

CÁLCULO DIRECTO DE IMPULSOS ESTÁTICOS E SÍSMICOS SOBRE ESTRUTURAS DE SUPORTE COM INCLINAÇÃO SUPERIOR À CRÍTICA

Direct calculation of static and seismic earth pressures applied on retaining structures with inclination greater than the critical value

Nuno Guerra^a

^aDep. de Eng. Civil, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa, Portugal

RESUMO – Para estruturas de suporte com inclinação do paramento superior a um determinado valor crítico, os impulsos activos não podem ser calculados directamente através das teorias de cálculo de impulsos clássicas, mas sim através de um procedimento que envolve a soma de duas forças (um peso de terras e um impulso activo, ambas afectadas por coeficientes sísmicos, quando esta acção é considerada). Para efeitos de projecto, pode ser útil o cálculo directo do impulso sobre o paramento das estruturas, replicando, com as devidas adaptações, o procedimento corrente válido para inclinações do paramento inferiores à inclinação crítica. Nesta Nota Técnica mostra-se como tais impulsos podem ser facilmente calculados e programados.

ABSTRACT – In retaining structures with a back inclined more than a certain critical value, active earth pressure coefficients can not be directly determined using the classic earth pressure theories. They should be determined using a procedure involving the sum of two forces (a soil weight and an active earth pressure force, both affected by seismic coefficients, when such action needs to be considered). For design purposes, the direct determination of the force acting on the back of the retaining structure may be useful, as it replicates, with the necessary adaptations, the usual procedure valid for inclinations of the back of the retaining wall less than the critical value. In this Technical Note, it is shown how such earth pressures can be easily determined and programmed.

Palavras Chave – impulsos activos, impulsos sísmicos, projecto de estruturas de suporte.

Keywords – active earth pressures, seismic earth pressures, design of retaining structures.

1 – INTRODUÇÃO

A determinação de impulsos activos considerando acções sísmicas é um assunto da Mecânica dos Solos clássica que continua a ser abordado em diversos estudos, alguns recentes (Koseki et al., 1998; Greco, 2001; Soubra e Macuh, 2002; Evangelista et al., 2010; Kim et al., 2010; Santana et al., 2010; Kloukinas e Mylonakis, 2011; Watanabe et al., 2011; Santana et al., 2013, 2022).

Contudo, o método clássico de equilíbrio limite de Coulomb (1776) e o método dele derivado conhecido como “método de Mononobe-Okabe”, que considera os efeitos sísmicos através de uma análise estática equivalente (Okabe, 1926; Mononobe e Matsuo, 1926), são os mais frequentemente usados para determinar impulsos activos em solos sem coesão em condições drenadas.

E-mail: nguerra@fct.unl.pt

ORCID: orcid.org/0000-0001-8380-9902

ISSN 0379-9522; e-ISSN 2184-8394 – Geotecnia n.º 163 – março/marzo/march 2025 – pp. 97-105
https://doi.org/10.14195/2184-8394_163_5 – © 2025 Sociedade Portuguesa de Geotecnia

Aliás, muitos dos métodos referidos recorrem a análises estáticas equivalentes, associadas a mecanismos mais ou menos complexos ou a resultados de cálculos numéricos. No entanto, conforme se mostrou em Guerra (2023), a partir de determinada inclinação crítica do paramento da estrutura de suporte, há solução exacta para o problema, pelo que, aceitando-se a validade das referidas análises estáticas equivalentes, não há razão para recorrer a metodologias mais complexas.

Tal solução exacta do impulso actuante no paramento da estrutura de suporte foi apresentada, no trabalho indicado, como a soma de duas forças (um peso e um impulso activo), ambas afectadas de coeficientes sísmicos. No entanto, por uma questão de facilidade de aplicação para efeitos de projecto, pode ser útil determinar directamente a acção sobre a estrutura de suporte, o que é possível fazer através de expressões relativamente simples e facilmente programáveis. É o que se demonstra e apresenta na presente Nota Técnica.

