

MECANISMOS DE ROTURA DE FUNDAÇÕES SUPERFICIAIS PARA O CÁLCULO DE VALORES CARACTERÍSTICOS DOS PARÂMETROS RESISTENTES DO SOLO

Collapse mechanisms of shallow foundations towards the calculation of the characteristic values of soil strength parameters

Nuno Guerra^a, Armando Antão^b, Teresa Santana^a, Manuel Matos Fernandes^c,
Mário Vicente da Silva^b

^a Dep. de Eng. Civil, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa, Portugal

^b CERIS, Dep. de Eng. Civil, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa, Portugal

^c Dep. de Eng. Civil, Faculdade de Engenharia, Universidade do Porto, Porto, Portugal

RESUMO – Os valores característicos das propriedades do terreno podem ser, como casos limite, estimativas do valor médio, se o estado limite em causa não for sensível à variabilidade espacial, ou estimativas de um valor inferior, se o estado limite em causa o for. A sensibilidade à variabilidade espacial depende da dimensão do mecanismo de rotura. Para efeitos de projecto parece razoável considerar o mecanismo correspondente ao caso de solo homogéneo. No presente trabalho obtém-se numericamente os mecanismos de rotura associados a fundações superficiais, considerando diversos ângulos de resistência ao corte (admitindo condições drenadas) e diversas profundidades da fundação (admitindo condições drenadas e não drenadas) e apresentam-se os valores das suas profundidade e extensão lateral. Recorre-se ao programa *mechpy*, desenvolvido no DEC-FCT/UNL, que permite determinar numericamente as cargas de colapso com base nos teoremas estático e cinemático.

ABSTRACT – The characteristic values of soil strength parameters can be, as limiting cases, estimates of the mean value, if the limit state in question is not sensitive to spatial variability, or estimates of a lower value, if the limit state in question is sensitive to spatial variability. The sensitivity to spatial variability will depend on the size of the failure mechanism. For design purposes it seems reasonable to consider the mechanism corresponding to the case of homogeneous soil. In this work, the failure mechanisms associated with shallow foundations are numerically obtained, considering various values of the angle of shearing strength (assuming drained conditions) and various foundation depths (assuming drained and undrained conditions), and the values of their depth and lateral extent are presented. The *mechpy* program, developed in DEC-FCT/UNL, is used. It allows the numerical determination of collapse loads based on the static and kinematic theorems.

Palavras Chave – fundações superficiais, mecanismos de colapso, valores característicos das propriedades do terreno.

Keywords – shallow foundations, collapse mechanisms, characteristic values of the ground properties.

E-mail: nguerra@fct.unl.pt (N. Guerra), amna@fct.unl.pt (A. Antão), mtgs@fct.unl.pt (T. Santana),
mfern@fe.up.pt (M. Matos Fernandes), mjvs@fct.unl.pt (M. Vicente da Silva)

ORCID: orcid.org/0000-0001-8380-9902 (N. Guerra), orcid.org/0000-0003-2835-2780 (A. Antão),
orcid.org/0000-0002-1691-8153 (T. Santana), orcid.org/0000-0003-2661-9357 (M. Matos Fernandes),
orcid.org/0000-0003-0800-6979 (M. Vicente da Silva)

1 – INTRODUÇÃO

O cálculo tradicional da capacidade resistente ao carregamento vertical de fundações superficiais em solos respondendo em condições drenadas é habitualmente realizado admitindo a sobreposição de efeitos que consideram mecanismos diferentes. Por um lado, o efeito na capacidade resistente do peso do solo abaixo do plano da fundação é determinado sem considerar qualquer sobrecarga motivada pelo peso do solo acima desse plano, a tal correspondendo um dado mecanismo. Por outro, os efeitos dessa sobrecarga e da eventual coesão efectiva são determinados admitindo que o peso do solo abaixo do plano da base da fundação é nulo e sem considerar directamente a resistência do solo acima de tal plano, e a esse efeito corresponde um mecanismo diferente, que envolve um volume de solo substancialmente maior do que o primeiro. O mecanismo de rotura real corresponderá, assim, a um mecanismo intermédio dos dois, mas ainda corrigido do efeito produzido pela existência de solo resistente acima do plano referido. Este último aspecto é também relevante no caso da resposta não drenada do terreno de fundação.

O conhecimento do mecanismo de rotura assume particular importância actualmente, em especial no que diz respeito à sua profundidade. Com efeito, a actual tendência (Orr et al., 2025) é a de que os *valores representativos* das propriedades dos terrenos (em particular das propriedades resistentes), isto é, dos valores sobre os quais são aplicados os coeficientes parciais dos materiais ou com os quais são calculadas as resistências a minorar com coeficientes parciais destas grandezas, sejam os *valores característicos*, em substituição dos agora designados *valores nominais*. Os *valores característicos* são determinados através de procedimentos estatísticos, e os *valores nominais* são resultado de uma interpretação subjectiva dos dados de caracterização disponíveis. A preferência pelos valores característicos veio reforçar a ideia de que os valores representativos podem ser, como casos limite, estimativas cautelosas do valor médio, se o estado limite em causa não for sensível à variabilidade espacial, ou estimativas de um valor inferior, se o estado limite em causa for sensível a tal variabilidade.

A maior ou menor sensibilidade à variabilidade espacial depende da dimensão do mecanismo de rotura. Tal mecanismo depende, ele próprio, da variabilidade do terreno, mas para efeitos de projecto parece razoável considerar o mecanismo correspondente ao caso de solo homogéneo. Assim, no presente trabalho, obtém-se numericamente os mecanismos de rotura de fundações superficiais associados a diversos ângulos de resistência ao corte (admitindo condições drenadas) e a diversas profundidades da fundação (admitindo condições drenadas e não drenadas) e apresentam-se os valores da sua profundidade e extensão lateral. Recorre-se ao programa *mechpy*, desenvolvido no Departamento de Engenharia Civil da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa (Vicente da Silva e Antão, 2008; Antão et al., 2012), que, através do método dos elementos finitos, permite determinar cargas de colapso usando os teoremas estático e cinemático da análise limite.

