em subscrito.

Levando em conta as relações (15) e (17) a solução de (27) pode ser escrita no sistema de coordenadas de tensões principais. Esta expressão é definida em termos de tensões equivalentes (19) e traduz-se por:

$$\begin{bmatrix} \sigma_I - \frac{c'}{\tan(\phi')} \\ \sigma_{II} - \frac{c'}{\tan(\phi')} \\ \sigma_{III} - \frac{c'}{\tan(\phi')} \end{bmatrix} = \mathbf{R}^T \begin{bmatrix} \left(\frac{t}{s}\right)_{DP} \cos(\theta_{DP}) \\ -\left(\frac{t}{s}\right)_{DP} \sin(\theta_{DP}) \\ 1 \end{bmatrix} s = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos(\theta_{DP}) + \frac{1}{\sqrt{6}} \sin(\theta_{DP})\right) \left(\frac{t}{s}\right)_{DP} + \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\sqrt{\frac{2}{3}} \sin(\theta_{DP}) \left(\frac{t}{s}\right)_{DP} + \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \cos(\theta_{DP}) + \frac{1}{\sqrt{6}} \sin(\theta_{DP})\right) \left(\frac{t}{s}\right)_{DP} + \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} s \quad (28)$$

A manipulação algébrica destas expressões permite obter para as tensões no plano o raio e a abcissa do ponto central da representação do círculo de Mohr. As respetivas expressões são:

$$r = \frac{\left(\frac{t}{s}\right)_{DP} \cos(\theta_{DP})}{\sqrt{2}} s \quad (29a)$$

$$C = \left(\frac{\left(\frac{t}{s}\right)_{DP} \sin(\theta_{DP})}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) s + \frac{c'}{\tan(\phi')} \quad (29b)$$

Combinando (29a) e (29b) de forma a eliminar *s* resulta:

$$C + \frac{c'}{\tan(\phi')} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\tan(\theta_{DP}) + \frac{\sqrt{2}}{\left(\frac{t}{s}\right)_{DP} \cos(\theta_{DP})} \right) r \Leftrightarrow C + \frac{c'_{DP}}{\tan(\phi'_{DP})} = \frac{1}{\sin(\phi'_{DP})} r \quad (30)$$

onde as seguintes igualdades devem ser válidas,

$$\phi'_{DP} = \arcsin \left(\sqrt{3} \left(\tan(\theta_{DP}) + \frac{\sqrt{2}}{\left(\frac{t}{s}\right)_{DP} \cos(\theta_{DP})} \right)^{-1} \right) \quad (31a)$$

Quadro 2 – Parâmetros de resistência equivalentes para o critério de MNE em deformação plana

K_{MN}	$\phi' \text{ (}^\circ\text{)}$	$\phi'_{DP} \text{ (}^\circ\text{)}$	c'_{ef}/c'
9,249	10	11,53	1,157
9,574	15	17,25	1,159
10,060	20	22,94	1,163
10,740	25	28,56	1,167
11,667	30	34,11	1,173
12,922	35	39,58	1,180
14,633	40	44,94	1,189
17,000	45	50,18	1,199

$$c'_{DP} = c' \frac{\tan(\phi'_{DP})}{\tan(\phi')} \quad (31b)$$

c'_{DP} e ϕ'_{DP} representam a coesão efetiva equivalente em deformação plana e o ângulo de resistência ao corte em deformação plana, respetivamente.

Confrontando a expressão (8) apresentada para o critério de resistência MC com a expressão (30), deduzida para o critério MN em deformações planas, conclui-se que são análogas. Consequentemente, nesta situação, o critério de MN pode ser tratado como o de MC, desde que sejam usados os parâmetros equivalentes do material de deformação plana. É digno de nota o fato de que, usando uma abordagem diferente, Potts e Gens (1984) chegaram à mesma conclusão para materiais puramente friccionais e apresentaram uma estratégia alternativa para calcular o ângulo de resistência ao corte em deformação plana equivalente, deixando de fora o tratamento do comportamento coesivo. Lagioia e Panteghini (2017) com base numa versão reescrita do critério MN também chegaram a uma expressão analítica para esta relação, neste caso contendo também o tratamento da coesão efetiva.

O Quadro 2 mostra as coesões efetivas em deformação plana equivalentes assim como os ângulos de resistência ao corte, para uma ampla gama de ângulos de resistência ao corte. A mesma informação também é mostrada na Figura 3. Os resultados mostram que, com o aumento do ângulo de resistência ao corte, há um crescimento linear do ângulo de resistência ao corte equivalente, chegando a um valor de $+5^\circ$ para um ângulo de resistência ao corte de 45° . Para a coesão efetiva equivalente, os resultados revelam um crescimento quadrático, variando de um aumento de 15% para um ângulo de resistência ao corte de 10° , até 20% para um ângulo de resistência ao corte de 45° .