2 – O PROBLEMA

De uma forma resumida, pode colocar-se o problema da seguinte forma (Guerra, 2023):

- Para inclinação do paramento β_m (Figura 1) inferior ou igual a determinado valor crítico, β_c , dado por:

$$\beta_c = 180^\circ - \frac{1}{2} \left[\arcsen \frac{\sen \delta}{\sen \phi'} + \arcsen \frac{\sen(i + \theta)}{\sen \phi'} + \delta - i + \theta \right] \quad (1)$$

em que ϕ' é o ângulo de resistência ao corte do solo, δ é o ângulo de atrito solo-estrutura, i é a inclinação do terreno e θ é o ângulo de inércia sísmico, determinado a partir de coeficientes sísmicos k_h e k_v através de:

$$\theta = \arctg \frac{k_h}{1 \pm k_v} \quad (2)$$

os impulsos podem ser determinados através da teoria de Mononobe-Okabe (Okabe, 1926; Mononobe e Matsuo, 1926), em que o coeficiente K_a^{M1} (ver Figura 1) é determinado pela expressão seguinte, com $\beta = \beta_m$:

$$K_a^{M-O} = \frac{1}{\cos \theta} \left[\frac{\operatorname{cosec} \beta \sen(\beta + \theta - \phi')}{\sqrt{\sen(\beta + \theta + \delta)} + \sqrt{\frac{\sen(\phi' + \delta) \sen(\phi' - i - \theta)}{\sen(\beta - i)}}} \right]^2 \quad (3)$$

Como se sabe, para acção sísmica nula ($\theta = 0$ e $k_h = k_v = 0$), esta expressão reduz-se à teoria de Coulomb (1776), em particular à expressão do coeficiente de impulso activo de Müller-Breslau (1906).

- Para inclinação do paramento β_m superior ao valor crítico β_c , forma-se uma superfície de inclinação β_t (Figura 1), dada por:

$$\beta_t = 135^\circ - \frac{\phi'}{2} - \frac{1}{2} \left(\arcsen \frac{\sen(i + \theta)}{\sen \phi'} - i + \theta \right) \quad (4)$$

que separa a cunha de Coulomb da massa de solo que actua como que fazendo parte da estrutura de suporte. Esta massa de solo tem peso W_{M2} , pelo que a acção sobre a estrutura de suporte corresponde à soma de duas forças: a resultante das forças $k_h W_{M2}$ e $(1 \pm k_v) W_{M2}$, e o impulso I_a^{M2} , cujo coeficiente de impulso activo, K_a^{M2} , é determinado através da equação 3, nela fazendo $\delta = \phi'$ e $\beta = \beta_t$. Para acção sísmica nula, este procedimento mantém-se, naturalmente, válido, considerando-se $\theta = 0$ e $k_h = k_v = 0$. Quando β_m é superior a 90° , este caso

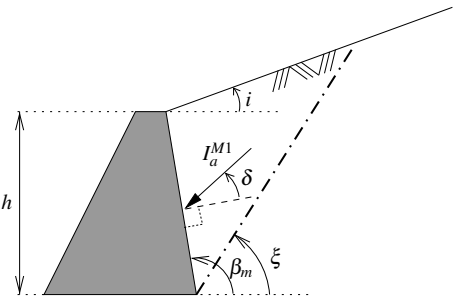
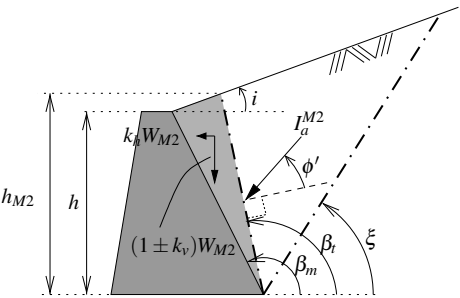
Para $\beta_m \leq \beta_c$ (com β_c determinado pela eq. 1):	
	$I_a^{M1} = \frac{1}{2} (1 \pm k_v) K_a^{M1} \gamma h^2$ $K_a^{M1} = K_{a,eq.3}^{M-O}(\phi'; \delta; i; \beta = \beta_m; \theta)$
Para $\beta_m > \beta_c$ (com β_c determinado pela eq. 1):	
	$I_a^{M2} = \frac{1}{2} (1 \pm k_v) K_a^{M2} \gamma h_{M2}^2$ $K_a^{M2} = K_{a,eq.3}^{M-O}(\phi'; \delta = \phi'; i; \beta = \beta_t; \theta)$ $\beta_t \text{ determinado pela eq. 4}$

Fig. 1 – Determinação de impulsos activos sobre estruturas de suporte (adaptado de Guerra, 2023).

pode ser abordado por um processo um pouco mais simples (Guerra, 2023), que não será aqui descrito dado que, estando limitado a essa situação, retiraria a generalidade do que se pretende mostrar no presente trabalho.