2 – COLOCAÇÃO DO PROBLEMA

Admitindo a determinação de valores característicos de propriedades resistentes (usando, como se referiu, procedimentos estatísticos), há que calcular o valor médio e determinar ou conhecer previamente o coeficiente de variação dessa propriedade ($\text{tg } \phi'$ ou c_u , por exemplo), aqui designada por X : X_m e V_X . Admitindo uma distribuição Normal para a variável em causa, o valor característico será, então, dado por:

$$X_k = X_m (1 - k_n V_X) \quad (1)$$

em que k_n é um coeficiente que depende do número de valores que conduziram à determinação de X_m , do nível de conhecimento que se admite ter para V_X e do índice de sensibilidade à variabilidade

espacial, Γ^2 , e pode ser determinado por (Vanmarcke, 1977):

$$k_n = [N_{95} \text{ ou } t_{95}^{n-1}] \sqrt{\Gamma^2 + \frac{1}{n}} \quad (2)$$

onde N_{95} é o parâmetro, igual a 1,645, correspondente ao percentil 95% da distribuição Normal, a utilizar quando se considera V_X previamente conhecido ou assumido; t_{95}^{n-1} é o parâmetro correspondente ao percentil 95% da distribuição t-Student, para $n - 1$ graus de liberdade, a utilizar quando se considera V_X desconhecido previamente (determinado, portanto, a partir dos dados de caracterização); e Γ^2 é dado pela equação (Vanmarcke, 1977):

$$\Gamma^2 = \theta / \ell \quad (3)$$

em que θ é a escala de flutuação, que é a distância máxima a que uma propriedade do solo se correlaciona, e ℓ é a extensão do volume de solo envolvido no mecanismo de rotura. Nos solos sedimentares, o valor de θ na direcção vertical é substancialmente menor do que na direcção horizontal, pelo que é a extensão do mecanismo nessa direcção que será relevante para a determinação do índice de sensibilidade.

Nas situação limite em que ℓ é muito superior a θ , Γ^2 pode ser considerado nulo, e o valor característico torna-se uma estimativa do valor médio. No caso oposto, em que ℓ seja muito próximo de θ , Γ^2 é próximo da unidade, sendo nestas condições o valor característico uma estimativa do valor correspondente ao quantil 5%. Outros casos intermédios podem ser considerados, dependendo da relação θ/ℓ .

Pelo referido, pretende-se, assim, determinar a extensão dos mecanismos de colapso para casos simples de fundações superficiais. Para tal, procede-se à determinação de cargas de rotura de fundações superficiais através do programa *mechpy*, usando a implementação do teorema cinemático nele programada, dado ser esta implementação, por oposição à do teorema estático, também disponível, a mais adequada à obtenção de mecanismos.

O problema em estudo encontra-se esquematicamente representado na Figura 1. Trata-se de uma fundação superficial, corrida, de largura B , sujeita a carregamento vertical e centrado, em solo com peso volúmico total γ , respondendo em condições drenadas com ângulo de resistência ao corte ϕ' e coesão efectiva nula, ou em condições não drenadas, com resistência não drenada c_u admitida constante em profundidade. No Caso 1 indicado na figura o solo acima do plano da base da fundação é considerado através de uma sobrecarga q . No Caso 2 o referido solo é explicitamente modelado. No Caso 3, o solo acima do plano da base da fundação é também explicitamente modelado. e o solo abaixo deste plano coincide com o nível freático, e é admitido com um peso volúmico total, γ , tal que o seu peso volúmico submerso seja $\gamma' = \gamma/2$; para este caso é apenas considerada a resposta drenada do terreno, dado que a não drenada admite sempre o solo saturado, a análise é feita em tensões totais e o modelo a aplicar corresponde ao do Caso 2.

A capacidade resistente em condições drenadas de uma fundação superficial deste tipo é habitualmente calculada considerando o Caso 1 da Figura 1 usando a equação:

$$q_r = 0,5\gamma BN_\gamma + qN_q \quad (4)$$

em que N_γ e N_q são factores de capacidade resistente, dependentes de ϕ' . Esta expressão, como referido, é aproximada, porque a primeira parcela é obtida considerando que não há solo acima do plano da fundação (fazendo $q = 0$), e a segunda considerando apenas q e admitindo que o solo abaixo do plano da fundação não tem peso. Para N_q há solução exacta, sendo esta dada por:

$$N_q^{EX} = \text{tg}^2 \left(45^\circ + \frac{\phi'}{2} \right) e^{\pi \text{tg} \phi'} \quad (5)$$

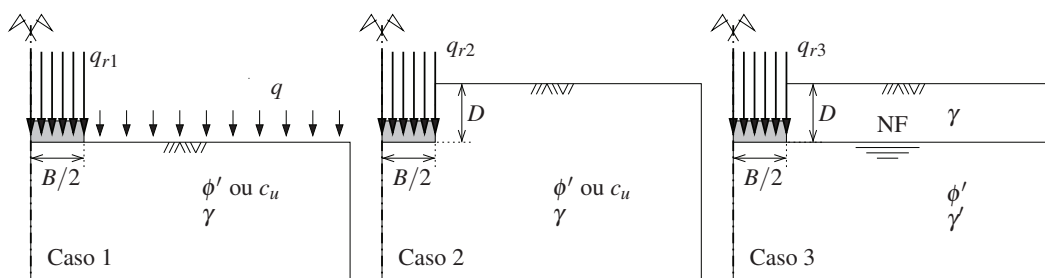


Fig. 1 – Problema em estudo. O Caso 1, à esquerda, admite que o solo acima da base da fundação é substituído apenas pelo seu peso, através de uma sobrecarga de valor q ; no Caso 2, ao centro, esse solo é explicitamente modelado; no Caso 3, à direita, esse solo é também explicitamente modelado, admitindo-se a presença de um nível freático coincidente com a base da fundação e que $\gamma' = \gamma/2$.

Para N_γ não há solução exacta, mas a melhor solução conhecida é devida a Martin (2005), que publicou em tabela os valores que obteve. Como também se referiu, os mecanismos correspondentes às duas parcelas são diferentes, sendo conhecido o mecanismo (exacto) correspondente a N_q .

A resistência do solo acima do plano de fundação (Casos 2 e 3 da Figura 1, com aquele plano à profundidade D) é habitualmente considerada através de um factor correctivo d_q , que multiplica a segunda parcela da equação 4. No presente trabalho, seguindo o anteriormente considerado por Antão et al. (2010), considerar-se-á um factor correctivo d_q^* , que pretende corrigir a expressão para ter em atenção tanto este aspecto como o da sobreposição de efeitos que a simples soma das duas parcelas não permite considerar. Dado que d_q^* tem em conta ambos os aspectos, não é comparável com as diversas propostas para d_q existentes na literatura. O solo acima do plano de fundação é considerado, no presente trabalho, idêntico ao restante solo.

A capacidade resistente em condições não drenadas é igualmente calculada considerando o Caso 1 da Figura 1, sendo dada por:

$$q_r = N_c c_u + q, \quad \text{com } N_c = 2 + \pi \quad (6)$$

Nas condições do Caso 1, esta equação é exacta e o mecanismo é conhecido e independente do valor de q , mas a consideração da resistência do solo acima da fundação (Caso 2) é feita através de um factor correctivo d_c , que afecta a primeira parcela, e tal resistência altera, naturalmente, o mecanismo. Tal como em condições drenadas, o solo acima do plano da fundação é igualmente considerado idêntico ao restante solo.

Pretende-se, portanto, determinar numericamente as capacidades resistentes correspondentes aos Casos 1, 2 e 3, em condições drenadas para vários valores de ϕ' e em condições não drenadas (Casos 1 e 2), para a obtenção dos mecanismos de colapso, e secundariamente para determinação dos factores d_q^* e d_c .