4 – APLICAÇÕES NUMÉRICAS

Apresenta-se seguidamente o estudo de três problemas geotécnicos de diferente índole de forma a ilustrar as capacidades da abordagem proposta. Os exemplos iniciais lidam com a capacidade de carga de fundações superficiais, enquanto o último exemplo analisa o problema da estabilidade de taludes.

4.1 – Determinação do fator de capacidade de carga N_γ

De acordo com a amplamente adotada teoria da capacidade de carga de Terzaghi (1943), a carga última por unidade de comprimento, q_u , de uma fundação superficial apoiada num maciço de areia,

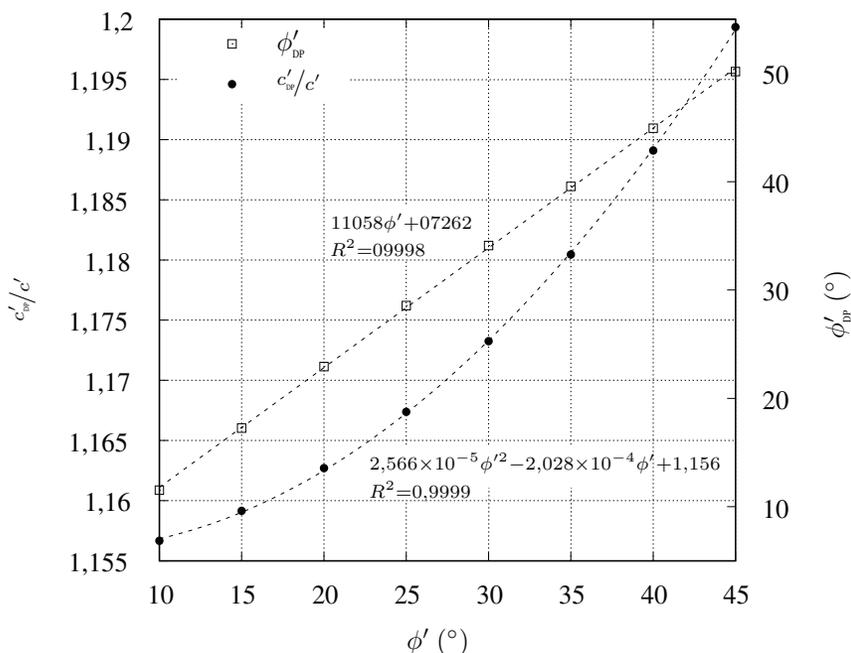


Fig. 3 – Parâmetros de resistência equivalentes para o critério de MNE em deformação plana.

sem sobrecarga ao nível da base da fundação, pode ser obtida pela expressão:

$$q_u = \frac{1}{2} \gamma B N_\gamma \quad (32)$$

onde γ é o peso próprio do solo, B é a largura da sapata e N_γ é um fator de capacidade de carga, adimensional. Este último depende apenas do ângulo de resistência ao corte do solo, ϕ' . O presente estudo incide apenas no caso de fundações de base perfeitamente rugosa. Para a determinação numérica de N_γ , é comumente aceite que o comportamento do solo pode ser descrito como um material perfeitamente plástico com um fluxo associado, obedecendo ao critério de resistência de MC.

Nessas condições, Martin (2005) publicou valores de N_γ , que considerou serem exatos, calculados recorrendo ao método das características. Apesar de nesse trabalho apenas terem sido publicado os valores de N_γ para um número limitado de ângulos de resistência ao corte, o autor disponibilizou na sua página na Internet os valores que correspondem a uma enorme gama de valores de ϕ' . Quase ao mesmo tempo, usando uma abordagem semelhante, Smith (2005) publicou uma nota técnica com uma tabela abrangente dos valores de N_γ . As soluções desses dois autores estão em perfeita concordância, embora os valores de Martin apresentem mais dígitos de precisão. Como resultado, Salgado (2006) propôs uma expressão aproximada para N_γ , capaz de ajustar esses dados, dada por:

$$N_\gamma = (N_q - 1) \tan(1,32\phi') \quad (33)$$

onde N_q denota o fator de capacidade de carga associado ao termo de sobrecarga, sendo a sua expressão analítica exata conhecida (Hansen, 1970):

$$N_q = \frac{1 + \sin(\phi')}{1 - \sin(\phi')} e^{\pi \tan \phi'} \quad (34)$$

Quadro 3 – Estimativas da Região Inferior e da Região Superior para N_γ

ϕ' (°)	N_γ^{LB}	N_γ^{UB}
10	0,5974	0,6140
15	1,767	1,800
20	4,616	4,704
25	11,60	11,76
30	29,47	30,27
35	78,71	79,49
40	230,1	239,8
45	773,8	791,2

Alternativamente, Hjiáj et al. (2005), recorrendo a métodos de ALEF, propuseram uma expressão, que, apesar de um pouco mais rebuscada, se ajustava bem aos resultados obtidos por esses autores :

$$N_\gamma = e^{\frac{\pi+3\pi^2 \tan(\phi')}{6}} (\tan(\phi'))^{\frac{2\pi}{5}} \quad (35)$$

Vale também a pena salientar que a fórmula preconizada no Anexo D do Eurocódigo 7 (CEN, 2004)),

$$N_\gamma = 2(N_q - 1) \tan(\phi') \quad (36)$$

resultante de uma aproximação aos valores numéricos obtidos por Caquot e Kerisel (1953), tende, aparentemente, a sobrestimar o valor exato de N_γ , determinado com o ângulo de resistência ao corte obtido em compressão triaxial, o que levanta algumas questões do ponto de vista da segurança.