Pareceu, assim, ser interessante definir para o caso de $\beta_m > \beta_c$ a acção directamente sobre a estrutura de suporte, isto é, definir uma equação para o impulso I_{aw} que actua no paramento, e que será inclinado do ângulo δ_m com a normal à superfície (Figura 2). Este impulso é, portanto, a resultante das duas forças referidas, pelo que será discutível se se deve designá-lo como “impulso activo”. Corresponde, no entanto, à mobilização de um estado activo no tardo da superfície inclinada de β_t , pelo que, por facilidade, será representado por I_{aw} , com o w presente para lembrar que inclui o valor do peso W_{M2} (e as eventuais acções sísmicas nele actuates).

3 – DETERMINAÇÃO DA FORÇA ACTUANTE SOBRE O PARAMENTO

A força I_a^{M2} é, como se referiu, determinada através da expressão indicada na Figura 1 para a situação $\beta_m > \beta_c$, que depende de h_{M2} . Pode mostrar-se que esta altura pode ser dada por:

$$h_{M2} = h \frac{\tan \beta_t \tan i \cotg \beta_m - \tan \beta_t}{\tan i - \tan \beta_t} \quad (5)$$

pelo que:

$$I_a^{M2} = \frac{1}{2} K_a^{M2} \left[\frac{\tan \beta_t \tan i \cotg \beta_m - \tan \beta_t}{\tan i - \tan \beta_t} \right]^2 (1 \pm k_v) \gamma h^2 \quad (6)$$

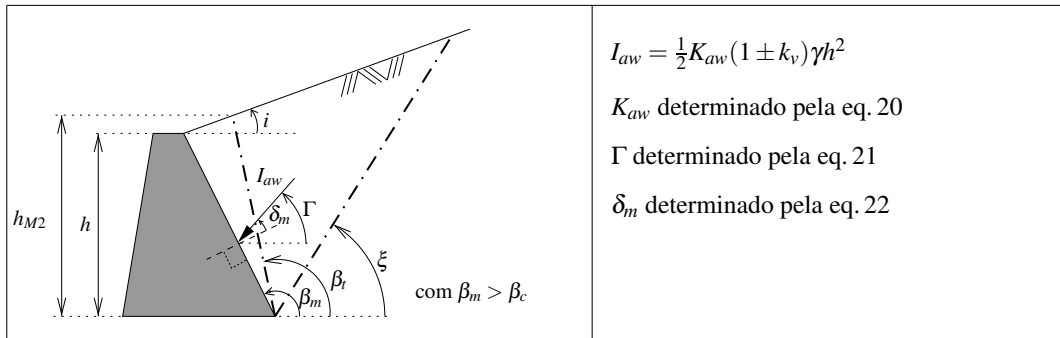


Fig. 2 – Impulsos sobre estruturas de suporte com inclinação superior à crítica ($\beta_m > \beta_c$).

sendo K_a^{M2} , como se viu, dado pela equação 3, ou seja:

$$K_a^{M2} = K_{a.eq.3}^{M-O}(\phi'; \delta = \phi'; i; \beta = \beta_i; \theta) \quad (7)$$

Se se definir C através de:

$$C = \left[\frac{\operatorname{tg} \beta_l \operatorname{tg} i \cotg \beta_m - \operatorname{tg} \beta_l}{\operatorname{tg} i - \operatorname{tg} \beta_l} \right]^2 K_{a,eq.3}^{M-O}(\phi'; \delta = \phi'; i; \beta = \beta_i; \theta) \quad (8)$$

as componentes horizontal e vertical de I_a^{M2} serão:

$$I_{ah}^{M2} = \frac{1}{2} C \sin(\phi' + \beta_t) (1 \pm k_v) \gamma h^2 \quad (9)$$

e

$$I_{av}^{M2} = -\frac{1}{2}C \cos(\phi' + \beta_t)(1 \pm k_v)\gamma h^2 \quad (10)$$