3 – VALIDAÇÃO

Para validação do procedimento, aplicou-se inicialmente o programa *mechpy* à determinação das soluções conhecidas. Em condições não drenadas, determinou-se a capacidade resistente considerando o Caso 1 e $q = 0$, tendo-se obtido um valor de q_r/c_u de 5,14666, que é apenas 0,09% superior ao valor exacto $N_c = 2 + \pi$ (equação 6). O cálculo deste caso e dos restantes passou por um processo de refinamento automático consistindo numa malha inicial e três etapas de refinamento. Na Figura 2 à esquerda representa-se a malha inicial gerada para o caso em análise, e ao centro mostra-se a malha final.

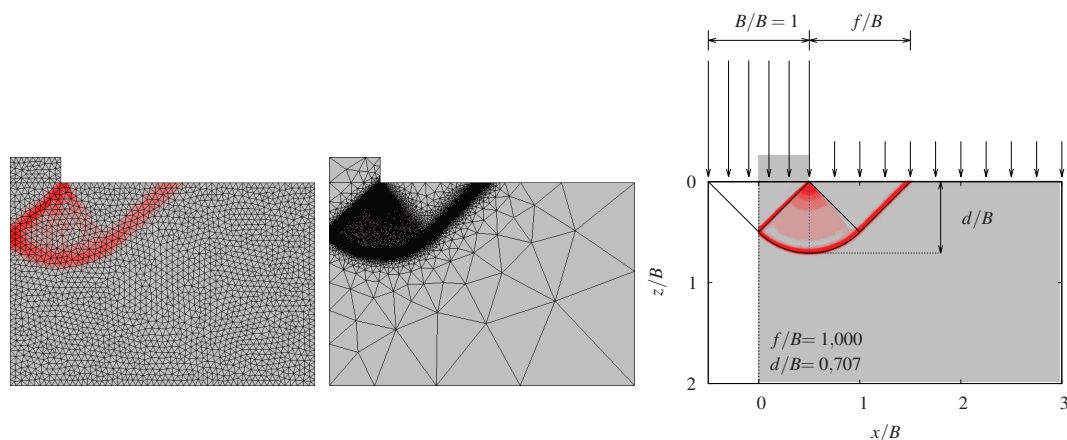


Fig. 2 – Determinação do factor de capacidade resistente N_c , admitindo resposta não drenada do solo: malhas inicial (c. 4000 elementos finitos; à esquerda) e final (c. 32000 elementos finitos; ao centro); comparação entre o mecanismo exacto, representado a negro, e o que se infere das manchas dos incrementos de deformação plástica obtidos do programa *mechpy*, representados a vermelho (à direita).

Dos cálculos realizados pode inferir-se os mecanismos a partir dos valores dos incrementos de deformação plástica. Na Figura 2 à direita sobrepõe-se as manchas de tais incrementos obtidas para a última etapa de refinamento ao mecanismo exacto teórico que, neste caso, tem uma profundidade adimensional d/B contada a partir da base da fundação igual a $\sqrt{2}/2$ e uma extensão lateral f/B , medida na superfície do terreno e a partir da extremidade da sapata, de 1. Pode concluir-se, da observação da figura, que o mecanismo calculado e o teórico são, do ponto de vista prático, coincidentes.

Em condições drenadas procedeu-se ao cálculo do factor de capacidade resistente N_q para diferentes valores de ϕ' . Os resultados obtidos estão representados na Figura 3. Procedeu-se igualmente ao cálculo do factor de capacidade resistente N_γ , também representado na figura. Verifica-se a sobreposição dos valores calculados com a solução exacta de N_q (equação 5) e com a solução de Martin (2005) para N_γ .

Sendo conhecidos os mecanismos (exactos) associados ao factor N_q , compara-se na Figura 4 tais mecanismos com os obtidos para quatro valores do ângulo de resistência ao corte. Pode igualmente constatar-se a sua clara sobreposição.

Em conclusão, os resultados dos cálculos realizados mostram que os valores obtidos para os parâmetros N_c , N_q e N_γ coincidem, do ponto de vista prático, com as soluções exactas (casos de N_c e N_q) ou com as melhores soluções conhecidas (caso de N_γ). Mostram igualmente que os mecanismos obtidos correspondem aos teóricos (casos de N_c e N_q), para as situações em que estes são válidos. Deste modo, apresentam-se em seguida os resultados obtidos dos cálculos realizados para os casos que se pretendem analisar, para os quais não existem soluções teóricas exactas.

4 – RESULTADOS

4.1 – Condições não drenadas

Para diferentes valores de D procedeu-se à determinação das capacidades resistentes q_{r2} (Figura 1, Caso 2), admitindo a resposta não drenada do solo (como referido, para o Caso 1 da mesma figura o mecanismo é independente de q). Determinou-se, então, para cada valor de D , o parâmetro

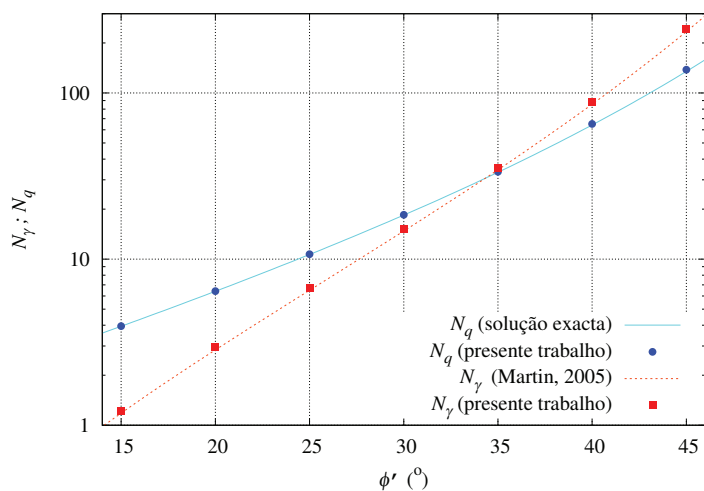


Fig. 3 – Determinação do factor de capacidade resistente N_q ($\gamma = 0$ e $q \neq 0$) e N_γ ($\gamma \neq 0$ e $q = 0$): comparação com soluções conhecidas.