Uma comparação entre as soluções mencionadas é mostrada no gráfico da Fig. 4, onde ϕ' denota o ângulo de resistência ao corte obtido em compressão triaxial. Além disso, esta figura exhibe as estimativas dos limites das regiões inferior e da região superior para o fator de capacidade de carga N_γ usando o critério de resistência de MNE, calculado com a abordagem apresentada neste trabalho. Os valores numéricos destes cálculos são também apresentados no Quadro 3. Adicionalmente, a Fig. 4 mostra a curva dos valores de Martin (2005) sendo que o ângulo de resistência ao corte usado no cálculo é o ângulo de resistência ao corte de deformação plana equivalente (ver Fig. 3). Aceitando a exatidão dos valores de Martin (2005), o procedimento utilizado permite calcular a solução exata para o fator de capacidade de carga N_γ obtido com o critério de MNE. A análise dos resultados permite as seguintes observações:

- a formulação ALEF proposta tem a capacidade de produzir limites estritos e precisos da carga exata;
- a influência da tensão principal intermédia afeta significativamente os resultados de problemas da capacidade de carga de fundações sob condições de deformação plana, principalmente para solos com maiores ângulos de resistência ao corte;
- a fórmula proposta no EC7 (36) subestima a capacidade de carga teórica obtida recorrendo ao critério de MNE; este fato sugere que, se usada com o ângulo de resistência ao corte obtido em compressão triaxial, a expressão do EC7 está, de fato, no lado da segurança da capacidade de carga de uma fundação superficial em deformação plana.

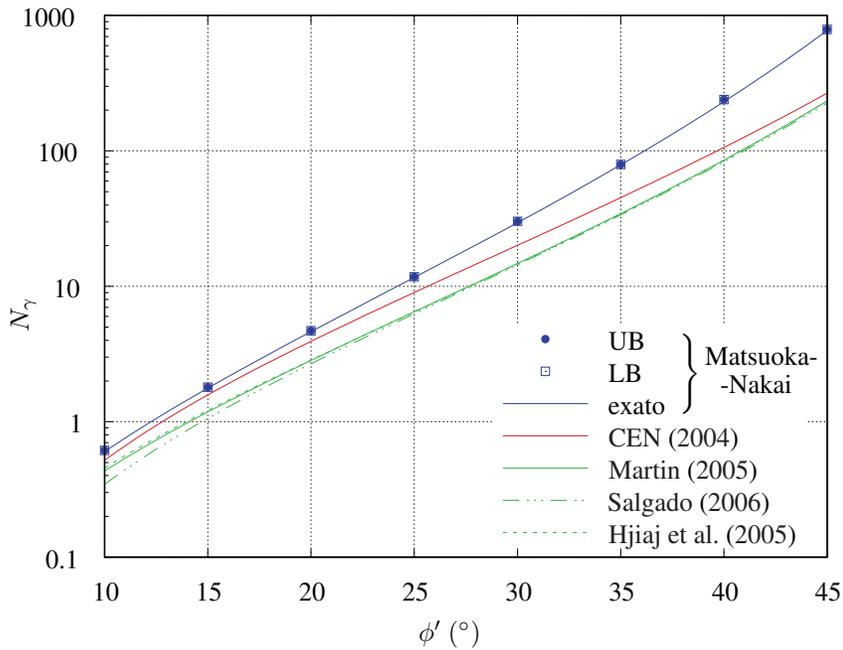


Fig. 4 – Propostas para o fator de capacidade de carga N_γ .

4.2 – Capacidade de carga em solos estratificados

O presente exemplo pretende tratar a simulação numérica de testes experimentais realizados em fundações superficiais sujeitas a cargas inclinadas. As fundações estão apoiadas numa camada de areia, por sua vez sobreposta a uma camada de argila. Nestes ensaios foi realizado um estudo paramétrico da influência da espessura da camada superior e da inclinação da carga. A Figura 5 representa esquematicamente a geometria do problema. Para mais detalhes sobre os testes, o leitor é reenviado a Meyerhof e Hanna (1978) e Hanna (1981b).