O peso W_{M2} pode obter-se através de:

$$W_{M2} = \frac{1}{2} \gamma h^2 \frac{\operatorname{tg} \beta_i \operatorname{tg} i \cotg \beta_m - \operatorname{tg} \beta_i}{\operatorname{tg} i - \operatorname{tg} \beta_i} (\cotg \beta_i - \cotg \beta_m) \quad (11)$$

pelo que, definindo-se J como:

$$J = \frac{\operatorname{tg} \beta_l \operatorname{tg} i \cotg \beta_m - \operatorname{tg} \beta_l}{\operatorname{tg} i - \operatorname{tg} \beta_l} (\cotg \beta_l - \cotg \beta_m) \quad (12)$$

se W_s for a resultante de W_{M2} e das acções sísmicas nela actuantes, ter-se-á que as suas componentes horizontal e vertical serão:

$$W_{sh} = k_h W_{M2} = \frac{1}{2}(1 \pm k_v) \gamma h^2 J \tan \theta \quad (13)$$

$$W_{sv} = (1 \pm k_v)W_{M2} = \frac{1}{\gamma}(1 \pm k_v)\gamma h^2 J \quad (14)$$

a: A acção total sobre a estrutura de suporte terá, portanto, componentes horizontal e vertical iguais

$$I_{awh} = I_{gh}^{M2} + W_{sh} \quad (15)$$

e

$$I_{awv} = I_{av}^{M2} + W_{sv} \quad (16)$$

que resultam, respectivamente, em:

$$I_{awh} = \frac{1}{2}(1 \pm k_v)\gamma h^2 [C \sin(\phi' + \beta_t) + J \operatorname{tg} \theta] \quad (17)$$

e

$$I_{awv} = \frac{1}{2}(1 \pm k_v)\gamma h^2 [-C \cos(\phi' + \beta_t) + J] \quad (18)$$

A força I_{aw} pode, assim, ser escrita através de:

$$I_{aw} = \frac{1}{2}K_{aw}(1 \pm k_v)\gamma h^2 \quad (19)$$

com K_{aw} dado por:

$$K_{aw} = \sqrt{C^2 + 2CJ[\sin(\phi' + \beta_t) \operatorname{tg} \theta - \cos(\phi' + \beta_t)] + J^2(1 + \operatorname{tg}^2 \theta)} \quad (20)$$

O ângulo Γ que aquela força faz com a horizontal será:

$$\Gamma = \operatorname{arctg} \left[\frac{-C \cos(\phi' + \beta_t) + J}{C \sin(\phi' + \beta_t) + J \operatorname{tg} \theta} \right] \quad (21)$$

pelo que o ângulo δ_m será:

$$\delta_m = \Gamma - \beta_m + 90^\circ \quad (22)$$

Este ângulo corresponde ao ângulo de atrito solo-estrutura mobilizado e deverá, portanto, ser inferior ou igual a δ .

4 – PROCEDIMENTO PROPOSTO PARA O CÁLCULO DO IMPULSO

Em resumo:

- Se $\beta_m \leq \beta_c$, o impulso sobre a estrutura é o activo e pode ser calculado através do método de Mononobe-Okabe:

$$I_a^{M1} = \frac{1}{2}K_a^{M1}\gamma h^2 \quad (23)$$

com K_a^{M1} determinado a partir da equação 3:

$$K_a^{M1} = K_{a,eq.3}^{M-O}(\phi'; \delta; i; \beta = \beta_m; \theta) \quad (24)$$

Este impulso faz com a normal ao paramento o ângulo δ .

- Se $\beta_m > \beta_c$, o impulso sobre a estrutura é I_{aw} , dado pela equação 19, determinado com o valor de K_{aw} dado pela equação 20, que por sua vez depende de C e de J , dados pelas equações 8 e 12. Este impulso fará com a normal ao paramento um ângulo δ_m , dado pela equação 22, que depende de Γ (equação 21).