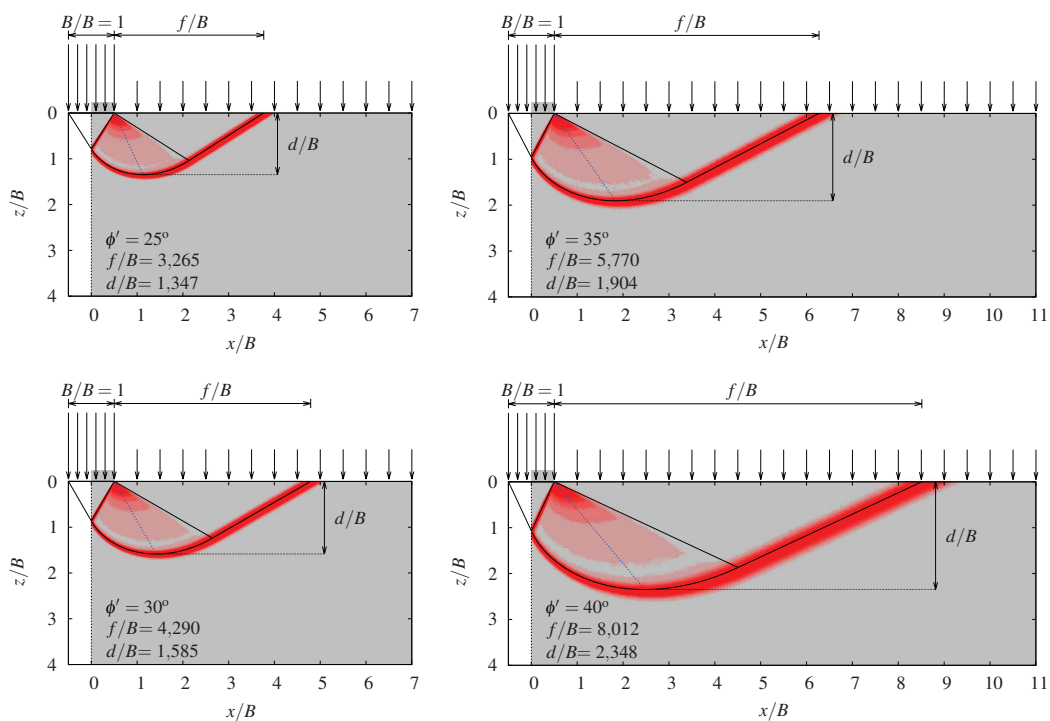


Fig. 4 – Determinação do factor de capacidade resistente N_q ($\gamma = 0$ e $q \neq 0$): comparação entre os mecanismos exactos (representados a negro) e os que se inferem das manchas dos incrementos de deformação plástica dos cálculos FELA, obtidos do programa *mechpy* (representados a vermelho).

d_c , através de:

$$d_c = \frac{q_{r2} - q}{N_c c_u} \quad (7)$$

Os resultados obtidos estão representados na Figura 5a, nela mostrando-se igualmente, como referência, os valores clássicos propostos por Skempton (1951).

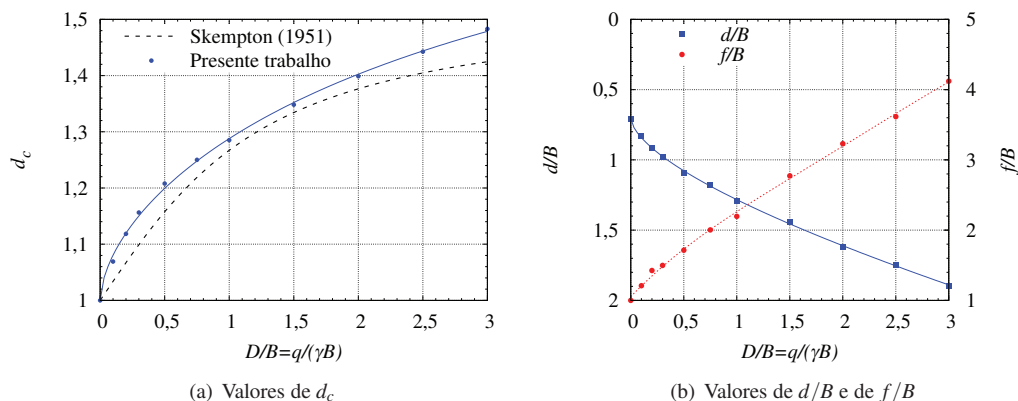


Fig. 5 – Valores de d_c (a) e de f/B e d/B (b) obtidos dos cálculos realizados admitindo condições não drenadas, para o Caso 2.

Na Figura 5b representa-se os valores de f/B e de d/B , obtidos a partir dos mecanismos inferidos das manchas de deformação plástica. A Figura 6 inclui estas manchas, para quatro relações D/B : 0 (que corresponde ao Caso 1), 0,5, 1 e 2 (Caso 2). A figura inclui também a definição de f e d (indicada na figura para $D/B = 1$) para o Caso 2 (a do Caso 1 foi já definida nas Figuras 2 e 4).

A análise da Figura 6 permite constatar de forma fisicamente mais clara o resultado que também pode ser lido no gráfico da Figura 5(b): a muito significativa influência da relação D/B na dimensão do mecanismo, especialmente no que respeita ao valor de f , mas igualmente em relação a d .

4.2 – Condições drenadas

Contrariamente ao que acontece em condições não drenadas, em condições drenadas os mecanismos correspondentes ao Caso 1 são afectados pelo valor de q . Apresenta-se, assim, nesta secção, os resultados dos valores adimensionais f/B e d/B para os Casos 1, 2 e 3. Os valores do factor correctivo d_q^* , para o Caso 2, são obtidos através de:

$$d_q^* = \frac{q_{r2} - 0,5\gamma B N_\gamma}{q N_q} = \frac{q_{r2} - 0,5\gamma B N_\gamma}{\gamma D N_q} \quad (8)$$

e para o Caso 3 através de:

$$d_q^* = \frac{q_{r3} - 0,5\gamma' B N_\gamma}{q N_q} = \frac{q_{r3} - 0,5\gamma' B N_\gamma}{\gamma D N_q} \quad (9)$$

Os resultados de d_q^* para os Casos 2 e 3 são apresentados nas Figuras 7 e 8, respectivamente. O andamento das curvas destas figuras é semelhante ao anteriormente obtido por Antão et al. (2010). O parâmetro d_q^* assume valores elevados para relações D/B pequenas, reduzindo-se rapidamente até valores de D/B da ordem de 1, para depois subirem muito ligeiramente a partir daí e até ao valor