Para avaliar as propriedades mecânicas dos materiais, nomeadamente o ângulo de resistência ao corte da areia, foram testadas amostras deste material em dois equipamentos diferentes - um dispositivo triaxial e um aparelho de deformação plana descritos em Hanna (1981a). Os resultados apresentados em Hanna (1981b) apontam para um ângulo de resistência ao corte de $43,2^\circ$ com base no teste triaxial, enquanto o teste em deformação plana conduz a um valor mais elevado de $47,7^\circ$. Esta diferença está em conformidade com as observações de Green e Bishop (1969). Para a modelação numérica, de acordo com (14), foi adotado para o parâmetro do critério de resistência de MNE, K_{MN} , o valor de 16,05, que corresponde a calibrar o modelo para um ângulo de resistência ao corte obtido em compressão triaxial de $43,2^\circ$. Como descrito na secção 3, em condições de deformação plana este parâmetro é equivalente a um ângulo de resistência ao corte de MC de aproximadamente $48,1^\circ$. O depósito de argila foi modelado pelo critério de resistência de Tresca com uma resistência ao corte não drenada de $10kPa$.

A Figura 6 mostra a comparação entre as soluções numéricas e os resultados experimentais da componente vertical da capacidade de carga. Os valores obtidos numericamente no presente trabalho são também apresentadas no Quadro 4. Observa-se que as diferenças entre os resultados da região inferior e da região superior são pequenas, garantindo assim que a curva proposta, obtida pela média desses resultados, esteja próxima da solução exata. Os resultados numéricos revelam uma concordância razoável com os dos testes experimentais. No entanto, à medida que o ângulo da

Quadro 4 – Valores da Região Superior e da Região Inferior para a capacidade de carga vertical de uma fundação superficial apoiada em meio estratificado, $q_u^v = q_u \cos(i)$ [kPa],

H/B	$i = 0^\circ$		$i = 10^\circ$		$i = 20^\circ$		$i = 30^\circ$	
	LB	UB	LB	UB	LB	UB	LB	UB
0	51,40	51,48	40,40	40,71	27,34	27,42	17,32	17,37
0,25	49,71	51,29	37,3	38,25	23,93	24,49	14,18	14,63
0,5	54,03	54,8	38,58	39,72	24,24	24,98	13,30	13,80
1	65,62	67,82	48,49	50,06	31,96	32,90	12,89	13,68
2	106,68	108,41	84,63	87,09	38,75	42,08	12,84	13,63
3	157,4	163,34	93,00	103,95	38,52	42,58	12,82	13,68
3,5	179,74	196,56	—	—	—	—	—	—
4	202,94	217,34	93,40	104,14	38,89	42,05	12,86	13,64
4,5	201,35	216,50	—	—	—	—	—	—
5	203,56	215,31	93,42	104,85	38,81	42,20	12,88	13,63

direção de aplicação da carga com a vertical, i , diminui, há uma maior discrepância entre os resultados. Verifique-se ainda que nos resultados da modelação numérica se verifica que para $i = 30^\circ$ a introdução da camada de areia reduz a capacidade de carga total do solo, o que não é comprovado pelos resultados experimentais.

Independentemente do ângulo da direção de aplicação da carga com a vertical, pode ser observada uma queda inicial na capacidade de carga da sapata para situações correspondentes aos casos com camadas de areia de espessura mais baixa (geralmente $H/B \leq 0,5$), sendo que este efeito é mais perceptível para cargas mais inclinadas. Infelizmente, devido à falta de dados experimentais para esta faixa de H/B , não é possível fundamentar este comportamento.

Os resultados propostos no presente trabalho tendem a subestimar o valor da carga de rotura. No entanto, é importante ressaltar que o uso do critério de MC acentuaria ainda mais esse efeito, mesmo que calibrado para o ângulo de atrito em deformação plana experimental de $47,7^\circ$.

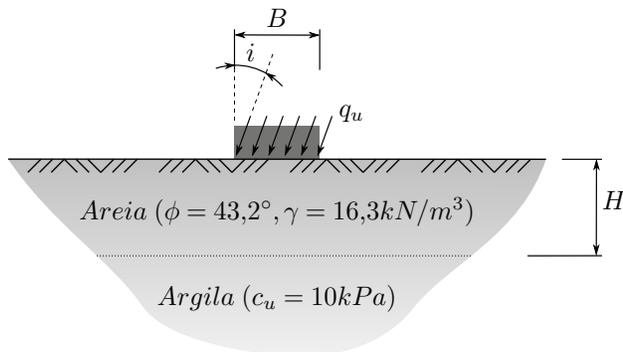


Fig. 5 – Fundação superficial sob a ação de cargas inclinadas, apoiada em solo disposto por camadas.