5 – EXEMPLOS. DISCUSSÃO

Considere-se o caso de $\phi' = 30^\circ$, $i/\phi' = 1/3$, $\theta/\phi' = 0,6$ e dois valores de δ/ϕ' : $2/3$ e 1 . Analise-se brevemente como varia a relação entre os coeficientes de impulso K_{ah} e K_{av} (no caso de $\beta_m \leq \beta_c$) e entre K_{awh} e K_{awv} (no caso de $\beta_m > \beta_c$). Maiores valores desta relação, conforme discutido

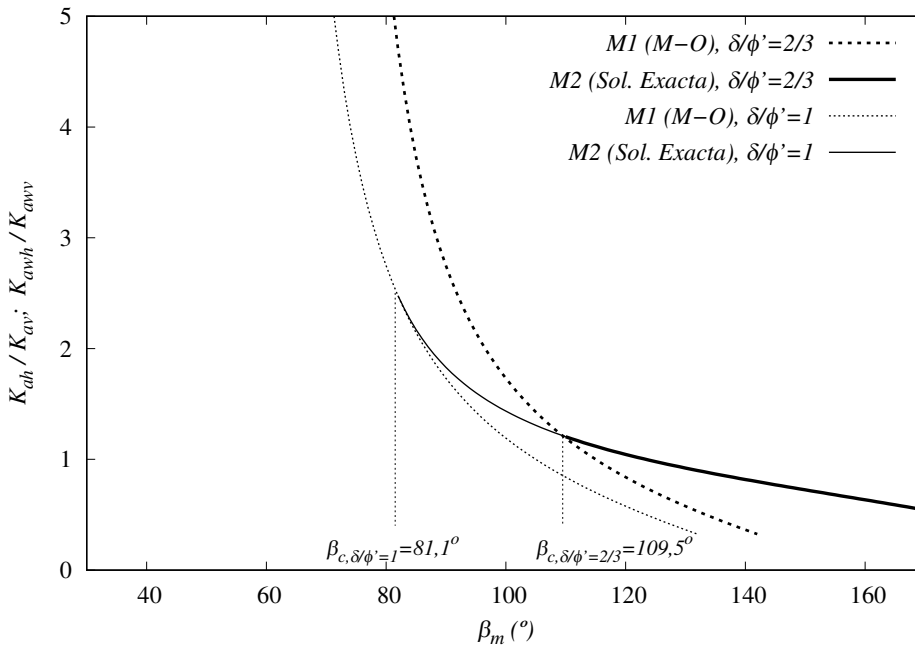
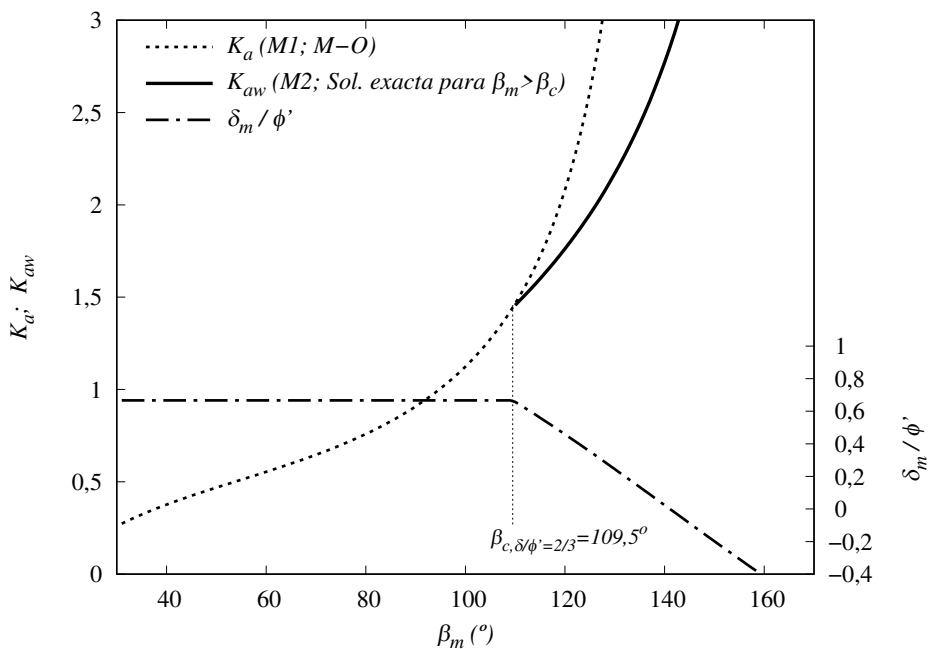