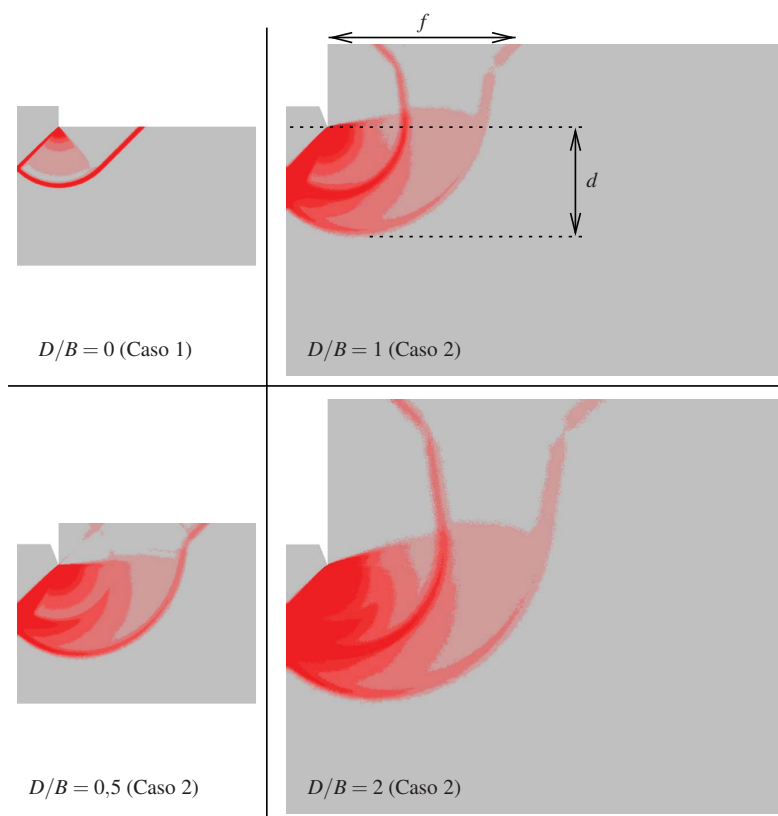


Fig. 6 – Manchas dos incrementos de deformação plástica obtidas para os cálculos realizados em condições não drenadas, para diferentes valores de D/B .

máximo de D/B considerado (3). Verifica-se igualmente que, para o Caso 3, os valores de d_q^* são um pouco inferiores.

Na Figura 9 apresenta-se as manchas de deformação plástica, das quais se inferem os mecanismos, para $\phi' = 30^\circ$, para os Casos 1, 2 e 3 e para diferentes valores de $q/(\gamma B)$. Uma comparação prévia com a Figura 6 permite constatar uma influência ainda mais significativa de D/B no caso drenado em relação à que se constatou existir no caso não drenado.

A análise da Figura 9 permite verificar que, no Caso 1, se verifica o esperado aumento da dimensão do mecanismo (e, portanto, de d e de f) com o aumento de q . O limite, nunca atingido, seria o mecanismo correspondente ao N_q . Quando o solo acima do plano de fundação é explicitamente modelado (Casos 2 e 3) verifica-se o esperado incremento de f , motivado pela simples geometria, mas também um aumento da profundidade do mecanismo, d . Tal efeito é superior no Caso 3, para igual valor de D/B .

Note-se, ainda, que igual valor de D/B corresponde, no Caso 3, a uma relação $q/(\gamma' B)$ dupla da relação $q/(\gamma B)$ do Caso 2; no entanto, os mecanismos para iguais valores destas relações não são idênticos, sendo um pouco mais profundos no Caso 2. A dimensão dos mecanismos nos Casos 2 e 3 parece, assim, ser influenciada em simultâneo pela relação entre q e o valor do produto γB (ou $\gamma' B$) e pela relação geométrica D/B .

Os valores de f/B e de d/B são apresentados nas Figuras 10, 11 e 12, respectivamente para os Casos 1, 2 e 3. Pode concluir-se, como esperado, que o aumento de ϕ' e de $q/(\gamma B)$ conduz, nos três

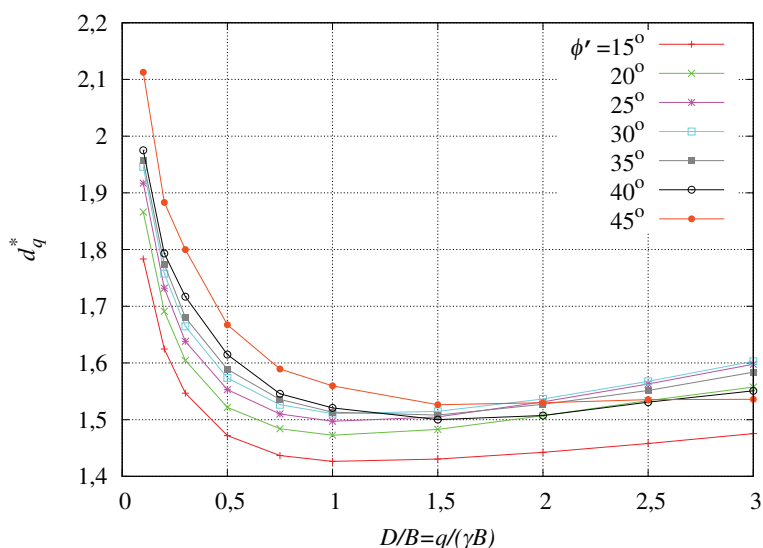


Fig. 7 – Valores de d_q^* obtidos dos cálculos realizados correspondentes ao Caso 2, admitindo condições drenadas.

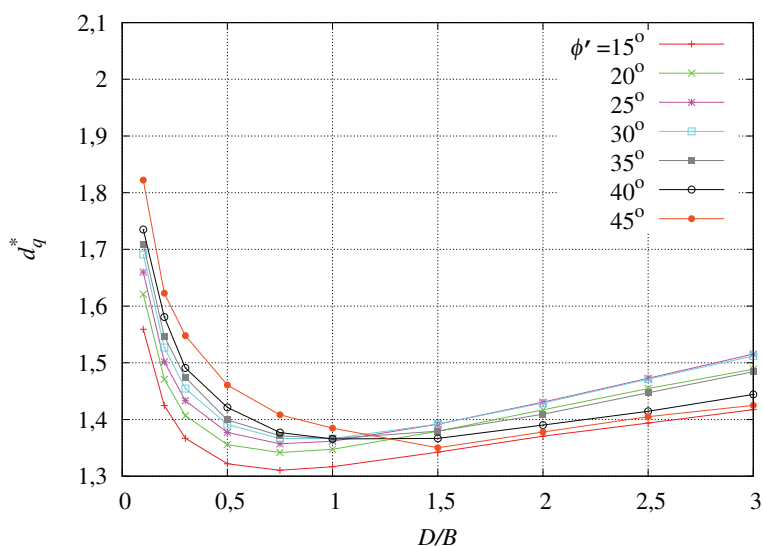


Fig. 8 – Valores de d_q^* obtidos dos cálculos realizados correspondentes ao Caso 3, com $\gamma' = \gamma/2$, admitindo condições drenadas.

casos, a um aumento de ambas as grandezas, variando no Caso 1, como referido anteriormente, entre a extensão lateral do mecanismo obtido para N_γ ($q = 0$) e a do mecanismo do N_q .

Verifica-se ainda que, no Caso 2, a extensão lateral atinge valores substancialmente superiores às do Caso 1, em especial para valores de D/B elevados, dado o prolongamento do mecanismo até à superfície do terreno. Faz-se notar, a este propósito, que a escala do eixo f/B das Figuras 11 e 12 não é a mesma que se adoptou na Figura 10. O efeito na profundidade não é tão significativo. Os valores de ambas as grandezas são um pouco superiores (para igual D/B) para o Caso 3.