4.3 – Estabilidade de taludes estratificados

O último exemplo apresentado diz respeito à determinação do número de estabilidade,

$$N_s = \frac{\gamma H_{cr}}{c'} \quad (37)$$

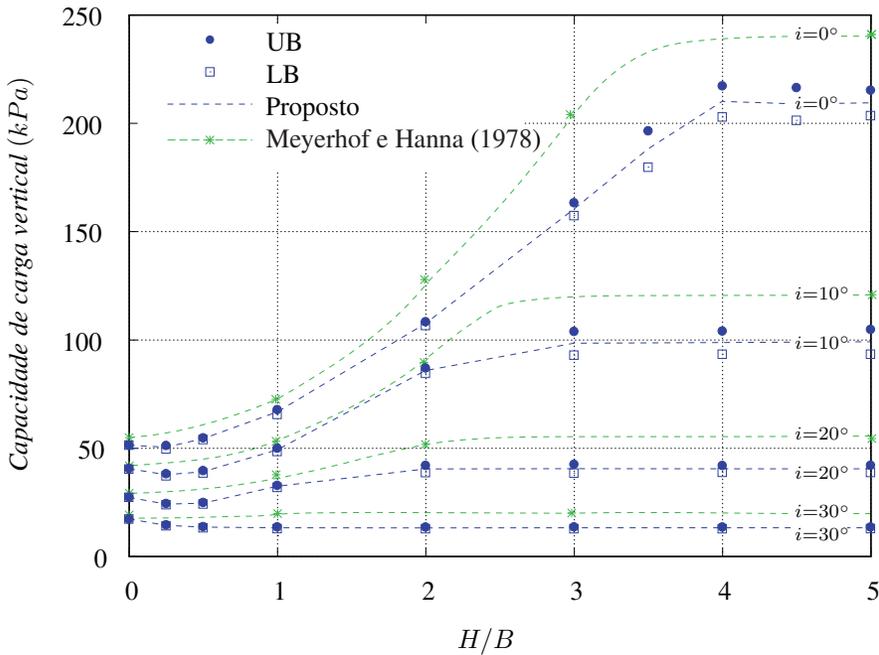


Fig. 6 – Resultados numéricos comparados com dados experimentais para a capacidade de carga de fundação superficial apoiada em solo disposto por camadas.

para taludes com altura H e ângulo de inclinação β , atravessando duas camadas distintas de solo. Em (37), H_{cr} denota a altura crítica do talude. Os solos de ambas as camadas têm a mesma coesão efetiva, c' , e peso próprio, γ , sendo os seus ângulos de resistência ao corte, ϕ'_1 e ϕ'_2 , diferentes. A Fig. 7 representa esquematicamente a geometria do problema. Foram analisados dois valores diferentes para a proporção entre as alturas das duas camadas, $H_1/H = 0,2$ e $0,8$, para um β variando de 45° a 90° . Além disso, o valor do ângulo de resistência ao corte para a camada superior, ϕ'_1 , variou entre 20° e 30° , enquanto para a camada inferior ϕ'_2 variou entre 30° e 40° .

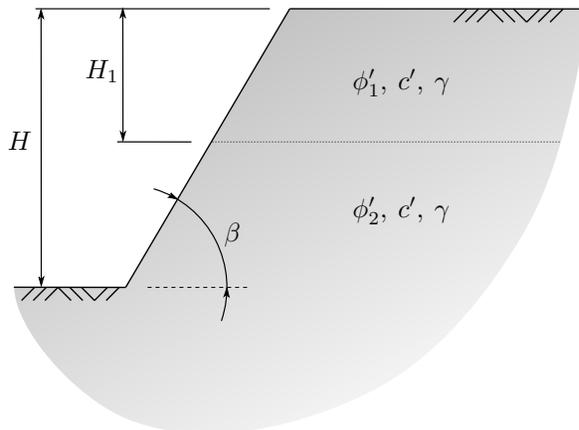


Fig. 7 – Definição da geometria do talude estratificado.

A Fig. 8 apresenta e compara os resultados com as soluções obtidas por Kumar e Samui (2006), usando o teorema da Região Superior e o critério de resistência de MC. Como foi visto nos exemplos anteriores a influência da tensão principal intermédia, considerada pelo critério de MNE, pode desempenhar um papel importante em problemas em deformação plana. No caso em apreço tal resulta num ganho significativo na resistência do talude que se traduz num aumento de mais de 2,5 vezes no número de estabilidade para o caso mais expressivo ($\phi'_1 = 30^\circ$, $\phi'_2 = 40^\circ$, $H_1/H = 0,2$ e $\beta = 45^\circ$).