Fig. 3 – Caso $\phi' = 30^\circ$, $i/\phi' = 1/3$, $\theta/\phi' = 0,6$ e dois valores da relação δ/ϕ' ($2/3$ e 1): relação entre as acções horizontal e vertical sobre a estrutura de suporte em função da inclinação do paramento.

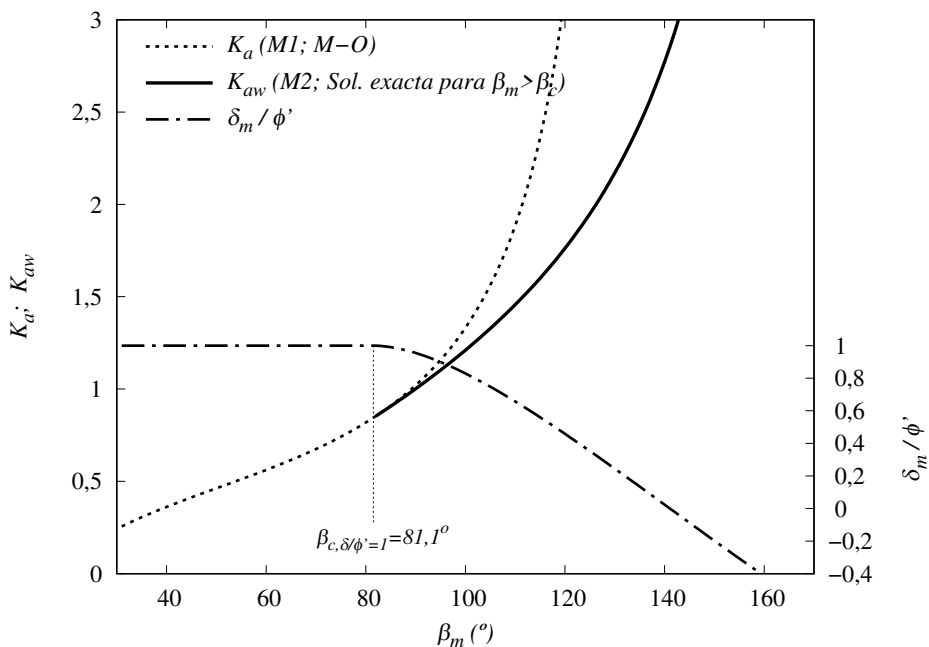
em maior detalhe em Guerra (2023), traduzem acções mais gravosas para a estrutura de suporte. A Figura 3 permite verificá-lo: para valores de β_m superiores ao valor crítico, a relação K_{ah}/K_{av} obtida de M1 (aplicação directa do método de Mononobe-Okabe) é inferior à relação K_{awh}/K_{awv} obtida de M2, o que significa que a segunda se torna a condicionante (e, na realidade, como se referiu, corresponde à solução exacta), pelo que o uso de M1 para estas situações é contra a segurança.

O exemplo tratado na Figura 3 permite ainda observar que a solução M2 corresponde a uma linha contínua independente de δ , tornando-se a condicionante (e exacta) quando os valores da relação entre os referidos coeficientes ultrapassam os de M1, o que ocorre para valores de β_c que, esses sim, dependem de δ . Veja-se ainda que, para o caso em estudo e para $\delta/\phi' = 1$, o ângulo β_c é inferior a 90° .