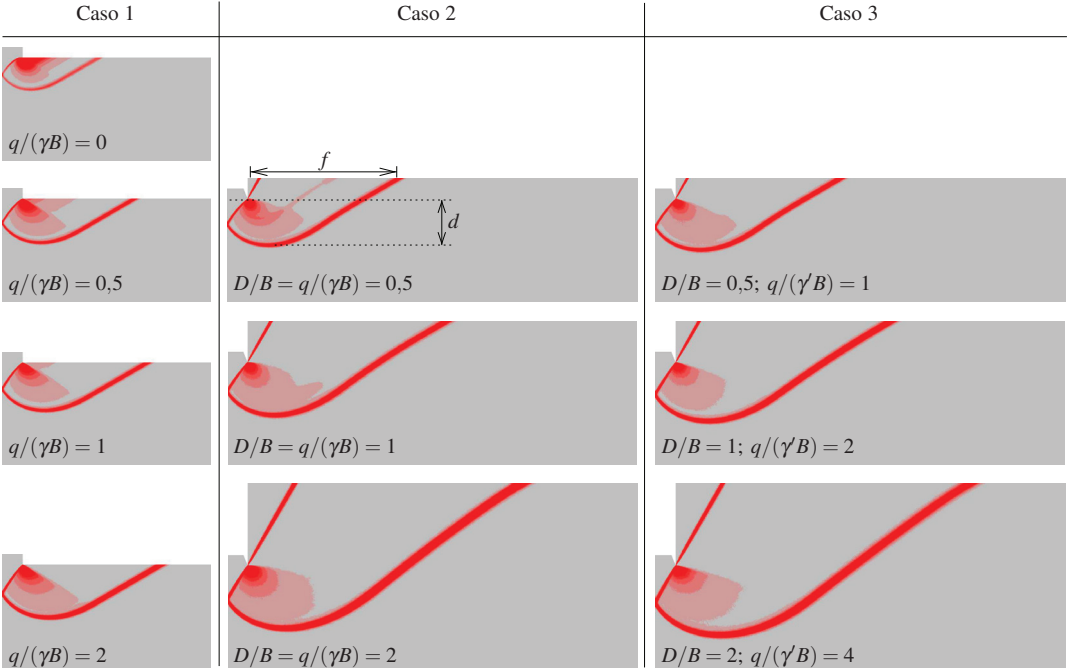


Fig. 9 – Manchas dos incrementos de deformação plástica obtidas para $\phi' = 30^\circ$, para os Casos 1, 2 e 3 e para diferentes valores de $q/(\gamma B)$ e (ou) D/B .

5 – OBSERVAÇÕES FINAIS

A escolha do valor representativo de uma propriedade do solo, em particular de uma propriedade resistente, tem impacto significativo no nível de segurança de estruturas geotécnicas. A utilização de valores característicos como valores representativos abre a discussão sobre a influência da variabilidade espacial e da forma de a considerar na escolha dos próprios valores característicos, o que pode ser feito através do índice de sensibilidade. Neste índice intervêm a geometria do mecanismo de colapso, que há, portanto, que conhecer.

As Figuras 5(b) (para condições não drenadas) e 10 a 12 (condições drenadas) permitem estimar a profundidade e a extensão lateral do mecanismo de rotura de fundações superficiais.

Pretendendo-se determinar o valor característico das propriedades resistentes com base na equação 1 e usando k_n dado pela equação 2, sugere-se estimar o valor de ℓ a usar na equação 3 como d (no Caso 1) ou $d + D$ (nos Casos 2 e 3), obtido das Figuras 5(b) e 10 a 12 e o valor de θ típico da formação na direcção vertical. Sugere-se ainda, na utilização das Figuras 10 a 12, adoptar o valor de ϕ' igual ao valor médio ou igual a um valor nominal que possa ter sido determinado, como primeira iteração, e eventualmente corrigi-lo após a determinação do valor característico em resultado da equação 1, numa ou mais iterações, caso se justifiquem. No Anexo apresenta-se um exemplo deste procedimento.

6 – AGRADECIMENTOS

Esta investigação foi financiada parcialmente pela Fundação para a Ciência e a Tecnologia, I.P. (FCT, <https://ror.org/00snfq58>) sob o Financiamento UID/6438/2025 (<https://doi.org/10.54499/UID/06438/2025>) da unidade de investigação CERIS. Para efeitos de Acesso Aberto, os autores