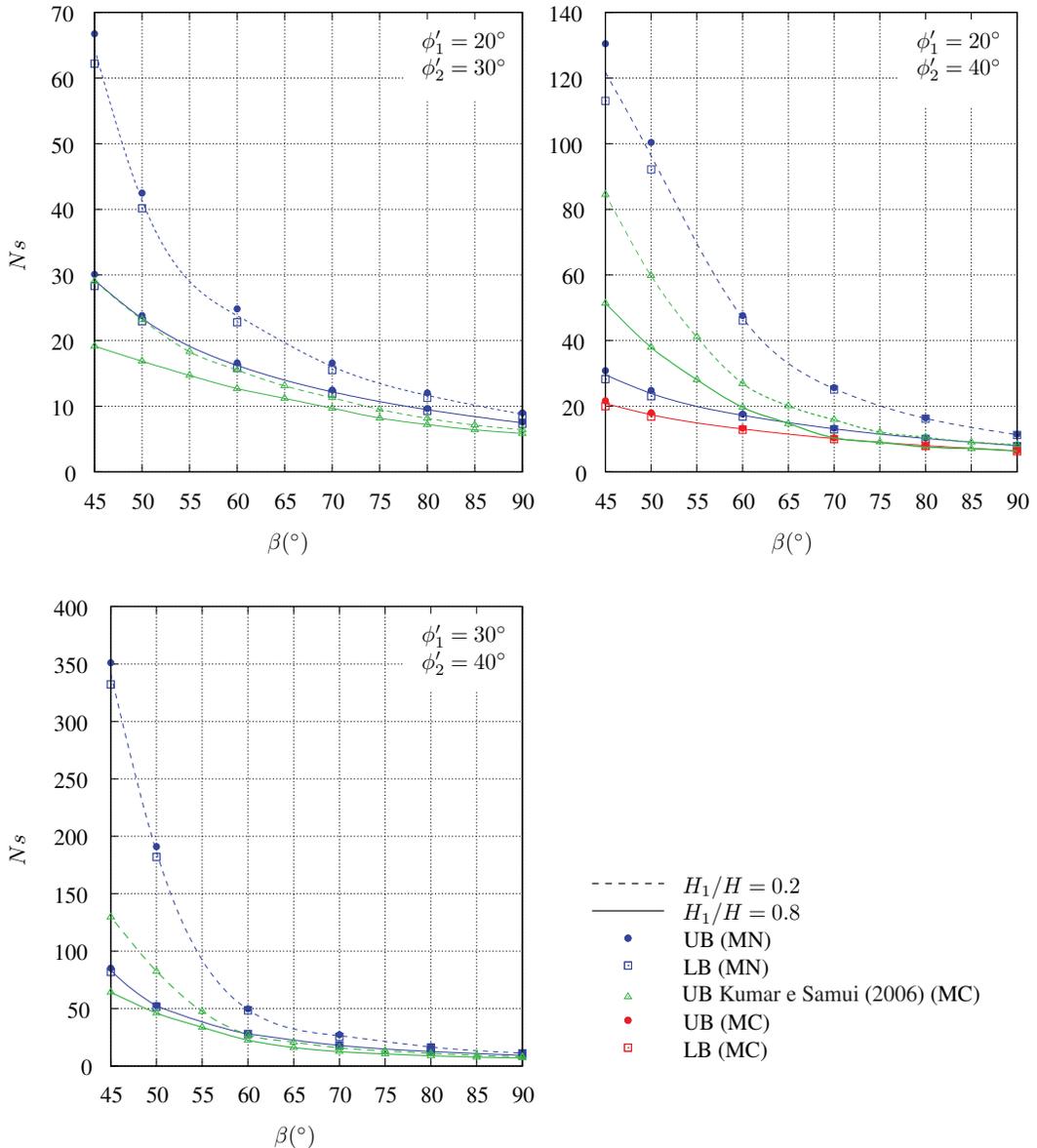


Fig. 8 – Número de estabilidade, N_s , para o talude estratificado.

Convém ressaltar que foi detetado um comportamento estranho para os taludes correspondentes ao caso $\phi'_1 = 20^\circ$, $\phi'_2 = 40^\circ$ e $H_1/H = 0,8$. Os resultados relatados em Kumar e Samui (2006) apresentam, para declives menos acentuados, maiores resistências pelo critério de MC do que as

obtidas com o critério MNE. No entanto, usando o código apresentado neste trabalho e utilizando o critério de MC, chegou-se à conclusão de que os valores em questão correspondem, possivelmente, a um erro de impressão, atendendo a que, para $\beta < 70^\circ$ divergem significativamente dos resultados recalculados com o código apresentado utilizando o critério de MC. Os resultados desses cálculos também foram incluídos na Fig. 8.

5 – CONCLUSÕES FINAIS

O presente trabalho apresenta uma implementação, em condições de deformação plana, dos teoremas da Região Superior e da Região Inferior da Análise de Limite usando o critério MNE. O critério MNE, ao contrário do amplamente utilizado critério MC, inclui o efeito da tensão principal intermédia na sua formulação. A sua utilização parece ser justificada pela sua adequação em modelar os resultados experimentais de amostras de solo sujeitas a carregamentos verdadeiramente triaxiais.

No artigo, o critério MNE é escrito no plano deviatórico de forma a permitir a dedução da formulação correspondente ao caso de deformação plana e, além disso, destacar a relação entre os parâmetros de resistência do critério MC e do critério MNE em condições de deformação plana.