Analise-se agora o problema na perspectiva dos valores de K_{aw} (e K_a) e de δ_m . A Figura 4 representa estes valores, para o exemplo referido, em função da inclinação do paramento da estrutura de suporte. A análise da figura referida permite constatar que a partir do ângulo de inclinação crítico, β_c , o coeficiente de impulso K_{aw} (obtido de M2) é inferior a K_a (obtido de M1), apesar de, como se viu, a partir deste ângulo o primeiro conduzir a resultados mais gravosos para a estrutura. A análise dos resultados das relações δ_m/ϕ' permite compreender, na sua essência, o que justifica isto. Com efeito, para inclinações do paramento inferiores à crítica, a metodologia considerada, a tradicional (método de Mononobe-Okabe), assume a mobilização total do atrito solo-estrutura (pelo que $\delta_m = \delta$), mas, para inclinações superiores o atrito não fica completamente mobilizado, reduzindo-se significativamente, verificando-se mesmo, para valores extremos de β_m , a mobilização de valores negativos de δ_m . Esta redução do atrito mobilizado está, assim, ligada ao aumento da relação K_{awh}/K_{awv} , apesar de K_{aw} assumir valores mais baixos do que K_a .



(a) $\delta/\phi' = 2/3$



(b) $\delta/\phi' = 1$

Fig. 4 – Caso $\phi' = 30^\circ$, $i/\phi' = 1/3$, $\theta/\phi' = 0,6$ e dois valores da relação δ/ϕ' ($2/3$ e 1): valores dos coeficientes de impulso e do ângulo de atrito solo-estrutura mobilizado.

6 – OBSERVAÇÕES

Para a maioria das situações, o ângulo de inclinação do paramento da estrutura de suporte será inferior ao ângulo de atrito crítico. Nesses casos, o recurso ao método de Mononobe-Okabe, conforme referido na secção 4, será adequado. Mas, como se viu, há casos em que a inclinação crítica assume valores relativamente baixos (em algumas situações mesmo inferiores a 90°), pelo que o recurso ao procedimento indicado como $M2$, que aliás fornece a solução exacta para estas circunstâncias, se torna necessário. Estes casos são, principalmente, os de ângulos de atrito solo-estrutura elevados, inclinações elevadas e acções sísmicas elevadas.

Constitui prática corrente o cálculo de impulsos activos sob acções sísmicas com limitação do ângulo de atrito solo-estrutura a $2/3$ do ângulo de resistência ao corte (NP EN 1998-5, 2010). Tal limitação reduz substancialmente o número de casos em que o procedimento $M2$ se torne necessário. O assunto é, ainda assim, particularmente relevante no caso do dimensionamento de muros de gabões ou de outras estruturas do mesmo tipo em que o que esteja em causa para o cálculo de impulsos seja o atrito solo-solo. Nestes casos, pretendendo-se considerar tal valor, a necessidade de recorrer ao procedimento $M2$ será frequente.

Pode mostrar-se que, considerando-se o impulso I_a^{M2} aplicado a $1/3$ de h_{M2} (Figura 1) e estando W_{M2} aplicado no centro de massa do volume de solo com secção triangular, o impulso I_{aw} estará aplicado no paramento a $1/3$ de h . Sugere-se, no entanto, seguir-se também para o procedimento $M2$ a prática corrente aplicada quando o procedimento $M1$ é adequado, que consiste em considerar a um terço da altura o impulso estático e a meia-altura o acréscimo de impulso sísmico (NP EN 1998-5, 2010).

7 – CONCLUSÕES

Recordou-se que a partir de determinado valor de inclinação crítica do paramento de uma estrutura de suporte, os métodos clássicos de cálculo dos impulsos activos deixam de ser válidos e que o assunto é especialmente relevante para valores elevados do ângulo de atrito solo-estrutura, da inclinação do terreno e do ângulo de inércia sísmico.

Procurou mostrar-se que é relativamente simples determinar directamente o impulso de terras actuante sobre uma estrutura de suporte quando no seu tardo se mobiliza um estado activo mesmo quando a inclinação do paramento é superior ao valor crítico. Propuseram-se, assim expressões de utilização simples, facilmente programáveis, para calcular estes impulsos.