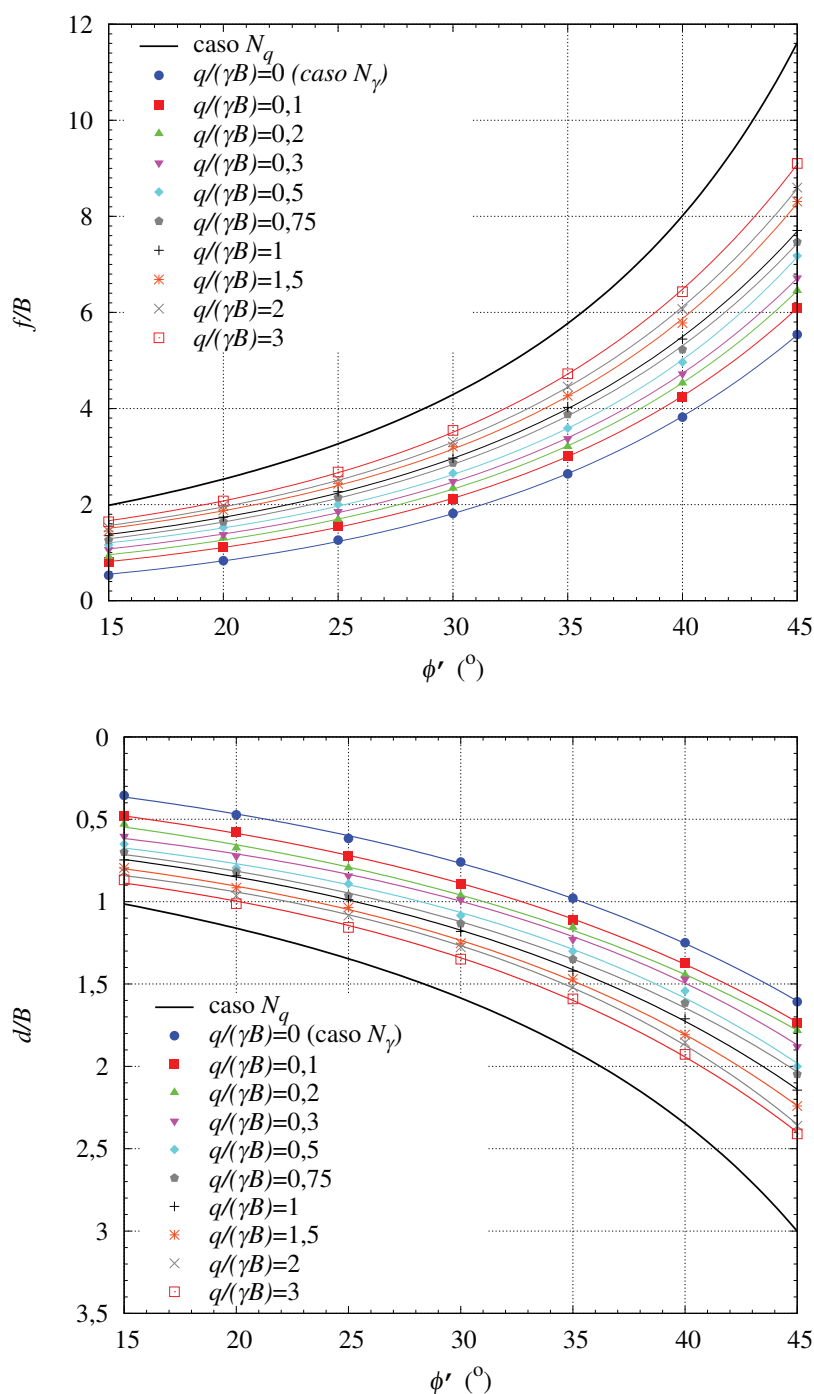


Fig. 10 – Valores de f/B (em cima) e de d/B (em baixo) obtidos dos cálculos realizados admitindo condições drenadas, para o Caso 1.

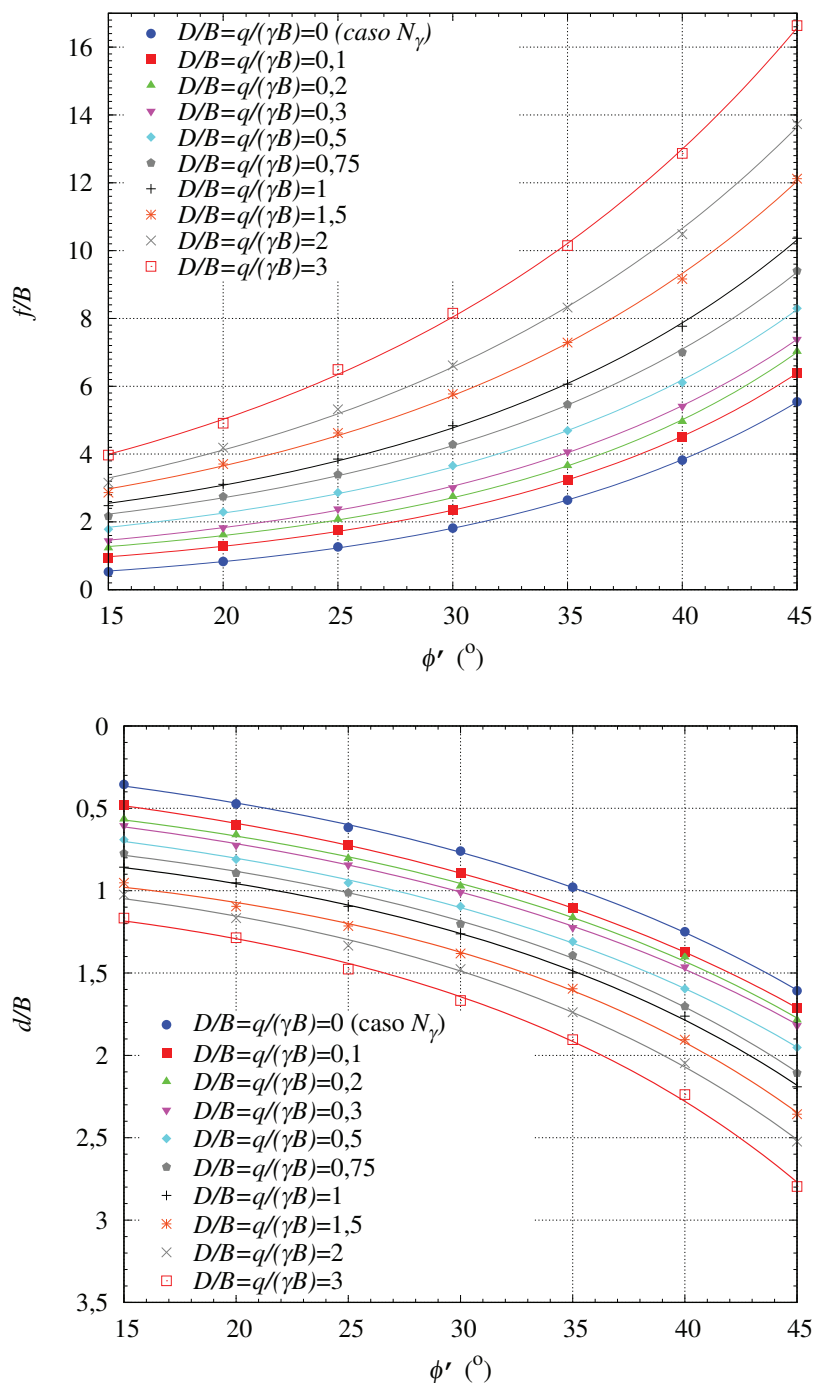


Fig. 11 – Valores de f/B (em cima) e de d/B (em baixo) obtidos dos cálculos realizados admitindo condições drenadas, para o Caso 2.