Os problemas de otimização decorrentes dos teoremas da Região Superior e da Região Inferior são tratados usando o MDAM, seguindo trabalhos anteriores dos autores.

A validação da implementação numérica efetuada é realizada com base na resolução de três problemas, dois deles considerando a capacidade de carga de fundações superficiais e o outro tratando da estabilidade de taludes. Ficou claro a partir desses exemplos que a abordagem apresentada garante boas aproximações entre os valores obtidos recorrendo aos teoremas Região Superior e da Região Inferior. Essas aproximações das cargas de colapso exatas permitem pôr em evidência que o uso de coesão efetiva e ângulo de resistência ao corte determinados em carregamentos triaxiais, combinado com o uso do critério MNE, produz, em condições de deformação plana, valores de resistência maiores do que os determinados usando o critério MC. Esses resultados seguem a tendência observada experimentalmente.

Apêndice – Esquema de solução

Um esquema iterativo de resolução do sistema de equações (27) é descrito no Algoritmo 2, onde H representa a matriz Hessiana, definida pelas componentes:

$$H_{11} = -3\sqrt{2}K_{MN} \cos(3\theta) \left(\frac{t}{s}\right)^3 \quad (.38a)$$

$$H_{12} = -3\frac{t}{s} \left(\sqrt{2}K_{MN} \sin(3\theta)\frac{t}{s} + 6 - 2K_{MN}\right) \quad (.38b)$$

$$H_{21} = -2\sqrt{2}\frac{t}{s} \cos(\theta) \left(2\sqrt{2} \sin(\theta)K_{MN}\frac{t}{s} + K_{MN} - 3\right) \quad (.38c)$$

$$H_{22} = 2\sqrt{2} \sin(\theta)(3 - K_{MN}) + 2(4K_{MN} \cos^2(\theta) - K_{MN} - 3)\frac{t}{s} \quad (.38d)$$

Saliente-se que o ponto inicial proposto $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{t_C}{s}\right)$ garante a convergência do algoritmo para a solução relevante.

Algoritmo 2 Esquema de solução

$$\theta^0 \leftarrow \frac{\pi}{6}$$

▷ Inicialização

$$(t/s)^0 \leftarrow \frac{2\sqrt{2\frac{9-K_{MN}}{1-K_{MN}}}}{3-\sqrt{2\frac{9-K_{MN}}{1-K_{MN}}}} = \frac{2\sqrt{2}\sin(\phi)}{3-\sin(\phi)}$$

$$n \leftarrow 0$$

repetir

$$\Delta^{n+1} \leftarrow -\frac{1}{\det \mathbf{H}^n} \begin{bmatrix} H_{22}^n & -H_{12}^n \\ -H_{21}^n & H_{11}^n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1^n \\ F_2^n \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \theta \\ t/s \end{Bmatrix}^{n+1} \leftarrow \begin{Bmatrix} \theta \\ t/s \end{Bmatrix}^n + \Delta^{n+1}$$

▷ Iteração Newton

$$n \leftarrow n + 1$$

até $\|\Delta^n\| \leq Tol$ ▷ Critério de paragem

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Antão, A., Vicente da Silva, M., Guerra, N., e Delgado, R. (2012). *An upper bound-based solution for the shape factors of bearing capacity of footings under drained conditions using a parallelized mixed f.e. formulation with quadratic velocity fields*. Computers and Geotechnics, 41, pp. 23–35. <https://doi.org/10.1016/j.compgeo.2011.11.003>.
- Boyd, S., Parikh, N., Chu, E., Peleato, B., e Eckstein, J. (2011). *Distributed optimization and statistical learning via the alternating direction method of multipliers*. Foundations and Trends in Machine Learning, 3(1), pp. 1–122. <http://dx.doi.org/10.1561/22000000016>.
- Caquot, A. e Kerisel, J. (1953). *Sur le terme de surface dans le calcul des fondations en milieu pulvérulent*. Em Proceedings of the 3rd International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, vol. 1, pp. 336–337, Zurich.
- CEN (2004). *EN 1997-1: Eurocode 7: Geotechnical Design – Part 1: General Rules*. European Committee for Standardization, Brussels, Belgium, 2nd ed. edição.
- Green, G. E. e Bishop, A. W. (1969). *A note on the drained strength of sand under generalized strain conditions*. Géotechnique, 19(1), pp. 144–149. <https://doi.org/10.1680/geot.1969.19.1.144>.
- Griffiths, D. V. e Huang, J. (2009). *Observations on the extended matsuoaka-nakai failure criterion*. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 33(17), pp. 1889–1905. <https://doi.org/10.1002/nag.810>.
- Hanna, A. M. (1981a). *Experimental study on footings in layered soil*. Journal of the Geotechnical Engineering Division, 107(GT8), pp. 1113–1126. <https://doi.org/10.1061/AJGEB6.0001178>.
- Hanna, A. M. (1981b). *Foundations on strong sand overlying weak sand*. Journal of the Geotechnical Engineering Division, 107(GT7), pp. 915–927. <https://doi.org/10.1061/AJGEB6.0001169>.
- Hansen, J. B. (1970). *A Revised and Extended Formula for Bearing Capacity*, vol. 28 de *Bulletin of The Danish Geotechnical Institute*, pp. 5–11. Danish Geotechnical Institute.
- Hjjaj, M., Lyamin, A., e Sloan, S. (2005). *Numerical limit analysis solutions for the bearing capacity factor N_γ* . International Journal of Solids and Structures, 42(5-6), pp. 1681–1704. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2004.08.002>.