Mostrou-se ainda que, no caso referido, a mobilização do atrito solo-estrutura deixa de ser completa, a isso estando associado uma acção mais gravosa.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Coulomb, C. A. (1776). *Essai sur une application des règles des maximis et minimis à quelques problèmes de statique relatifs à l'architecture*. Mem. Acad. Roy., 7, p. 38.
- Evangelista, A.; Scotto di Santolo, A.; Simonelli, A. L. (2010). *Evaluation of pseudostatic active earth pressure coefficient of cantilever retaining walls*. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 30(11), pp. 1119–1128. <https://doi.org/10.1016/j.soildyn.2010.06.018>.
- Greco, V. R. (2001). *Active thrust on cantilever walls with short heel*. Canadian Geotechnical Journal, 38(2), pp. 401–409. <https://doi.org/10.1139/t00-094>.
- Guerra, N. (2023). *Nota sobre o cálculo de impulsos activos sísmicos*. Geotecnia, 159, pp. 67–80. https://doi.org/10.14195/2184-8394_159_4.

- Kim, W.-C.; Park, D.; Kim, B. (2010). *Development of a generalised formula for dynamic active earth pressure*. Géotechnique, 60(9), pp. 723–727. <https://doi.org/10.1680/geot.09.T.001>.
- Kloukinas, P.; Mylonakis, G. (2011). *Analysis of seismic earth pressures: some recent developments*. Proceedings of the ERTC-12 Workshop on evaluation of EC-8, XV European Conference on Soil Mechanics and Geotechnical Engineering, Athens, Greece.
- Koseki, J.; Tatsuoka, F.; Munaf, Y.; Tateyama, M.; Kojima, K. (1998). *A modified procedure to evaluate active earth pressure at high seismic loads*. Soils and Foundations, Special Issue, pp. 209–216. https://doi.org/10.3208/sandf.38.Special_209.
- Mononobe, N.; Matsuo, H. (1926). *On the determination of earth pressures during earthquakes*. Proceedings of the World Engineering Conference, volume 9, pp. 177–185. Em japonês; obra não consultada directamente.
- Müller-Breslau, H. (1906). *Erddruck auf Stützmauern*. Kroener, Stuttgart. Em alemão; obra não consultada directamente.
- NP EN 1998-5 (2010). *Eurocódigo 8, Projecto de estruturas para resistência aos sismos. Parte 5: Fundações, estruturas de suporte e aspectos geotécnicos*. CT115, Instituto Português da Qualidade.
- Okabe, S. (1926). *General theory of earth pressure*. Journal of the Japanese Society of Civil Engineers, 12(1), pp. 123–134. Em japonês; obra não consultada directamente.
- Santana, M. T.; Antão, A. N.; Vicente da Silva, M.; Guerra, N. M. C. (2010). *Determinação de impulsos sísmicos com recurso à implementação numérica do teorema cinemático*. V Congresso Luso-Brasileiro de Geotecnia, Gramado, Brasil, 19-22 Agosto. Publicado em CD.
- Santana, T.; Antão, A.; Guerra, N.; Vicente da Silva, M. (2022). *Upper bounds for the three-dimensional seismic active earth pressure coefficients*. Geotechnique Letters, 13(1), pp. 1–10. <https://doi.org/10.1680/jgele.22.00096>.
- Santana, T.; Guerra, N. M. C.; Antão, A. N.; Vicente da Silva, M. (2013). *Three-dimensional seismic active earth pressure coefficients using upper bound numerical limit analysis: a few preliminary results*. Proceedings of the 18th International Conference on Soil Mechanics and Geotechnical Engineering, Challenges and Innovations in Geotechnics, pp. 1579–1582, Paris. Presses des Ponts. <https://www.issmge.org/uploads/publications/1/2/1579-1582.pdf>.
- Soubra, A. H.; Macuh, B. (2002). *Active and passive earth pressure coefficients by a kinematical approach*. Geotechnical Engineering, 155(2), pp. 119–131. <https://doi.org/10.1680/geng.2002.155.2.119>.
- Watanabe, K.; Koseki, J.; Tateyama, M. (2011). *Seismic earth pressure exerted on retaining walls under a large seismic load*. Soils and Foundations, 51(3), pp. 379–394. <https://doi.org/10.3208/sandf.51.379>.