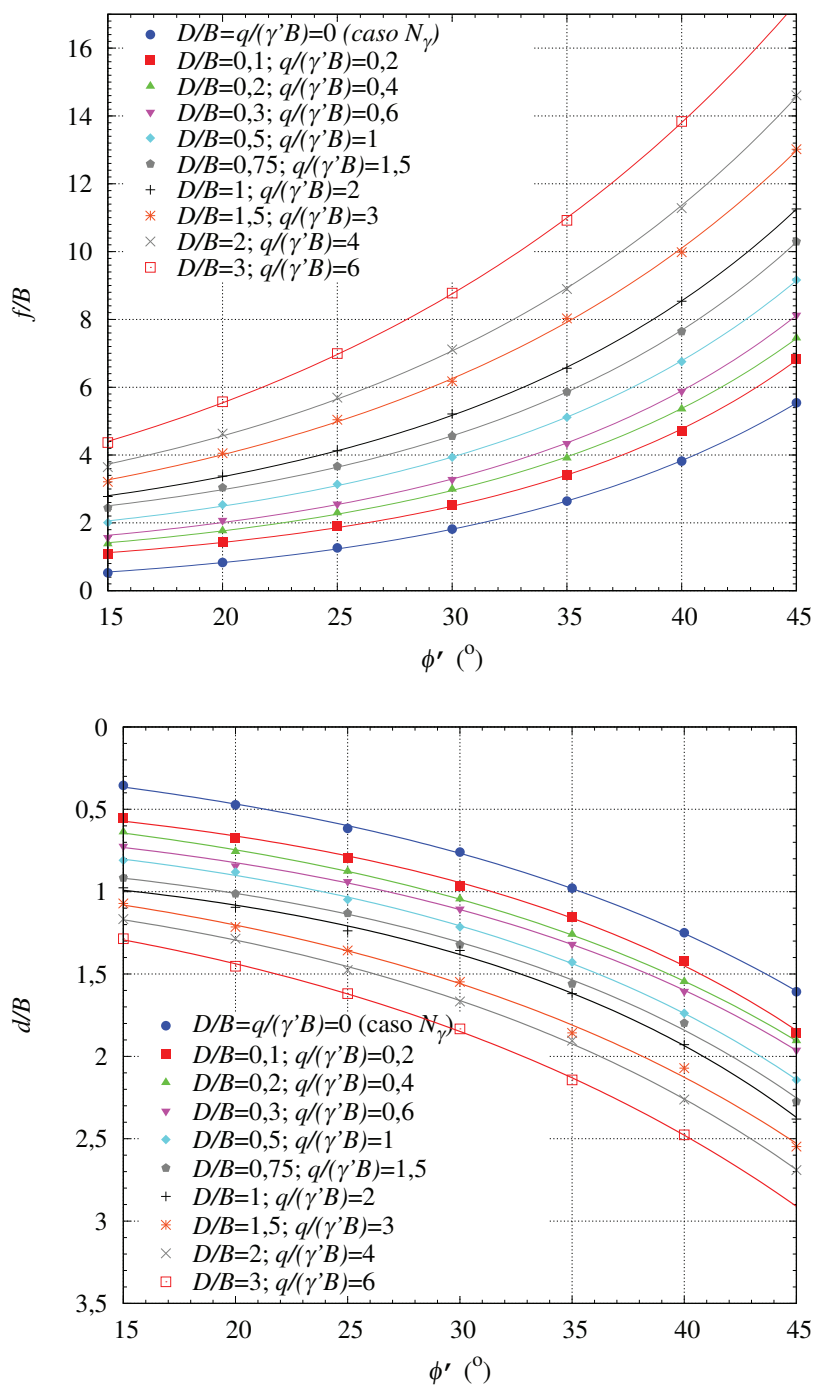


Fig. 12 – Valores de f/B (em cima) e de d/B (em baixo) obtidos dos cálculos realizados admitindo condições drenadas, para o Caso 3.

aplicaram a qualquer versão do manuscrito aceite (AAM) resultante desta submissão uma licença Creative Commons CC-BY.

7 – REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Antão, A. N.; Vicente da Silva, M.; Guerra, N. M. C. (2010). *Determination of depth factors for the bearing capacity of shallow foundations in sand*. Soils and Rocks, 33(1), pp. 47–52. <https://doi.org/10.28927/SR.331047>
- Antão, A. N.; Vicente da Silva, M.; Guerra, N. M. C.; Delgado, R. (2012). *An upper bound-based solution for the shape factors of bearing capacity of footings under drained conditions using a parallelized mixed f. e. formulation with quadratic velocity fields*. Computers and Geotechnics, 41, pp. 23–35. <https://doi.org/10.1016/j.compgeo.2011.11.003>
- Martin, C. M. (2005). *Exact bearing capacity calculations using the method of characteristics*. Proc. 11th Int. Conf. IACMAG, volume 4, pp. 441–450, Turin.
- Orr, T.; Sorgatz, J.; Estaire, J.; Prästings, A.; D’Ignazio, M.; Andries, J.; Ene, A. Polo Lopes, C. (2025). *Determination of representative values from derived values for verification with limit states with EN 1997*. Relatório, Publications Office of the European Union, Luxembourg. <https://doi.org/10.2760/0980105>
- Skempton, A. W. (1951). *The bearing capacity of clays*. Proc. Building Research Congress, volume 1, pp. 180–189.
- Vanmarcke, E. H. (1977). *Probabilistic modeling of soil profiles*. Journal of the Geotechnical Engineering Division, 103(11), pp. 1227–1246. <https://doi.org/10.1061/AJGEB6.0000517>
- Vicente da Silva, M.; Antão, A. N. (2008). *Upper bound limit analysis with a parallel mixed finite element formulation*. International Journal of Solids and Structures, 45(22-23), pp. 5788–5804. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2008.06.012>

ANEXO: EXEMPLO

Considere-se que $n = 12$ ensaios (de laboratório ou *in situ*) sobre amostras de um solo granular levaram à determinação ou à estimativa por correlação de valores de $\text{tg } \phi'$ cuja média levou a $[\text{tg } \phi']_m = 0.610$, correspondente a $\phi'_m = \arctg 0.610 = 31,4^\circ$, e a um desvio-padrão de $\text{tg } \phi'$ de 0,050. O coeficiente de variação, V , é, portanto, $V = 0,050/\text{tg } 31,4 = 0,082$. Uma análise dos resultados levou a um valor nominal de ϕ' , $\phi'_{\text{nom}} = 30^\circ$, como estimativa cautelosa do valor médio. Admita-se que esta formação tem uma escala de flutuação de ϕ' na direcção vertical de 1 m e que na direcção horizontal a escala de flutuação é muito superior, como é típico de formações sedimentares.

Pretende-se escolher o valor representativo de ϕ' determinado enquanto valor característico (usando métodos estatísticos), para determinação da capacidade resistente (e do seu valor de cálculo) de uma fundação superficial com largura $B = 3$ m, fundada a profundidade tal que a tensão efectiva vertical transmitida pelo solo acima da base da fundação é $q/(\gamma B) = 0,5$. Dado, por hipótese, o solo acima da base da fundação ter características mecânicas inferiores à do solo abaixo da base da fundação, considere-se o Caso 1 (Figura 1).

Considerando, como primeira iteração, $\phi' = \phi'_{\text{nom}} = 30^\circ$, tem-se, da Figura 10, que para $q/(\gamma B) = 0,5$ se obtém $d/B = 1,1$, o que resulta em $d = 3,3$ m. Tal conduz a $\Gamma^2 = 1/3,3 = 0,303$ (equação 3).

Admitindo o valor de V determinado a partir dos resultados da caracterização (desconhecido *a priori*) e atendendo a que $t_{95}^{n-1} = 1,796$ (para $n = 12$), k_n é dado por (equação 2):

$$k_n = 1,796 \sqrt{0,303 + \frac{1}{12}} = 1,116 \quad (10)$$

Tal conduz a (equação 1):

$$\operatorname{tg} \phi'_k = \operatorname{tg} 31,4^\circ (1 - 1,116 \times 0,082) = 0,555 \Rightarrow \phi'_k = 29,0^\circ \quad (11)$$

Repetindo esta sequência de procedimentos numa segunda iteração agora considerando $\phi' = 29,0^\circ$, tem-se:

$$\phi' = 29,0^\circ \Rightarrow d/B = 1,03 \Rightarrow \Gamma^2 = 0,324 \Rightarrow k_n = 1,146 \Rightarrow \phi'_k = 28,9^\circ \quad (12)$$

Atendendo a que o valor de ϕ'_k obtido da segunda iteração é praticamente igual ao valor que resultou da primeira, adopta-se $\phi'_k = 28,9 \simeq 29^\circ$.