- Kumar, J. e Samui, P. (2006). *Stability determination for layered soil slopes using the upper bound limit analysis*. Geotechnical & Geological Engineering, 24(6), pp. 1803–1819. <https://doi.org/10.1007/s10706-006-7172-1>.
- Lade, P. V. e Duncan, J. M. (1975). *Elastoplastic stress-strain theory for cohesionless soil*. Journal of the Geotechnical Engineering Division, 101(10), pp. 1037–1053. <https://doi.org/10.1061/AJGEB6.0000204>.
- Lade, P. V. e Musante, H. M. (1978). *Three-dimensional behavior of remolded clay*. Journal of the Geotechnical Engineering Division, 104(2), pp. 193–209. <https://doi.org/10.1061/AJGEB6.0000581>.
- Lagioia, R. e Panteghini, A. (2017). *Accounting for specific failure criteria in the slip-line method for plane strain problems*. Géotechnique Letters, 7(2), pp. 184–189. <https://doi.org/10.1680/jsele.17.00014>.
- Martin, C. (2005). *Exact bearing capacity calculations using the method of characteristics*. Proc. 11th Int. Conf. of IACMAG Turin.
- Matsuoka, H., Hoshikawa, T., e Ueno, K. (1990). *A general failure criterion and stress-strain relation for granular materials to metals*. Soils and Foundations, 30(2), pp. 119–127. https://doi.org/10.3208/sandf1972.30.2_119.
- Matsuoka, H. e Nakai, T. (1974). *Stress-deformation and strength characteristics of soil under three different principal stresses*. Proc. JSCE, 1974(232), pp. 59–70. https://doi.org/10.2208/jscej1969.1974.232_59.
- Matsuoka, H. e Nakai, T. (1985). *Relationship among Tresca, Mises, Mohr-Coulomb and Matsuoka-Nakai failure criteria*. Soils and Foundations, 25(4), pp. 123–128. https://doi.org/10.3208/sandf1972.25.4_123.
- Meyerhof, G. G. (1963). *Some recent research on the bearing capacity of foundations*. Canadian Geotechnical Journal, 1(1), pp. 16–26. <https://doi.org/10.1139/t63-003>.
- Meyerhof, G. G. e Hanna, A. M. (1978). *Ultimate bearing capacity of foundations on layered soils under inclined load*. Canadian Geotechnical Journal, 15(4), pp. 565–572. <https://doi.org/10.1139/t78-060>.
- Potts, D. M. e Gens, A. (1984). *The effect of the plastic potential in boundary value problems involving plane strain deformation*. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 8(3), pp. 259–286. <https://doi.org/10.1002/nag.1610080305>.
- Salgado, R. (2006). *The engineering of foundations*. McGraw-Hill Education (Europe).
- Smith, C. C. (2005). *Complete limiting stress solutions for the bearing capacity of strip footings on a mohr-coulomb soil*. Géotechnique, 55(8), pp. 607–612. <https://doi.org/10.1680/geot.2005.55.8.607>.
- Terzaghi, K. (1943). *Theoretical soil mechanics*. Wiley, New York. <https://doi.org/10.1002/9780470172766>.
- Vicente da Silva, M. e Antão, A. (2008). *Upper bound limit analysis with a parallel mixed finite element formulation*. International Journal of Solids and Structures, 45(22-23), pp. 5788–5804. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2008.06.012>.

- Vicente da Silva, M. e Antão, A. N. (2007). *A non-linear programming method approach for upper bound limit analysis*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 72(10), pp. 1192–1218. <https://doi.org/10.1002/nme.2061>.
- Vicente da Silva, M. e Antão, A. N. (2012). *A novel augmented lagrangian-based formulation for upper-bound limit analysis*. International Journal For Numerical Methods in Engineering, 89(12), pp. 1471–1496. <https://doi.org/10.1002/nme.3294>.
- Vicente da Silva, M., Deusdado, N., e Antão, A. (2020). *Lower and upper bound limit analysis via the alternating direction method of multipliers*. Computers and Geotechnics, 124, pp. 103571. <https://doi.org/10.1016/j.compgeo.2020.103571>.